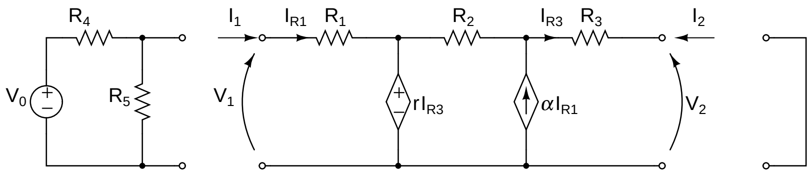
<u>**Teoria dei Circuiti**</u>
<u>**Esercitazione - 15 giugno 2009 (Soluzione)**</u>

Esercizio 1

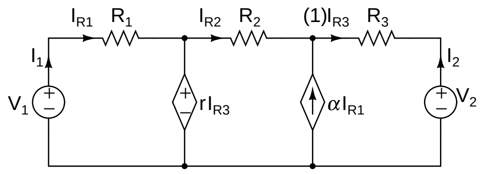


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $r = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 2$, $R_4 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_5 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $V_0 = 8\,\mathrm{V}$. Calcolare:

- la matrice G delle conduttanze del due porte;
- il circuito equivalente di Norton alla porta 2, quando alla porta 1 vengono collegati il generatore ideale di tensione V_0 e le resistenze R_4 e R_5, come mostrato in figura;
- La potenza dissipata dal due porte G quando alla porta 1 vengono collegati V_0, R_4 e R_5, e la porta 2 viene chiusa in corto circuito, come mostrato in figura.

Soluzione

Per trovare la matrice delle conduttanze G si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di tensione V_1 e V_2 e di calcolarne le correnti I_1 e I_2



con $I_1 = I_{R1}$ e $I_2 = -I_{R3}$.

Considerando I_{R1}, I_{R2} e I_{R3} le tre incognite del sistema, è necessario trovare tre equazione per la risoluzione. Due sono date dal bilancio delle tensione alle due maglie composte, la prima, da V_1, R_1 e rI_{R3} e la seconda da rI_{R3}, R_2, R_3 e V_2:

$$V_1 = R_1 I_{R1} + r I_{R3}$$

$$r I_{R3} = R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} + V_2$$

mentre la terza è il bilancio delle correnti al nodo (1)

$$I_{R2} + \alpha I_{R1} = I_{R3}$$

Dall'ultima equazione si ricava $I_{R2} = I_{R3} - \alpha I_{R1}$, che sostituita nella seconda dà

$$r I_{R3} = R_2 I_{R3} - \alpha R_2 I_{R1} + R_3 I_{R3} + V_2$$

$$I_{R3} = \frac{\alpha R_2 I_{R1} - V_2}{R_2 + R_3 - r}$$

Sostituendo questa espressione nella prima equazione, si arriva alla risoluzione del sistema

$$V_1 = R_1 I_{R1} + r \frac{\alpha R_2 I_{R1} - V_2}{R_2 + R_3 - r}$$

$$I_{R1}=\frac{V_1+\dfrac{rV_2}{R_2+R_3-r}}{R_1+\dfrac{\alpha r R_2}{R_2+R_3-r}}=\frac{(R_2+R_3-r)\,V_1+rV_2}{R_1\,(R_2+R_3-r)+\alpha r R_2}$$

$$I_1=I_{R1}=\underbrace{\frac{R_2+R_3-r}{R_1\,(R_2+R_3-r)+\alpha r R_2}}_{G_{11}=\frac{3}{5}\,\mathrm{m}\Omega^{-1}}V_1+\underbrace{\frac{r}{R_1\,(R_2+R_3-r)+\alpha r R_2}}_{G_{12}=\frac{1}{5}\,\mathrm{m}\Omega^{-1}}V_2$$

