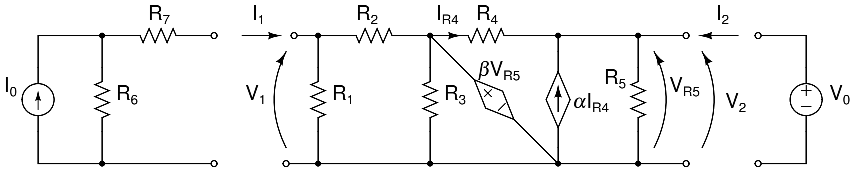
Esame di Teoria dei Circuiti - 2 luglio 2010 (Soluzione)

Esercizio 1



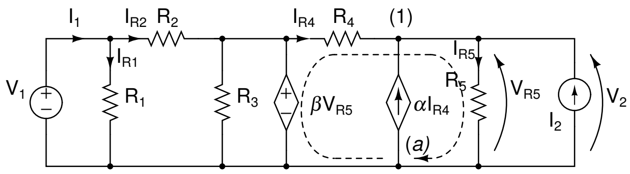
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = R_2 = R_3 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_5 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $V_0 = 3\,\mathrm{V}$, $I_0 = 3\,\mathrm{mA}$, $R_6 = R_7 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,.

Calcolare:

- la descrizione del due porte tramite matrice ibrida $\underline{H}$, definita come $\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \underline{H} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 1 del due porte calcolato al punto precedente, quando alla porta 2 viene collegato il generatore ideale di tensione V_0, come mostrato in figura;
- la potenza P_{V0} e P_{I0} ai capi due generatori ideali V_0 e I_0 quando vengono collegati al due porte i due circuiti formati da V_0, I_0, R_6 e R_7, come mostrato in figura. Si specifichi inoltre se si tratta di potenza erogata o dissipata;
- quale valore dovrebbero avere V_0 e I_0 affinché le due potenze P_{V0} e P_{I0} siano nulle.

Soluzione

Per trovare la matrice ibrida $\underline{H}$ si supponga di collegare al due porte il generatore ideale di tensione V_1 ed il generatore ideale di corrente I_2, e quindi di calcolare la corrente I_1 e la tensione V_2. Si definisca inoltre un verso arbitrario per le correnti I_{R1}, I_{R2} e I_{R5}.



Dal circuito in figura si ricava che

$$I_1 = I_{R1} + I_{R2} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - \beta V_{R5}}{R_2}$$

$$V_2 = V_{R5}$$

Per determinare la matrice $\underline{H}$ è quindi sufficiente determinare la tensione V_{R5}.

Si consideri il sistema costituito dalle equazioni di bilancio delle correnti al nodo (1) e delle tensioni alla maglia (a)

$$(1): \quad I_{R4} + \alpha I_{R4} + I_2 = I_{R5}$$

$$(a): \quad \beta V_{R5} = R_4 I_{R4} + V_{R5}$$

Dalla (a) si ha $I_{R4} = (\beta - 1)V_{R5}/R_4$; inoltre essendo $V_{R5} = R_5 I_{R5}$, sostuendo nella (1) si ottiene

$$(\alpha + 1)(\beta - 1)\frac{V_{R5}}{R_4} + I_2 = \frac{V_{R5}}{R_5}$$

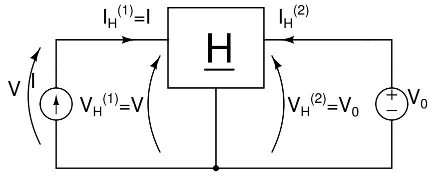
$$V_{R5} = \frac{I_2}{\dfrac{1}{R_5} - \dfrac{(\alpha+1)(\beta-1)}{R_4}} = \frac{R_4 R_5 I_2}{R_4 - R_5(\alpha+1)(\beta-1)}$$

$$I_1 = \underbrace{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}_{H_{11} = 0.5\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} I_1 \underbrace{-\beta \frac{R_4 R_5}{R_2(R_4 - R_5(\alpha+1)(\beta-1))}}_{H_{12} = 0.5} I_2$$

$$V_2 = \underbrace{\frac{R_4 R_5}{R_4 - R_5(\alpha+1)(\beta-1)}}_{H_{22} = -1\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

con $H_{21} = 0$

Per il secondo punto dell'esercizio, si consideri il seguente circuito, dove per calcolare il circuito equivalente di Thevenin si è collegato alla porta 1 un generatore ideale di corrente I



