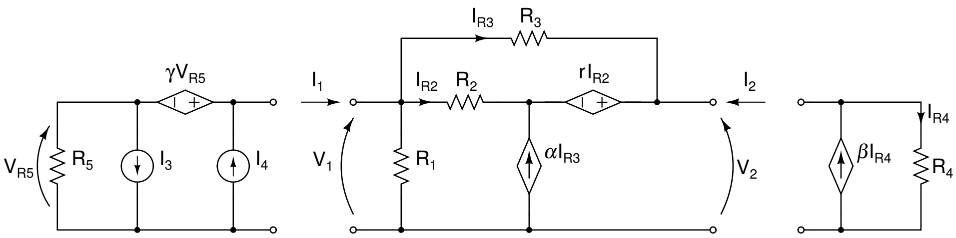
Esame di Teoria dei Circuiti – 16 Dicembre 2014 (Soluzione)

Esercizio 1



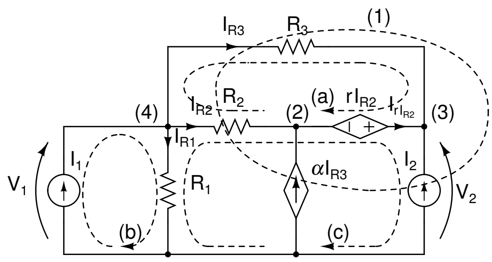
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = R_3 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_5 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $r = 7\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 9/7$, $\gamma = 3/2$, $I_3 = I_4 = 5\,\mathrm{mA}$.

Calcolare:

- la descrizione del doppio bipolo evidenziato in figura tramite matrice delle resistenze $\underline{R}$;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 1 del doppio bipolo $\underline{R}$ calcolato sopra, quando alla porta 2 vengono collegati il generatore di tensione comandato $\beta\, I_{R4}$ e la resistenza R_4, come indicato in figura;
- la potenza $P_{\underline{R}}$ dissipata dal doppio bipolo calcolato in precedenza, quando alla porta 1 vengono collegati I_3, I_4, $\gamma\, V_{R5}$ e R_5, e alla porta 2 vengono collegati $\beta\, I_{R4}$ e R_4, come indicato in figura.

Soluzione

Per determinare la descrizione del sottocircuito considerato tramite matrice delle resistenze $\underline{R}$ si supponga di collegare alla porta 1 (di sinistra) il generatore ideale di corrente I_1 e alla porta 2 (di destra) il generatore ideale di corrente I_2. Si calcoli quindi la tensione V_1 ai capi di I_1 e la tensione V_2 ai capi di I_2.



Dalla bilancio delle tensioni alla maglia indicata con (a) si ha

$$(a):\ V_{R2} - V_{R3} - r\, I_{R2} = 0, \qquad R_2 I_{R2} - R_3 I_{R3} - r\, I_{R2} = 0, \qquad I_{R2} = -\frac{R_3}{r - R_2} I_{R3}$$

Si consideri inoltre il bilancio delle correnti al taglio indicato con (1)

$$(1):\ I_{R3} + I_{R2} + \alpha\, I_{R3} + I_2 = 0, \qquad I_2 + (\alpha + 1) I_{R3} - \frac{R_3}{r - R_2} I_{R3} = 0$$

$$I_{R3} = -\frac{I_2}{\alpha + 1 - \dfrac{R_3}{r - R_2}} = -\frac{(r - R_2) I_2}{(\alpha + 1)(r - R_2) - R_3}$$

$$I_{R2} = \frac{R_3 I_2}{(\alpha+1)(r-R_2)-R_3}$$

Si può notare che la stessa equazione ottenuta dal bilancio delle correnti al taglio 1 poteva essere ottenuta sommando membro a membro i bilanci di corrente ai nodi (2) e (3)

$$(2):\ I_{R2} + \alpha\, I_{R3} - I_{r\,I_{R2}} = 0$$

$$(3):\ I_2 + I_{R3} + I_{r\,I_{R2}} = 0$$

$$(2)+(3):\ I_{R2} + \alpha\, I_{R3} - \cancel{I_{r\,I_{R2}}} + I_2 + I_{R3} + \cancel{I_{r\,I_{R2}}} = 0$$