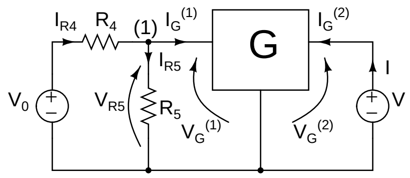
$$I_{R3}=\frac{\alpha R_2\dfrac{(R_2+R_3-r)\,V_1+rV_2}{R_1\,(R_2+R_3-r)+\alpha r R_2}-V_2}{R_2+R_3-r}=$$

$$=\frac{\alpha R_2 V_1}{R_1\,(R_2+R_3-r)+\alpha r R_2}+\frac{\alpha r R_2 V_2}{(R_2+R_3-r)\,(R_1\,(R_2+R_3-r)+\alpha r R_2)}-\frac{V_2}{R_2+R_3-r}=$$

$$=\frac{\alpha R_2 V_1}{R_1\,(R_2+R_3-r)+\alpha r R_2}-\frac{R_1 V_2}{R_1\,(R_2+R_3-r)+\alpha r R_2}$$

$$I_2=-I_{R3}=\underbrace{-\frac{\alpha R_2}{R_1\,(R_2+R_3-r)+\alpha r R_2}}_{G_{21}=-\frac{2}{5}\,\mathrm{m}\Omega^{-1}}V_1+\underbrace{\frac{R_1}{R_1\,(R_2+R_3-r)+\alpha r R_2}}_{G_{22}=\frac{1}{5}\,\mathrm{m}\Omega^{-1}}V_2$$

Per il secondo punto dell'esercizio, il circuito da considerare è il seguente, dove per ricavare il circuito equivalente di Norton si è collegato alla porta 2 un generatore ideale di tensione V:



Indicando con $V_G^{(1)}$ e $I_G^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di G, e con $V_G^{(2)}$ e $I_G^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, si ha $V_G^{(1)}=V_{R5}$ e $V_G^{(2)}=V$.

Dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ottiene

$$I_{R4}=I_{R5}+I_G^{(1)}$$

$$\frac{V_0-V_{R5}}{R_4}=\frac{V_{R5}}{R_5}+G_{11}V_{R5}+G_{12}V$$

$$V_{R5}=\frac{\dfrac{V_0}{R_4}-G_{12}V}{\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}+G_{11}}$$

Mentre la condizione $I_G^{(2)}=I$ permette di determinare I

$$I=I_G^{(2)}=G_{21}V_{R5}+G_{22}V=G_{21}\frac{\dfrac{V_0}{R4}-G_{12}V}{\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}+G_{11}}+G_{22}V=$$

$$= \underbrace{\frac{G_{21}\dfrac{V_0}{R4}}{\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}+G_{11}}}_{I^{(eq)}=-1\,\mathrm{mA}} + \underbrace{\left(G_{22} - \frac{G_{12}G_{21}V}{\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}+G_{11}}\right)}_{G^{(eq)}=\frac{1}{4}\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V$$

Nella terza parte, si chiede di chiudere in corto circuito la porta 2 e di calcolare la potenza dissipata dal due porte. Ricordando che $V_G^{(2)} = 0$ e che quindi $I_G^{(1)} = G_{11}V_G^{(1)} + G_{12}V_G^{(1)} = G_{11}V_G^{(1)}$, la potenza cercata è data da

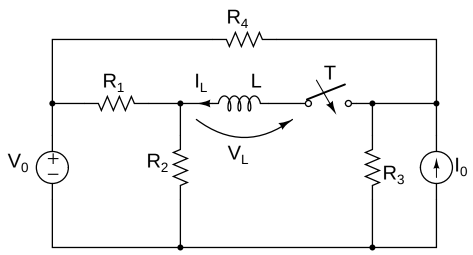
$$P_G = V_G^{(1)}I_G^{(1)} + V_G^{(2)}I_G^{(2)} = V_G^{(1)}I_G^{(1)} = G_{11}\left(V_G^{(1)}\right)^2$$

La tensione $V_G^{(1)}$ si può ricavare dal caso precedente imponendo $V = 0$

$$V_G^{(1)} = V_{R5} = \frac{\dfrac{V_0}{R_4}}{\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}+G_{11}} = \frac{V_0}{1+\dfrac{R_4}{R_5}+R_4G_{11}} = 2.5\,\mathrm{V}$$

Segue che $P_G = 3.75\,\mathrm{mW}$.

