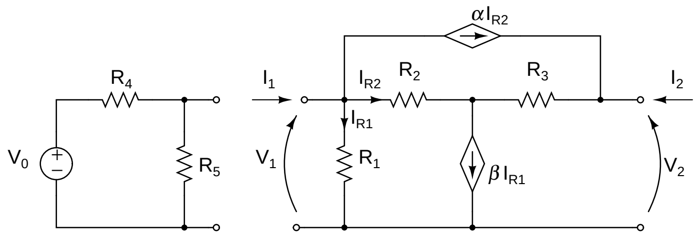
# Esame di Teoria dei Circuiti - 18 luglio 2008 - Soluzione

## Esercizio 1

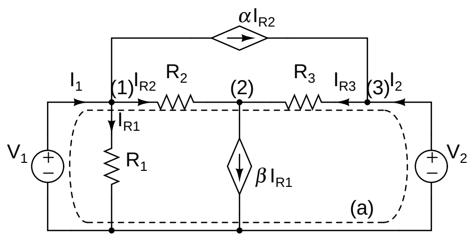



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 3$ kΩ, $R_3 = 2$ kΩ, $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $V_0 = 6$ V, $R_4 = 1$ kΩ, $R_5 = 2$ kΩ. Calcolare:

- la matrice $G$ delle conduttanze del due-porte
- l'equivalente di Thevenin alla porta 2 quando alla porta 1 vengono collegati il generatore ideale di tensione $V_0$ e le due resistenze $R_4$, $R_5$ come indicato in figura.

*Soluzione*

Per trovare la matrice $G$ si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di tensione $V_1$ e $V_2$ e di calcolarne le correnti $I_1$ e $I_2$:




Dal bilancio delle correnti ai nodi (1) e (3) si ha

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{R1} + I_{R2} + \alpha I_{R2} = I_{R1} + (\alpha+1) I_{R2} \\ I_2 &= I_{R3} - \alpha I_{R2} \end{aligned}$$

Per determinare $I_{R1}$, $I_{R2}$ e $I_{R3}$ si può subito notare che $I_{R1} = V_1/R_1$; inoltre dal bilancio delle correnti al nodo (2) e alla maglia ($a$) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} I_{R2} + I_{R3} = \beta I_{R1} \\ V_1 - R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} - V_2 = 0 \end{cases}$$

che risolto in $I_{R2}$ e $I_{R3}$ dà come soluzione

$$I_{R2} = \frac{V_1 - V_2 + \beta\ R_3\ I_{R1}}{R_2 + R_3}$$

$$I_{R3} = \frac{V_2 - V_1 + \beta\ R_2\ I_{R1}}{R_2 + R_3}$$

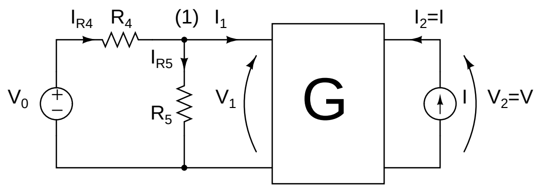
quindi

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{V_1}{R_1} + (\alpha+1)\frac{V_1 - V_2 + \beta\ R_3\ I_{R1}}{R_2+R_3} \\
&= \left(\underbrace{\frac{1}{R_1} + \frac{1+\alpha}{R_2+R_3} + \frac{(1+\alpha)\beta R_3}{R_1(R_2+R_3)}}_{G_{11}}\right) V_1 - \underbrace{\frac{1+\alpha}{R_2+R_3}}_{-G_{12}} V_2 \\
I_2 &= \frac{V_2 - V_1 + \beta\ R_2\ I_{R1}}{R_2+R_3} - \alpha\ \frac{V_1 - V_2 + \beta\ R_3\ I_{R1}}{R_2+R_3} \\
&= -\left(\underbrace{\frac{\alpha+1}{R_2+R_3} + \beta\ \frac{\alpha R_3 - R_2}{R_1(R_2+R_3)}}_{-G_{21}}\right) V_1 + \underbrace{\frac{1+\alpha}{R_2+R_3}}_{G_{22}} V_2
\end{aligned}
$$