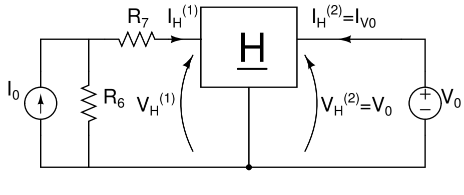
Si indichino con $V_H^{(1)}$ e $I_H^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{H}$, e con $V_H^{(2)}$ e $I_H^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, con $I_H^{(1)} = I$, $V_H^{(1)} = V$ e $V_H^{(2)} = V_0$. Per determinare V è sufficiente considerare le equazioni costitutive del bipolo $\underline{H}$. È possibile semplificare la risoluzione ricordando che $H_{21} = 0$.

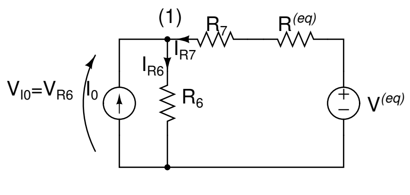
$$I = H_{11} V + H_{12} I_H^{(2)}$$

$$V_0 = H_{22} I_H^{(2)}$$

$$V = \underbrace{-\frac{H_{12}}{H_{11} H_{22}} V_0}_{V^{(eq)} = 3\,\mathrm{V}} + \underbrace{\frac{1}{H_{11}}}_{R^{(eq)} = 2\,\mathrm{k}\Omega} I$$

Per risolvere il punto successivo dell'esercizio, si considerino per semplicità i seguenti circuiti, dove nel circuito di destra il due porte $\underline{H}$ ed il generatore V_0 sono stati sostituiti dal loro circuito equivalente di Thevenin.





Per determinare $P_{V0} = V_0 I_{V0}$ si consideri il circuito di sinistra. Ripetendo lo stesso procedimento eseguito al punto precedente, si arriva a

$$I_H^{(1)} = H_{11} V_H^{(1)} + H_{12} I_{V0}$$

$$V_0 = H_{22} I_{V0}$$

da cui, usando solamente la seconda equazione, si ha

$$P_{V0} = \frac{1}{H_{22}} V_0^2 = -9\,\mathrm{mW}$$

che è negativa. Poiché per determinare P_{V0} si è utilizzata la convenzione del generatore , tale potenza è una potenza passiva, ovvero dissipata dal generatore V_0.

Per determinare P_{I0} risulta invece più conveniente utilizzare il circuito di destra. Dal bilancio al nodo (1) si ha

$$I_0 + I_{R7} = I_{R6}$$

$$I_0 + \frac{V^{(eq)} - V_{I0}}{R_7} = \frac{V_{I0}}{R_6}$$

da cui

$$P_{I0} = V_{I0} I_0 = \frac{I_0 + \dfrac{V^{(eq)}}{R_7 + R^{(eq)}}}{\dfrac{1}{R_6} + \dfrac{1}{R_7 + R^{(eq)}}} I_0 = \frac{I_0 - \dfrac{H_{12}}{H_{22}(H_{11}R_7 + 1)} V_0}{\dfrac{1}{R_6} + \dfrac{H_{11}}{H_{11}R_7 + 1}} I_0 = 9\,\mathrm{mW}$$

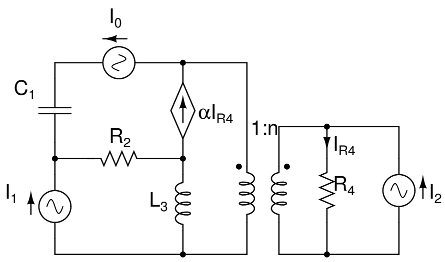
In questo caso di tratta di potenza attiva, ovvero fornita dal generatore al resto del circuito.

L'ultimo punto dell'esercizio chiede di determinare per quali valori di V_0 e I_0 le due potenze calcolate al punto precedente si annullano. Dalle due espressioni trovate al punto precedente, si ricava che $P_{V0} = 0$ se e solo se $V_0 = 0\,\mathrm{V}$. Per annullare P_{I0} invece esistono due soluzioni

$$I_0 = 0\,\mathrm{A}, \quad \frac{I_0}{V_0} = \frac{H_{12}}{H_{22}(H_{11}R_7 + 1)} = 3\,\mathrm{k}\Omega$$

Per annullare contemporaneamente sia P_{V0} che P_{I0} è necessario che $V_0 = 0\,\mathrm{V}$ e $I_0 = 0\,\mathrm{A}$. Alla stessa conclusione si poteva anche arrivare osservando che non vi sono altri generatori indipendenti nel circuito, e dunque annullare sia V_0 che I_0 porta allo spegnimento di tutto il circuito e quindi all'annullamento di tutte le potenze.