Grazie alle espressioni ottenute, dal bilancio delle correnti al nodo (4) è possibile ricavare I_{R1}

$$(4):\ I_1 - I_{R1} - I_{R2} - I_{R3} = 0$$

$$I_{R1} = I_1 - \frac{R_3 I_2}{(\alpha+1)(r-R_2)-R_3} + \frac{(r-R_2)I_2}{(\alpha+1)(r-R_2)-R_3} = I_1 + \frac{(r-R_2-R_3)I_2}{(\alpha+1)(r-R_2)-R_3}$$

e dalla maglia (b), da cui si ha $V_1 - V_{R1} = 0$, la tensione V_1

$$V_1 = R_1 I_{R1} = \underbrace{R_1}_{R_{11}=3\,\mathrm{k}\Omega} I_1 + \underbrace{R_1 \frac{r-R_2-R_3}{(\alpha+1)(r-R_2)-R_3}}_{R_{12}=1\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

Per ottenere la tensione V_2 è invece necessario considerare il bilancio delle tensioni alla maglia (c)

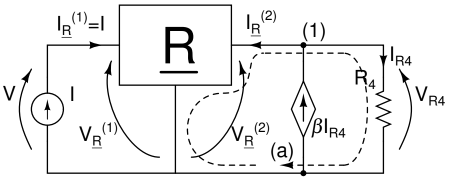
$$(c):\ V_{R1} - V_{R2} + r\, I_{R2} - V_2 = 0$$

$$V_2 = R_1 I_{R1} + (r-R_2) I_{R2} = \underbrace{R_1}_{R_{21}=3\,\mathrm{k}\Omega} I_1 + \underbrace{\frac{R_1(r-R_2-R_3)+R_3(r-R_2)}{(\alpha+1)(r-R_2)-R_3}}_{R_{22}=5\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

La soluzione cercata è quindi

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 3\,\mathrm{k}\Omega & 1\,\mathrm{k}\Omega \\ 3\,\mathrm{k}\Omega & 5\,\mathrm{k}\Omega \end{pmatrix}$$

Per il secondo punto dell'esercizio, è conveniente sostituire il sottocircuito appena esaminato con la sua rappresentazione tramite matrice $\underline{R}$, come nel circuito qui rappresentato. Per calcolare il circuito equivalente di Thevenin si è connesso alla porta 1 di $\underline{R}$ un generatore di corrente I, e si vuole calcolare la tensione V ai suoi capi.



Indicando con $V_{\underline{R}}^{(1)}$ e $I_{\underline{R}}^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{R}$, e con $V_{\underline{R}}^{(2)}$ e $I_{\underline{R}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, si ha $V_{\underline{R}}^{(1)} = V$ e $I_{\underline{R}}^{(1)} = I$.

Dal bilancio delle correnti al nodo indicato con (1) si ha inoltre

$$(1):\ \beta\, I_{R4} - I_{\underline{R}}^{(2)} - I_{R4} = 0, \qquad I_{R4} = \frac{I_{\underline{R}}^{(2)}}{\beta - 1}$$

Dalla maglia (a) si ha $V_{\underline{R}}^{(2)} = V_{R4}$, per cui

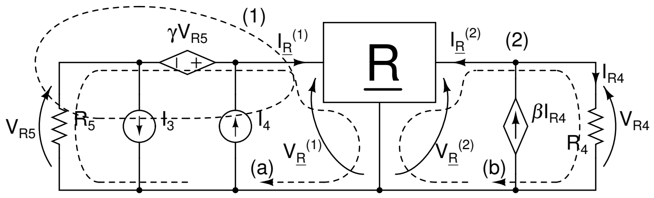
$$(a)\colon\ R_{21}I + R_{22}I_{\underline{R}}^{(2)} - \frac{R_4}{\beta-1}I_{\underline{R}}^{(2)} = 0, \qquad I_{\underline{R}}^{(2)} = -\frac{R_{21}I}{R_{22} - \dfrac{R_4}{\beta-1}} = -\frac{(\beta-1)R_{21}}{(\beta-1)R_{22}-R_4}$$

La tensione V è determinata dalla prima equazione costitutiva di $\underline{R}$, ovvero

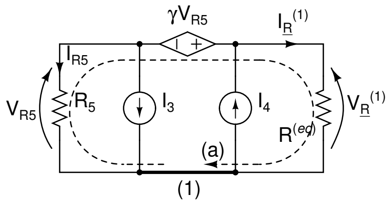
$$V = V_{\underline{R}}^{(1)} = R_{11}I + R_{12}I_{\underline{R}}^{(2)} = \left(\underbrace{R_{11} - \frac{(\beta-1)R_{12}R_{21}}{(\beta-1)R_{22}-R_4}}_{R^{(eq)} = 1\,\mathrm{k}\Omega}\right) I$$

con $V^{(eq)} = 0$.