Numericamente

$$
G = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}\ \ \Omega^{-1}
$$

Per il secondo punto, per trovare l'equivalente di Thevenin del circuito, si supponga di collegare il generatore ideale di corrente $I$ alla porta due e calcolare la tensione $V$ ai suoi capi:




Dati $I = I_2$ a $V = V_2$ le equazione del due porte risultano:

$$
\begin{cases} I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V \\ I = G_{21}V_1 + G_{22}V \end{cases}
$$

e messe a sistema con l'equazione di bilancio al nodo (1)

$$
I_1 + I_{R5} = I_{R4}
$$

$$
I_1 = \frac{V_0}{R_4} - \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_1
$$

si ottiene dalla prima equazione

$$
\frac{V_0}{R_4} - \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V
$$

$$
\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + G_{11}\right) V_1 = \frac{V_0}{R_4} - G_{12}V
$$

e quindi, sostituendo nella seconda

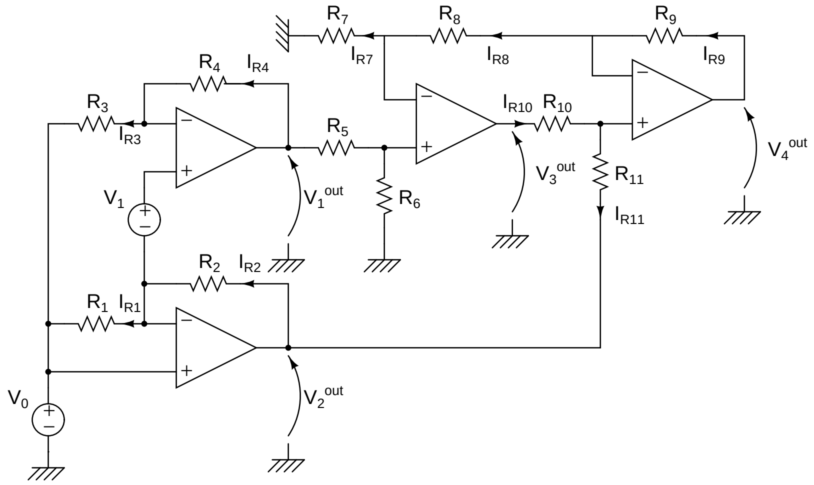
$$
\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + G_{11}\right) I = G_{21}\frac{V_0}{R_4} - G_{21}G_{12}V + G_{22}\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + G_{11}\right) V
$$

$$
V = \underbrace{-\frac{G_{21}V_0}{R_4\left(G_{22}\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + G_{11}\right) - G_{12}G_{21}\right)}}_{V^{eq}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + G_{11}}{G_{22}\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + G_{11}\right) - G_{21}G_{12}}}_{R^{eq}} I
$$

Numericamente

$$
V^{eq} = 4\ \text{V}, \quad R^{eq} = 1.66\ \text{k}\Omega
$$

**Esercizio 2**




Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = R_2 = \ldots = R_{11} = 1$ k$\Omega$, $V_0 = 4$ V, $V_1 = 3$ V. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni di uscita degli operazionali $V_1^{out}$, $V_2^{out}$, $V_3^{out}$, $V_4^{out}$.

*Soluzione*

Dato che gli ingressi degli operazionali non assorbono corrente si può scrivere

$$V_2^+ = V_0 = V_2^-; \quad I_{R1} = \frac{V_2^- - V_0}{R_1} = 0 = I_{R2}$$

quindi $V_2^{out} = V_2^- + R_2 I_{R2} = V_0 = 4$ V.

Per l'operazionale 1 invece si ha

$$V_1^+ = V_2^- + V_0 = V_0 + V_1 = V_2^-; \quad I_{R3} = \frac{V_1^- - V_0}{R_3} = \frac{V_1}{R_3} = I_{R4}$$

quindi $V_1^{out} = V_1^- + R_4 I_{R4} = V_0 + V_1 \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = 10$ V.