Esercizio 2

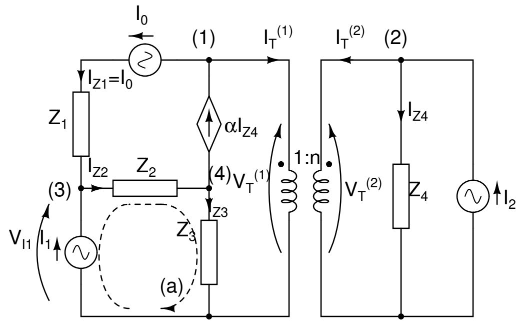


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$\omega = 10\,\mathrm{krad/s}$, $C_1 = 1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}$, $R_2 = 500\,\Omega$, $L_3 = 25\,\mathrm{mH}$, $R_4 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $\alpha = 3$, $n = 4$, $I_0(t) = 8\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4)\mathrm{mA}$, $I_1(t) = 8\cos(\omega t - \pi/2)\mathrm{mA}$, $I_2(t) = 2\cos(\omega t)\mathrm{mA}$.

Calcolare la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore ideale di corrente I_1.

Soluzione

Si consideri il circuito equivalente nel dominio dei fasori:



con

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{1}{j\omega C_1} = -100j\,\Omega \\
Z_2 &= R_2 = 500\,\Omega \\
Z_3 &= j\omega L_3 = 250j\,\Omega \\
Z_4 &= R_4 j = 1\,\mathrm{k}\Omega \\
I_0 &= 8\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}\,\mathrm{mA} = 8\sqrt{2}\frac{1+j}{\sqrt{2}}\,\mathrm{mA} = 8\,\mathrm{mA} + 8j\,\mathrm{mA} \\
I_1 &= 8\,e^{-j\pi/2}\,\mathrm{mA} = -8j\,\mathrm{mA} \\
I_2 &= 2\,e^{0}\,\mathrm{mA} = 2\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

La potenza complessa erogata dal generatore I_1 è data da

$$N_{I1} = \frac{1}{2} V_{I1} I_1^* = P_{I1} + jQ_{I1}$$

dove I_1^* è il complesso coniugato di I_1, in questo caso $I_1^* = 8j\,\mathrm{mA}$. Si determini quindi V_{I1}.

Si noti che il generatore di corrente comandato αI_{R4} è stato sostituito, per motivi di coerenza, dal generatore αI_{Z4}. Inoltre, per via della sua presenza non è possibile semplificare il circuito mediante sostituzione del trasformatore e di uno dei due circuiti ad esso connesso con l'equivalente di Thevenin. Pertanto è necessario procedere con l'analisi circuitale classica, considerando tra le varie equazioni del circuito anche quella del trasformatore:

$$
\begin{cases}
V_T^{(2)} = nV_T^{(1)} \\
I_T^{(1)} = -nI_T^{(2)}
\end{cases}
$$

Considerando le equazioni di bilancio ai nodi (1) e (2)

$$
\begin{aligned}
(1):&\quad \alpha I_{Z4} = I_0 + I_T^{(1)} \\
(2):&\quad I_2 = I_{Z4} + I_T^{(2)}
\end{aligned}
$$

assieme alle equazioni del trasformatore, si ricava I_{Z4}

$$\alpha I_{Z4} = I_0 + I_T^{(1)} = I_0 - nI_T^{(2)} = I_0 - nI_2 + nI_{Z4}$$

$$I_{Z4} = \frac{nI_2 - I_0}{n - \alpha} = -8j\,\mathrm{mA}$$

Ora per determinare V_{I1} si consideri il bilancio delle tensioni alla maglia (a)

$$V_{I1} = Z_2 I_{Z2} + Z_3 I_{Z3}$$

dove I_{Z2} e I_{Z3} si possono calcolare dal bilancio delle correnti, rispettivamente, ai nodi indicati con (3) e (4):