Nel terzo ed ultimo punto si chiede di calcolare la potenza dissipata dal doppio bipolo $\underline{R}$ calcolato precedentemente, quando connesso come nel circuito sotto riportato.



Il metodo più semplice per risolvere il circuito è quello di considerare, per il doppio bipolo $\underline{R}$ ed il circuito collegato alla porta 2, il circuito equivalente di Thevenin calcolato al punto precedente. In questo modo il calcolo della tensione $V_{\underline{R}}^{(1)}$ e della corrente $I_{\underline{R}}^{(1)}$ alla porta 1 di $\underline{R}$ risulta estremamente semplificato.



Dal bilancio delle tensioni alla maglia indicata con (a) si ha

$$(a)\colon\ V_{R5} + \gamma\, V_{R5} - V_{\underline{R}}^{(1)} = 0, \qquad I_{R5} = \frac{V_{R5}}{R_5} = \frac{V_{\underline{R}}^{(1)}}{(1+\gamma)R_5} = \frac{R^{(eq)}I_{\underline{R}}^{(1)}}{(1+\gamma)R_5}$$

e considerando il bilancio delle correnti al nodo (1) è possibile calcolare $I_{\underline{R}}^{(1)}$ e quindi $V_{\underline{R}}^{(1)}$.

$$(1)\colon\ I_{R5} + I_3 - I_4 + I_{\underline{R}}^{(1)} = 0, \qquad \frac{R^{(eq)}I_{\underline{R}}^{(1)}}{(1+\gamma)R_5} + I_3 - I_4 + I_{\underline{R}}^{(1)} = 0$$

$$I_{\underline{R}}^{(1)} = \frac{I_4 - I_3}{1 + \dfrac{R^{(eq)}}{(1+\gamma)R_5}} = (1+\gamma)\frac{R_5(I_4-I_3)}{(1+\gamma)R_5 + R^{(eq)}} = 0\,\mathrm{A}$$

$$V_{\underline{R}}^{(1)} = R^{(eq)}I_{\underline{R}}^{(1)} = 0\,\mathrm{V}$$

A questo punto considerando il circuito complessivo, per la prima equazione costitutiva di $\underline{R}$ si ha

$$V_{\underline{R}}^{(1)} = R_{11} I_{\underline{R}}^{(1)} + R_{12} I_{\underline{R}}^{(2)}, \qquad I_{\underline{R}}^{(2)} = \frac{V_{\underline{R}}^{(1)}}{R_{12}} - \frac{R_{11}}{R_{12}} I_{\underline{R}}^{(1)} = 0\,\mathrm{A}$$

e, poiché $I_{\underline{R}}^{(1)} = I_{\underline{R}}^{(2)} = 0\,\mathrm{A}$, segue che la potenza $P_{\underline{R}}$ dissipata dal doppio bipolo vale

$$P_{\underline{R}} = 0\,\mathrm{W}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare ugualmente considerando, nel circuito completo, il taglio indicato con (1)

$$(1):\ -I_{R5} - I_3 + I_4 - I_{\underline{R}}^{(1)} = 0, \qquad I_{R5} = I_4 - I_3 - I_{\underline{R}}^{(1)}$$

e il nodo (2)

$$(2):\ -I_{\underline{R}}^{(2)} + \beta I_{R4} - I_{R4} = 0, \qquad I_{R4} = \frac{I_{\underline{R}}^{(2)}}{\beta - 1}$$

assieme alle equazione delle maglie indicate con (a) e (b)

$$(a):\ V_{R5} + \gamma V_{R5} - V_{\underline{R}}^{(1)} = 0, \qquad (\gamma+1) R_5 I_{R5} - V_{\underline{R}}^{(1)} = 0$$

$$(b):\ V_{\underline{R}}^{(2)} - V_{R4} = 0, \qquad V_{\underline{R}}^{(2)} - R_4 I_{R4} = 0$$

che formano il sistema

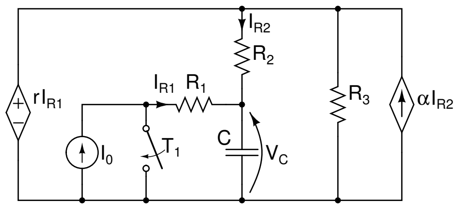
$$\begin{cases} (\gamma+1) R_5 \left(I_4 - I_3 - I_{\underline{R}}^{(1)} \right) - R_{11} I_{\underline{R}}^{(1)} - R_{12} I_{\underline{R}}^{(2)} = 0 \\ R_{21} I_{\underline{R}}^{(1)} + R_{22} I_{\underline{R}}^{(2)} - R_4 \dfrac{I_{\underline{R}}^{(2)}}{\beta - 1} = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è la stessa trovata in precedenza con il metodo semplificato.

