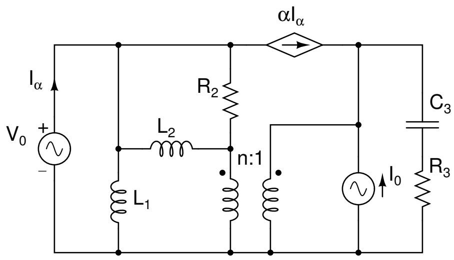
Esame di Teoria dei Circuiti – 13 Luglio 2011 (Soluzione)

Esercizio 1

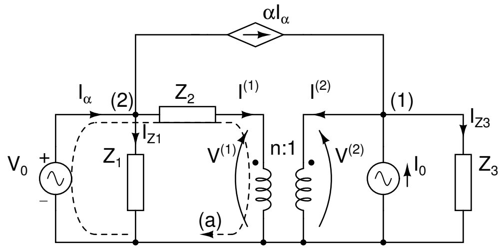


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$L_1 = 160\,\mathrm{mH}$, $R_2 = 100\,\Omega$, $L_2 = 200\,\mathrm{mH}$, $R_3 = 10\,\Omega$ $C_3 = 400\,\mu\mathrm{F}$, $\alpha = 3/2$, $n = 2$, $V_0(t) = 6 \cdot 10^{-1} \cos(\omega t)$ V, $I_0(t) = 3 \cdot 10^{-2} \cos(\omega t + \pi/2)$ A, $\omega = 250\,\mathrm{rad/s}$.

Calcolare la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore ideale di tensione V_0.

Soluzione

Nel dominio dei fasori il circuito può essere ridisegnato come segue, dove L_2 ed R_2, collegate in parallelo, sono state sostituite dall'impedenza Z_2 e C_3 ed R_3 (serie) da Z_3.



con $Z_1 = 40j\,\Omega$, $Z_2 = 20 + 40j\,\Omega$, $Z_3 = 10 - 10j\,\Omega$, $V_0 = 6 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{V}$, $I_0 = 3 \cdot 10^{-2} e^{j\pi/2}\,\mathrm{mA} = 3j \cdot 10^{-2}\,\mathrm{A}$.

Per via della topologia circuitale, in particolare per via del generatre comandato αI_α, non è possibile semplificare il circuito mediante circuiti equivalenti di Thevenin o Norton. Pertanto è necessario procedere con l'analisi circuitale classica, considerando tra le varie equazioni del circuito anche quella del trasformatore:

$$\begin{cases} V^{(1)} = nV^{(2)} \\ I^{(2)} = -nI^{(1)} \end{cases}$$

Dal bilancio delle correnti al nodo (1)

$$(1): \quad \alpha I_\alpha + I_0 = I_{Z_3} + I^{(2)}$$

con $V^{(2)} = Z_3 I_{Z_3}$, ovvero

$$Z_3 \alpha I_\alpha + Z_3 I_0 = V^{(2)} + Z_3 I^{(2)}$$

$$n Z_3 \alpha I_\alpha + n Z_3 I_0 = V^{(1)} - n^2 Z_3 I^{(1)}$$

dove nell'ultima uguaglianza si sono sfruttate le equazioni del trasformatore. Inoltre dal bilancio delle correnti al nodo (2) si ha

$$(2): \quad I_\alpha = I_{Z1} + \alpha I_\alpha + I^{(1)}$$

$$I^{(1)} = (1 - \alpha) I_\alpha - I_{Z1} = (1 - \alpha) I_\alpha - V_0 / Z_1$$

e, nell'equazione sopra, esplicitando $V^{(1)}$

$$V^{(1)} = nZ_3\alpha I_\alpha + nZ_3 I_0 + n^2 Z_3(1-\alpha)I_\alpha - n^2 Z_3 V_0/Z_1$$