Inoltre

$$V_3^+ = V_1^{out} \frac{R_6}{R_5 + R_6} = V_3^-; \quad I_{R7} = \frac{V_3^-}{R_7} = V_1^{out} \frac{R_6}{R_5 + R_6} \frac{1}{R_7} = I_{R8} = I_{R9}$$

quindi

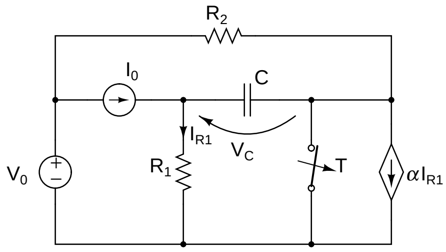
$$V_4^{out} = (R_7 + R_8 + R_9) I_{R7} = V_1^{out} \frac{R_6}{R_5 + R_6} \frac{R_7 + R_8 + R_9}{R_7} = 15 \text{ V}$$

Per determinare $V_3^{out}$ invece

$$V_4^- = V_1^{out} \frac{R_6}{R_5 + R_6} \frac{R_7 + R_8}{R_7} = V_4^+$$

$$I_{R11} = \frac{V_4^+ - V_2^{out}}{R_{11}} = I_{R10}; \quad V_3^{out} = V_4^+ + R_{10} I_{R10} = 16 \text{ V}$$

**Esercizio 3**

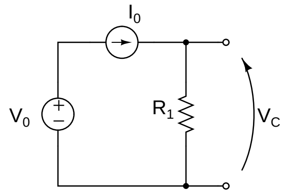



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 4$ k$\Omega$, $R_2 = 2$ k$\Omega$, $\alpha = 2$, $C = 100$ $\mu$F, $V_0 = 1$ V, $I_0 = 1$ mA.

Per $t < t_0 = 0$ sec l'interruttore $T$ è chiuso e il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore si apre. Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$.

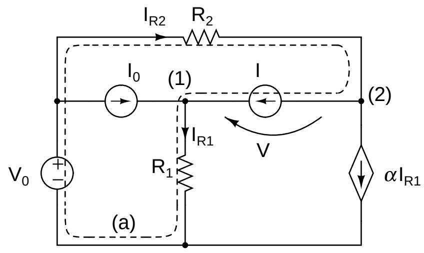
*Soluzione*

Per $t < t_0$ l'interruttore è chiuso, ed essendo tutti i transitori esauriti, è possibile sostituire $C$ con un circuito aperto. Relativamente al calcolo della $V_C$ il circuito si semplifica come da figura:




Risulta immediato $V_{C0} = R_1 I_0 = 4$ V.

All'istante $t = t_0$ l'interruttore si apre. Per calcolare l'equivalente di Thevenin del circuito conneso alla capacità si supponga di sostituire alla capacità stessa un generatore ideale di corrente $I$ e di calcolare la tensione $V$ ai suoi capi:




Dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ha $I_{R1} = I_0 + I$; dal bilancio al nodo (2) invece $I_{R2} = I + \alpha I_{R1} = \alpha I_0 + (\alpha + 1)I$. Per trovare $V$ è sufficiente considerare il bilancio delle tensioni alla maglia $(a)$

$$
\begin{aligned}
V - R_1 I_{R1} + V_0 - R2 I_{R2} &= 0 \\
V \quad &= R_1 I_0 + R_1 I - V_0 + R_2 \alpha I_0 + R_2(\alpha + 1)I \\
&= \underbrace{(R1 + \alpha R_2)\, I_0 - V_0}_{V^{eq}} \quad + \quad \Big(\underbrace{R_1 + (\alpha + 1)R_2}_{R^{eq}}\Big) \quad I
\end{aligned}
$$

Numericamente, $V^{eq} = 7$ V, $R^{eq} = 10$ k$\Omega$ e la costante di tempo $\tau = R^{eq}C = 1$ sec.

La tensione $V_C(t)$ risulta quindi

$$
V_C(t) = \begin{cases} V_{C0} & t \leq 0 \\ V^{eq} + (V_{C0} - V^{eq})e^{-t/\tau} & t > 0 \end{cases}
$$

$$
V_C(t) = \begin{cases} 4 \text{ V} & t \leq 0 \\ 7 - 3e^{-t} \text{ V} & t > 0 \end{cases}
$$