$$I_{\underline{R}}^{(1)} = \frac{(\gamma+1) R_5 ((\beta-1) R_{22} - R_4)}{((\beta-1) R_{22} - R_4)((\gamma+1) R_5 + R_{11}) - (\beta-1) R_{12} R_{21}} (I_4 - I_3) = 0\,\mathrm{A}$$

$$I_{\underline{R}}^{(2)} = \frac{(\gamma+1)(\beta-1) R_5 R_{21}}{((\beta-1) R_{22} - R_4)((\gamma+1) R_5 + R_{11}) - (\beta-1) R_{12} R_{21}} (I_3 - I_4) = 0\,\mathrm{A}$$

Esercizio 2

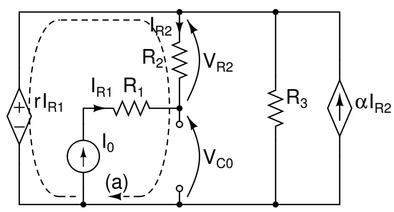


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $r = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 3\,\mu\mathrm{F}$, $\alpha = 2{,}5$, $I_0 = 1\,\mathrm{mA}$.

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T_1 è aperto ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore T_1 si chiude. Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$ ai capi del condensatore.

Soluzione

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T_1 è aperto e, per via dell'ipotesi che il circuito sia a regime, si ha $I_C = 0\,\mathrm{A}$; sia la capacità C che l'interruttore T_1 sono assimilabili a circuiti aperti. Il circuito da considerare è il seguente



Dal circuito è immediato che

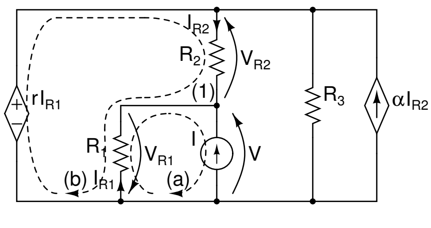
$$I_{R1} = I_0, \qquad I_{R2} = -I_{R1} = -I_0$$

La tensione V_{C0} sulla capacità può essere calcolata dall'equazione di bilancio delle tensioni alla maglia (a)

$$(a):\; r\,I_{R1} - V_{R2} - V_{C0} = 0$$

$$V_{C0} = r\,I_{R1} - V_{R2} = r\,I_{R1} - R_2 I_{R2} = (r + R_2) I_0 = 4\,\mathrm{V}$$

All'istante $t = t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T_1 si chiude e comincia il transitorio di carica (o scarica) di C. Per il calcolo di tale transitorio, si ricorra all'equivalente di Thevenin del circuito connesso alla capacità. Si supponga quindi di sostituire alla capacità un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi. Il circuito da considerare è il seguente, dove il generatore di corrente I_0 è stato omesso in quanto chiuso in corto circuito dall'interruttore T_1, e quindi non influisce su alcuna grandezza elettrica del circuito.



Dalla maglia indicata con (a) si ha che la tensione cercata V è data da

$$(a):\; -V_{R1} - V = 0, \qquad V = -V_{R1} = -R_1 I_{R1}$$

e per ricavare la corrente I_{R1} è necessario considerare il bilancio delle correnti al nodo (1) ed il bilancio delle tensioni alla maglia (b).

$$(1):\; I_{R2} + I_{R1} + I = 0, \qquad I_{R2} = -I_{R1} - I$$

$$(b):\; r\,I_{R1} - V_{R2} + V_{R1} = 0, \qquad r\,I_{R1} + R_2(I_{R1} + I) + R_1 I_{R1} = 0$$

$$I_{R1} = -\frac{R_2\,I}{r + R_1 + R_2}$$

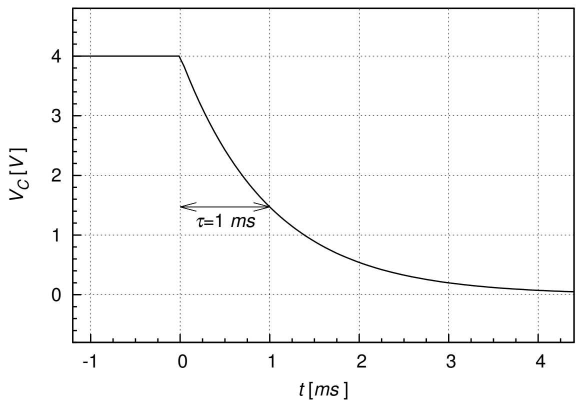
$$V = -R_1 I_{R1} = \frac{R_1 R_2}{r + R_1 + R_2} I$$