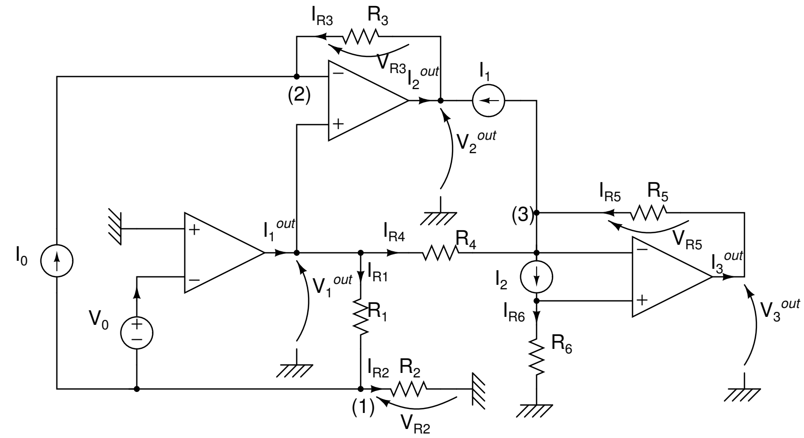
$$I_{Z2} = I_1 + I_0$$

$$I_{Z3} = I_{Z2} - \alpha I_{Z4} = I_1 + I_0 - \alpha I_{Z4}$$

$$V_{I1} = (Z_2 + Z_3)(I_1 + I_0) - \alpha Z_3 I_{Z4} = -2\,\mathrm{V} + 2j\,\mathrm{V}$$

da cui $N_{I1} = -8\,\mathrm{mW} - 8\,\mathrm{mVAr}$, con $P_{I1} = -8\,\mathrm{mW}$ e $Q_{I1} = -8\,\mathrm{mVAr}$

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = R_2 = \ldots = R_6 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $I_0 = 2\,\mathrm{mA}$, $I_1 = I_2 = 1\,\mathrm{mA}$, $V_0 = 2.5\,\mathrm{V}$. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni di uscita V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out} e le correnti di uscita I_1^{out}, I_2^{out} e I_3^{out} degli amplificatori operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti e delle tensioni come indicati in figura. Per il corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 1, si ha

$$V_1^- = V_1^+ = 0$$

da cui $V_{R2} = -V_0$, $I_{R2} = -V_0/R_2$. Dato che per ipotesi gli ingressi degli operazionali non assorbono corrente, si ha $I_{V0} = 0$. Inoltre, dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ha

$$I_{R1} = I_{R2} + I_{V0} + I_0 = -\frac{V_0}{R_2} + I_0$$

$$V_1^{out} = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} = -\frac{R_1}{R_2} V_0 + R_1 I_0 - V_0 = 1\,\mathrm{V}$$

Per la corrente di uscita, $I_1^{out} = I_{R1} + I_{R4}$ verrà calcolata in un secondo momento.

Per il corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 2, si ha

$$V_2^- = V_2^+ = V_1^{out}$$

Inoltre (bilancio delle correnti al nodo indicato con (2)) $I_{R3} = -I_0$, da cui

$$V_2^{out} = V_2^- + R_3 I_{R3} = V_1^{out} - R_3 I_0 = -5\,\mathrm{V}$$

$$I_2^{out} = I_{R3} - I_1 = -I_0 - I_1 = -3\,\mathrm{mA}$$

Per il corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 3

$$V_3^- = V_3^+ = R_6 I_2$$

$$I_{R4} = \frac{V_1^{out} - V_3^-}{R_4} = \frac{V_1^{out}}{R_4} - \frac{R_6}{R_4} I_2$$

che permette di calcolare I_1^{out}

$$I_1^{out} = -\frac{V_0}{R_2} + I_0 + \frac{V_1^{out}}{R_4} - \frac{R_6}{R_4} I_2 = 0.5\,\mathrm{mA}$$

Per risolvere l'operazionale 3, si consideri il bilancio delle correnti al nodo (3)

$$I_{R4} + I_{R5} = I_1 + I_2$$

$$I_3^{out} = I_{R5} = I_1 + I_2 - \frac{V_1^{out}}{R_4} + \frac{R_6}{R_4} I_2 = 2.66\,\mathrm{mA}$$

$$V_3^{out} = V_3^- + R_5 I_{R5} = R_6 I_2 + R_5 I_3^{out} = 11\,\mathrm{V}$$