Esercizio 2



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $L = 100\,\mathrm{mH}$, $V_0 = 13\,\mathrm{V}$, $I_0 = 10\,\mathrm{mA}$.

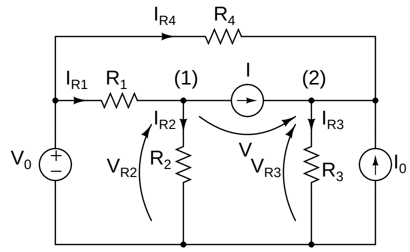
Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T è aperto ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore T si chiude. Determinare l'andamento della corrente $I_L(t)$.

Soluzione

Per $t < 0$ l'interruttore T_1 è aperto e di conseguenza la corrente che scorre nell'induttanza è nulla:

$$I_{L0} = 0$$

All'istante $t = t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T si chiude. Per calcolare il transitorio di carica, si ricorra all'equivalente di Thevenin del circuito conneso all'induttanza. Si supponga quindi di sostituire L con un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi.



Dal bilancio delle correnti al nodo (1) è possibile ricavare V_{R2}

$$I_{R1} = I + I_{R2}$$

$$\frac{V_0 - V_{R2}}{R_1} = I + \frac{V_{R2}}{R_2}$$

$$V_{R2} = \frac{\dfrac{V_0}{R_1} - I}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = R_2 \frac{V_0 - R_1 I}{R_1 + R_2}$$

mentre dal bilancio delle correnti al nodo (2) è possibile ricavare V_{R3}

$$I_{R4} + I_0 + I = I_{R3}$$

$$\frac{V_0 - V_{R3}}{R_4} + I_0 + I = \frac{V_{R3}}{R_3}$$

$$V_{R3} = \frac{\dfrac{V_0}{R_4} + I_0 + I}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}} = R_3 \frac{V_0 + R_4 I_0 + R_4 I}{R_3 + R_4}$$

Segue che

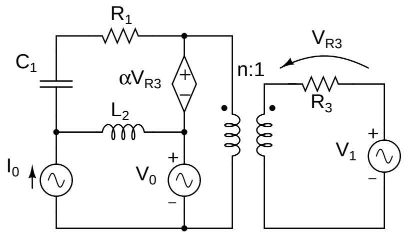
$$V = V_{R3} - V_{R2} = \underbrace{\frac{R_3 V_0 + R_3 R_4 I_0}{R_3 + R_4} - \frac{R_2 V_0}{R_1 + R_2}}_{V^{(eq)} = 5\,\mathrm{V}} + \left(\underbrace{\frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}_{R^{(eq)} = 1\,\mathrm{k}\Omega} \right) I$$

Per $t > t_0 = 0$ la corrente $I_L(t)$ è data quindi da

$$I_L(t) = \frac{V^{(eq)}}{R^{(eq)}} + \left(I'_{L0} - \frac{V^{(eq)}}{R^{(eq)}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

con $\tau = L/R^{(eq)} = 100\,\mu\mathrm{sec}$.

Esercizio 3

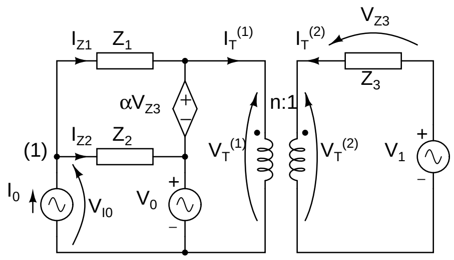


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$\omega = 10\,\mathrm{krad/s}$, $R_1 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $C_1 = 50\,\mathrm{nF} = 50 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}$, $L_2 = 200\,\mathrm{mH}$, $R_3 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $\alpha = 3$, $n = 4$, $V_0 = 8\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4)\mathrm{V}$, $V_1 = 2\cos(\omega t)\mathrm{V}$, $I_0 = 4\cos(\omega t - \pi/2)\mathrm{mA}$.