Noti $V^{(1)}$ e $I^{(1)}$ in funzione di I_α, è possibile determinare I_α con il bilancio delle tensioni alla maglia (a)

$$V_0 = Z_2 I^{(1)} + V^{(1)}$$

$$V_0 = Z_2(1-\alpha)I_\alpha - \frac{Z_2}{Z_1}V_0 + nZ_3\alpha I_\alpha + nZ_3 I_0 + n^2 Z_3(1-\alpha)I_\alpha - n^2\frac{Z_3}{Z_1}V_0$$

$$I_\alpha = \frac{\left(1 + \frac{Z_2}{Z_1} + n^2\frac{Z_3}{Z_1}\right)V_0 - nZ_3 I_0}{Z_2(1-\alpha) + nZ_3\alpha + n^2 Z_3(1-\alpha)} = 5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{A}$$

La potenza complessa erogata dal generatore V_0 è definita come

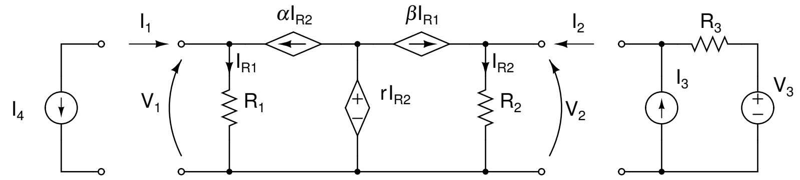
$$N = P + iQ = \frac{1}{2}V_0 I_{V0}^*$$

dove I_{V0}^* è il complesso coniugato di $I_{V0} = I_\alpha$. Poiché I_α è puramente reale, si ha $I_{V0}^* = I_\alpha = 5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{A}$. Ne segue che

$$N = 1.5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{W}$$

con $P = 15\,\mathrm{mW}$, $Q = 0\,\mathrm{VAR}$. La potenza erogata è solo attiva.

Esercizio 2

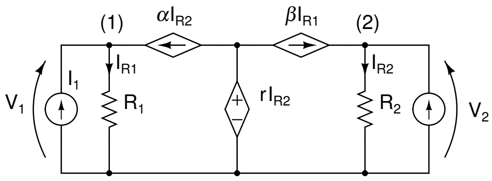


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 1/3$, $\beta = 2$, $r = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $V_3 = 2\,\mathrm{V}$, $I_3 = 3\,\mathrm{mA}$.
Determinare:

- la descrizione del due porte evidenziato in figura tramite matrice resistenza $\underline{R}$;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 1 del due porte $\underline{R}$ calcolato al punto precedente, quando alla porta 2 vengono collegati i generatori ideali V_3 ed I_3 e la resistenza R_3, come mostrato in figura;
- quale valore deve avere il generatore di corrente ideale I_4 affinché la potenza P_{R3} dissipata dalla resistenza R_3 sia nulla, quando alla porta 1 di $\underline{R}$ viene collegato il generatore I_4, e alla porta 2 vengono collegati V_3, I_3 e R_3 (come nel caso precedente), come mostrato in figura.

Soluzione

Per determinare la descrizione tramite matrice delle resistenze $\underline{R}$ del circuito in esame si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di corrente I_1 e I_2, e quindi di calcolarne la tensione V_1 e V_2 ai loro capi.



Dai bilanci di corrente ai nodi (1) e (2) si ha

$$\begin{aligned} (1): &\quad I_1 + \alpha I_{R2} = I_{R1} \\ (2): &\quad I_2 + \beta I_{R1} = I_{R2} \end{aligned}$$

Risolvendo tale sistema in I_{R1} e I_{R2} si ha come soluzione

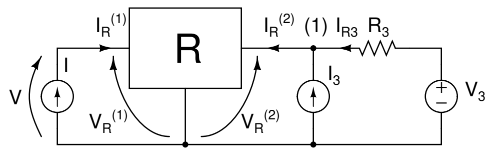
$$I_{R1} = \frac{I_1 + \alpha I_2}{1-\alpha\beta}, \quad I_{R2} = \frac{\beta I_1 + I_2}{1-\alpha\beta}$$

e, osservando che $V_1 = R_1 I_{R1}$ e $V_2 = R_2 I_{R2}$, è possibile determinare la matrice $\underline{R}$.