Segue che $V^{(eq)} = 0\,\text{V}$ e $R^{(eq)} = \dfrac{R_1 R_2}{r + R_1 + R_2} = \dfrac{1}{3}\,\text{k}\Omega$.

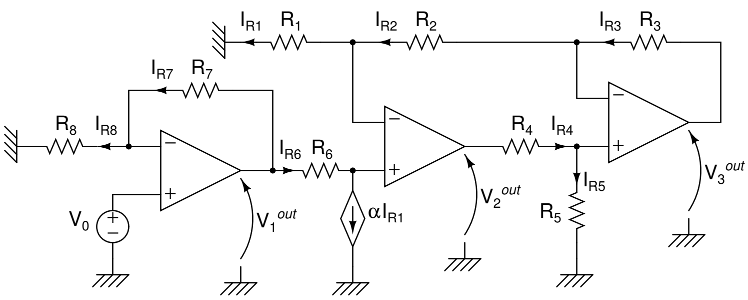
La tensione $V_c(t)$ è data dalla formula del transitorio del primo ordine

$$V_c(t) = \begin{cases} V_{C0} = 4\,\text{V}, & t < t_0 = 0\,\text{s} \\ V^{(eq)} + \left(V_{C0} - V^{(eq)}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = 4\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\text{V}, & t \geq t_0 = 0\,\text{s} \end{cases}$$

con $\tau = R^{(eq)}C = 1\,\text{ms}$. L'andamento della tensione nel tempo è quello dato dalla figura seguente.



Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_8 = 3\,\text{k}\Omega$, $\alpha = 1/3$, $V_0 = 4\,\text{V}$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Determinare le tensioni V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out} di uscita degli amplificatori operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle tensioni e delle correnti come indicato in figura. Si consideri inoltre che per tutti gli amplificatori operazionali la corrente agli ingressi sia nulla e che la tensione ai due ingressi sia uguale per via del corto circuito virtuale.

Per l'operazionale 1, si ha $V_1^+ = V_0$, e quindi $V_{R8} = V_1^- = V_1^+ = V_0$, con

$$I_{R7} = I_{R8} = \frac{V_{R8}}{R_8} = \frac{V_0}{R_8}$$

La tensione di uscita V_1^{out} è data da

$$V_1^{out} = V_1^- + R_7 I_{R7} = V_0 + \frac{R_7}{R_8} V_0 = 8\,\mathrm{V}$$

Per via del fatto che gli ingressi dell'operazione 2 non assorbono corrente, si ha $I_{R6} = \alpha\, I_{R1}$. Inoltre

$$V_2^- = R_1 I_{R1}$$

$$V_2^+ = V_{\alpha\, I_{R1}} = V_1^{out} - R_6 I_{R6} = V_1^{out} - \alpha R_6 I_{R1}$$

La condizione di corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 2 consente di ricavare il valore di I_{R1}

$$V_2^- = V_2^+, \qquad R_1 I_{R1} = V_1^{out} - \alpha R_6 I_{R1}, \qquad I_{R1} = \frac{V_1^{out}}{R_1 + \alpha\, R_6} = 2\,\mathrm{mA}$$

Ora, osservando che $I_{R1} = I_{R2} = I_{R3}$, è possibile determinare V_3^{out}

$$V_3^{out} = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 + \alpha\, R_6} V_1^{out} = 18\,\mathrm{V}$$

Per determinare V_2^{out} invece è necessario considerare la condizione di corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 3

$$V_3^+ = V_3^- = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + \alpha\, R_6} V_1^{out}$$

e, osservando che $I_{R4} = I_{R5} = \dfrac{V_3^+}{R_5}$, si ha

$$V_2^{out} = R_4 I_{R4} + R_5 I_{R5} = (R_4 + R_5)\frac{V_3^+}{R_5} = (R_4 + R_5)\frac{R_1 + R_2}{R_5(R_1 + \alpha\, R_6)} V_1^{out} = 24\,\mathrm{V}$$