Calcolare la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore ideale di corrente I_0.

Soluzione

Nel dominio dei fasori il circuito può essere ridisegnato come



con $Z_1 = R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} = 2k - 2kj\,\Omega$, $Z_2 = j\omega L_2 = 2kj\,\Omega$, $Z_3 = 1k\,\Omega$, $V_0 = 8\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}\mathrm{V} = 8 + 8j\,\mathrm{V}$, $V_1 = 2\,\mathrm{V}$, $I_0 = 4\,e^{-j\frac{\pi}{2}}\mathrm{mA} = -4j\,\mathrm{mA}$.

Si noti che il generatore di tensione comandato αV_{R3} stato sostituito, per motivi di coerenza, da un generatore di tensione comandato αV_{z3}. Inoltre, per via della sua presenza non è possibile semplificare il circuito mediante sostituzione del trasformatore e di uno dei due circuiti ad esso connesso con l'equivalente di Thevenin. Pertanto è necessario procedere con l'analisi circuitale classica, considerando tra le varie equazioni del circuito anche quella del trasformatore:

$$\begin{cases} V_T^{(1)} = nV_T^{(2)} \\ I_T^{(2)} = -nI_T^{(1)} \end{cases}$$

Il primo passo è la determinazione della tensione V_{Z3}. Con il bilancio delle tensioni alla maglia di destra e di sinistra del trasformatore si ricava

$$V_0 + \alpha V_{Z3} = V_T^{(1)} = nV_T^{(2)} = n\,(V_1 + V_{Z3})$$

$$V_{Z3} = \frac{V_0 - nV_1}{n - \alpha} = 8j\,\mathrm{V}$$

Noto V_{Z3}, per determinare la potenza N_{I0} erogata da I_0 è necessario calcolare la tensione V_{I0}. Dal bilancio delle correnti al nodo (1)

$$I_0 = I_{Z2} + I_{Z1} = \frac{V_{I0} - V_0}{Z_2} + \frac{V_{I0} - \alpha V_{Z3} - V_0}{Z_1}$$

$$V_{I0} = \frac{I_0 + \left(\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}\right)V_0 + \dfrac{\alpha V_{R3}}{Z_1}}{\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1 Z_2 I_0 + (Z_1 + Z_2)\,V_0 + \alpha Z_2 V_{R3}}{Z_1 + Z_2} = -8\,\mathrm{V}$$

La potenza complessa erogata dal generatore I_0 è definita come

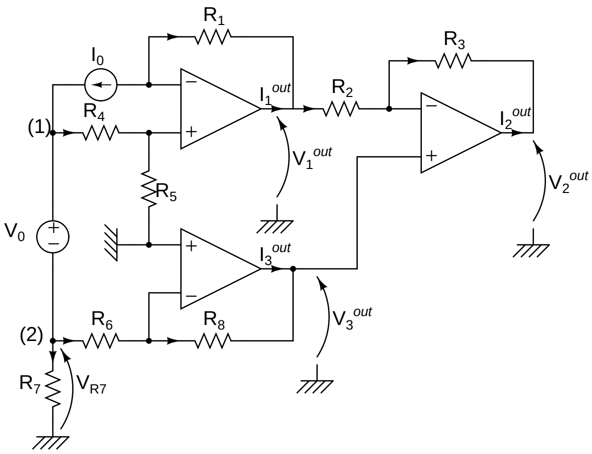
$$N_{I0} = P_{I0} + jQ_{I0} = \frac{1}{2} V_{I0} I_0^*$$

dove I_0^* il complesso coniugato di I_0 e vale $I_0^* = 4j\,\mathrm{mA}$. Ne segue che

$$N = \frac{1}{2} \cdot 8\,\mathrm{V} \cdot 4j\,\mathrm{mA} = -16j\,\mathrm{mVA}$$

con $P_{I0} = 0\,\mathrm{W}$, $Q_{I0} = -16\,\mathrm{mVAr}$.