$$V_1 = R_1 I_{R1} = \underbrace{\frac{R_1}{1-\alpha\beta}}_{R_{11} = 6\,\mathrm{k}\Omega} I_1 + \underbrace{\frac{\alpha R_1}{1-\alpha\beta}}_{R_{12} = 2\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

$$V_2 = R_2 I_{R2} = \underbrace{\frac{\beta R_2}{1-\alpha\beta}}_{R_{21} = 6\,\mathrm{k}\Omega} I_1 + \underbrace{\frac{R_2}{1-\alpha\beta}}_{R_{22} = 3\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

Per il secondo punto dell'esercizio, si connetta al due porte calcolato in precedenza il circuito formato da V_3, I_3 e R_3. Si calcoli l'equivalente di Thevenin del circuito complessivo collegando alla porta 2 di $\underline{R}$ un generatore ideale di corrente I per calcolarne la tensione V ai suoi capi.



Si indichino con $V_R^{(1)}$ e $I_R^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{R}$, e con $V_R^{(2)}$ e $I_R^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, con $V_R^{(1)} = V$ e $I_R^{(1)} = I$. Dalla prima delle equazioni costitutive di $\underline{R}$ si ha

$$V = V_R^{(1)} = R_{11} I_R^{(1)} + R_{12} I_R^{(2)} = R_{11} I + R_{12} I_R^{(2)}$$

Si determini quindi $I_R^{(2)}$.

La corrente $I_{R3} = (V_3 - V_R^{(2)})/R_3$ può essere usata nel bilancio delle correnti al nodo (1) assieme alla seconda equazione costitutiva di $\underline{R}$ per determinare $I_R^{(2)}$

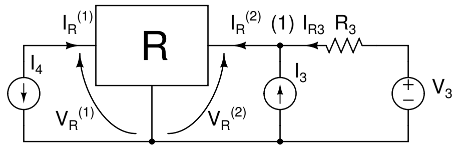
$$(1): \quad I_{R3} + I_3 = I_R^{(2)}, \quad \frac{V_3 - R_{21} I - R_{22} I_R^{(2)}}{R_3} + I_3 = I_R^{(2)}$$

$$I_R^{(2)} = \frac{V_3 + R_3 I_3 - R_{21} I}{R_{22} + R_3}$$

da cui

$$V = \underbrace{R_{12}\frac{V_3 + R_3 I_3}{R_{22} + R_3}}_{V^{(eq)} = 2.5\,\mathrm{V}} + \Bigg(\underbrace{R_{11} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{22} + R_3}}_{R^{(eq)} = 3\,\mathrm{k}\Omega}\Bigg) I$$

Nel punto successivo dell'esercizio, il circuito da considerare è simile al precedente, con $I_4 = -I_R^{(1)}$.



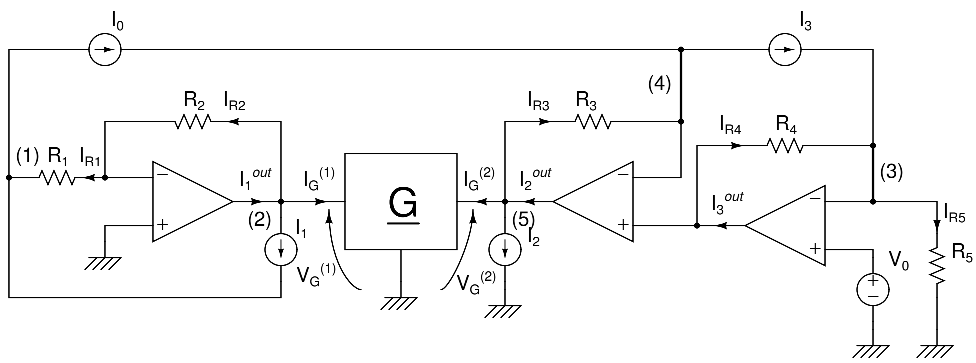
Imporre $P_{R3} = 0$ significa imporre $I_{R3} = 0$ o, equivalentemente, $V_{R3} = 0$. Procedendo come nel caso precedente, è possibile determinare I_{R3} come

$$I_{R3} = I_{R2} - I_3 = \frac{V_3 + R_3 I_3 + R_{21} I_4}{R_{22} + R_3} - I_3 = \frac{V_3 - R_{22} I_3 + R_{21} I_4}{R_{22} + R_3}$$