Esercizio 4



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_8 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $V_0 = 3\,\mathrm{V}$, $I_0 = I_0 = 2\,\mathrm{mA}$. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out} e le correnti I_1^{out}, I_2^{out} e I_3^{out} di uscita degli operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle tensioni e delle correnti indicati in figura. Dalla condizione di corto circuito virtuale sugli ingressi dell'operazionale 3 si ha

$$V_3^+ = 0 = V_3^-$$

Quindi, chiamando V_{R7} la tensione ai capi della resistenza R_7, si ha

$$I_{R6} = \frac{V_{R7} - V_3^-}{R_6} = \frac{V_{R7}}{R_6} = I_{R8}$$

$$V_3^{out} = V_3^- - R_8 I_{R8} = -\frac{R_8}{R_6} V_{R7}; \quad I_3^{out} = -I_{R8} = -\frac{V_{R7}}{R_6}$$

Per via del fatto che gli ingressi degli operazionali non assorbano corrente, $I_{R1} = -I_0$. Inoltre R_4 e R_5 si comportano come fossero in serie, ovvero come un partitore di tensione:

$$V_1^+ = (V_{R7} + V_0)\,\frac{R_5}{R_4 + R_5} = V_1^-$$

$$V_1^{out} = V_1^- - R_1 I_{R1} = (V_{R7} + V_0)\,\frac{R_5}{R_4 + R_5} + R_1 I_0$$

Dalla condizione di corto circuito virtuale dell'operazionale 2 si ricavano le grandezze richieste mancanti:

$$V_2^+ = V_3^{out} = V_2^-$$

$$I_{R2} = \frac{V_1^{out} - V_2^-}{R_2} = \frac{V_1^{out} - V_3^{out}}{R_2} = I_{R3}$$

$$I_1^{out} = I_{R2} - I_{R1} = \frac{V_1^{out} - V_3^{out}}{R_2} + I_0$$

$$V_2^{out} = V_2^- - R_3 I_{R3} = V_3^{out} - \frac{R_3}{R_2}\left(V_1^{out} - V_3^{out}\right) = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) V_3^{out} - \frac{R_3}{R_2} V_1^{out}$$

$$I_2^{out} = -I_{R3} = -\frac{V_1^{out} - V_3^{out}}{R_2}$$

Resta da determinare V_{R7}, che si può ricavare attraverso gli unici due bilanci ai nodi non ancora considerati, ovvero ai nodi (1) e (2)

$$\begin{aligned} (1): &\qquad I_0 + I_{V0} = I_{R4} \\ (2): &\qquad 0 = I_{V0} + I_{R6} + I_{R7} \end{aligned}$$

che sommate membro a menbro danno

$$I_0 = I_{R4} + I_{R6} + I_{R7}$$

$$I_0 = \frac{V_{R7} + V_0}{R_4 + R_5} + \frac{V_{R7}}{R_6} + \frac{V_{R7}}{R_7}$$

$$V_{R7} = \frac{I_0 - \dfrac{V_0}{R_4 + R_5}}{\dfrac{1}{R_4 + R_5} + \dfrac{1}{R_6} + \dfrac{1}{R_7}} = 1\,\mathrm{V}$$

Quindi

$$V_1^{out} = 6\,\mathrm{V}, \quad V_2^{out} = -8\,\mathrm{V}, \quad V_3^{out} = -1\,\mathrm{V}$$

$$I_1^{out} = 5.5\,\mathrm{mA}, \quad I_2^{out} = -3.5\,\mathrm{mA}, \quad I_3^{out} = -0.5\,\mathrm{mA}$$