La soluzione cercata si ha imponendo

$$\frac{V_3 - R_{22} I_3 + R_{21} I_4}{R_{22} + R_3} = 0, \quad I_4 = \frac{R_{22} I_3 - V_3}{R_{21}} = \frac{7}{6}\,\mathrm{mA} \simeq 1.166\,\mathrm{mA}$$

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = R_2 = \ldots = R_5 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $\underline{G} = \begin{pmatrix} 1/5\,\mathrm{m} & 3/5\,\mathrm{m} \\ 2/5\,\mathrm{m} & 2/5\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \Omega^{-1}$, $V_0 = 6\,\mathrm{V}$, $I_0 = 3.5\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 1\,\mathrm{mA}$, $I_2 = 4\,\mathrm{mA}$, $I_3 = 3\,\mathrm{mA}$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Determinare:

- le correnti I_1^{out}, I_2^{out} e I_3^{out} di uscita degli amplificatori operazionali;
- la potenza dissipata dal due porte $\underline{G}$.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti come indicati in figura. Si consideri per tutti gli amplificatori operazionale che la corrente sugli ingressi sia nulla e che la tensione ai due ingressi sia uguale per via del corto circuito virtuale.

Dal bilancio delle correnti al nodo (1), si ha

$$I_1 + I_{R1} = I_0, \quad I_{R2} = I_{R1} = I_0 - I_1$$

che, considerando anche il bilancio al nodo (2), porta a

$$I_1^{out} = I_{R2} + I_G^{(1)} + I_1 = I_0 + I_G^{(1)} = I_0 + G_{11}V_G^{(1)} + G_{12}V_G^{(2)}$$

Le tensione $V_G^{(1)}$ può essere calcolata immediatamente come

$$V_G^{(1)} = V_1^- + R_2 I_{R2} = V_1^+ + R_2(I_0 - I_1) = 5\,\mathrm{V}$$

mentre per determinare $V_G^{(2)}$ è necessario risolvere anche gli operazionali 2 e 3.

Dal corto circuito virtuale all'operazionale 3 si ha $V_3^- = V_3^+ = V_0$, con $I_{R5} = V_3^-/R_5 = V_0/R_5$; dal bilancio delle correnti al nodo (3)

$$I_3 + I_{R4} = I_{R5}, \quad I_3^{out} = I_{R4} = \frac{V_0}{R_5} - I_3 = 0\,\mathrm{A}$$

$$V_2^- = V_2^+ = V_3^- + R_4 I_{R4} = V_0 + \frac{R_4}{R_5}V_0 - R_4 I_3$$

da cui, considerando il bilancio delle correnti al nodo (4), è possibile ricavare $V_G^{(2)}$

$$I_{R3} + I_0 = I_3, \quad I_{R3} = I_3 - I_0$$

$$V_G^{(2)} = V_2^- + R_3 I_{R3} = V_0 + \frac{R_4}{R_5}V_0 - R_4 I_3 + R_3(I_3 - I_0) = 5\,\mathrm{V}$$

da cui $I_1^{out} = 7.5\,\mathrm{mA}$. La corrente I_2^{out} è determinata dal bilancio al nodo (5)

$$I_2^{out} = I_{R3} + I_G^{(2)} + I_2 = I_3 - I_0 + G_{21}V_G^{(1)} + G_{22}V_G^{(2)} + I_2 = 7.5\,\mathrm{mA}$$

La potenza $P_{\underline{G}}$ è data da

$$P_{\underline{G}} = V_G^{(1)} I_G^{(1)} + V_G^{(2)} I_G^{(2)} = V_G^{(1)}(G_{11}V_G^{(1)} + G_{12}V_G^{(2)}) + V_G^{(2)}(G_{21}V_G^{(1)} + G_{22}V_G^{(2)}) = 40\,\mathrm{mW}$$