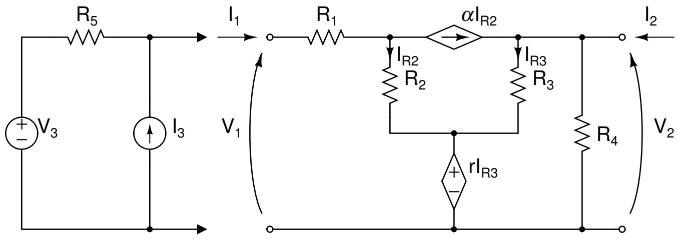
Esame di Teoria dei Circuiti – 20 Gennaio 2011 (Soluzione)

Esercizio 1



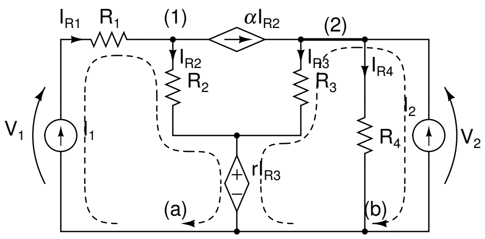
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 6\,\mathrm{k\Omega}$, $r = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 1/2$, $R_5 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $V_3 = 10\,\mathrm{V}$, $I_3 = 5\,\mathrm{mA}$.

Determinare:

- la descrizione del due porte in figura tramite matrice resistenza $\underline{R}$. È possibile ottenere la stessa matrice $\underline{R}$ con un circuito formato da sole tre resistenze?
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 2 del due porte $\underline{R}$ calcolato al punto precedente, quando alla porta 1 vengono collegati i generatori ideali V_3 ed I_3 e la resistenza R_5, come mostrato in figura;
- la potenza $P_{\underline{R}}$ dissipata dal due porte $\underline{R}$, quando alla porta 1 vengono collegati V_3, I_3 e R_5 (come nel caso precedente) e la porta 2 viene chiusa in corto circuito;
- quale valore dovrebbe avere V_3 affinché la potenza calcolata al punto precedente sia nulla.

Soluzione

Per trovare la matrice delle resistenze $\underline{R}$ si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di corrente I_1 e I_2, e quindi di calcolarne le tensioni V_1 e V_2 ai loro capi. Si definisca inoltre un verso arbitrario per le correnti I_{R1} e I_{R4}.



Dal circuito in figura si posso esprimere le due correnti I_{R1} e I_{R4} come $I_{R1} = I_1$ e $I_{R4} = V_2/R_4$. Inoltre dal bilancio delle correnti al nodo (1) è possibile ricavare I_{R2}

$$I_{R1} = I_{R2} + \alpha I_{R2}, \quad I_{R2} = \frac{1}{1+\alpha} I_{R1} = \frac{1}{1+\alpha} I_1$$

Dalla conoscenza di I_{R2}, e considerando il bilancio delle correnti al nodo (2) e delle tensioni alla maglia (b), è possibile ricavare V_2

$$(2): \quad \alpha I_{R2} + I_2 = I_{R3} + I_{R4}, \quad I_{R3} = \alpha I_{R2} + I_2 - I_{R4} = \frac{\alpha}{1+\alpha} I_1 + I_2 - \frac{1}{R_4} V_2$$

$$(b): \quad r I_{R3} + R_3 I_{R3} = V_2$$

$$\frac{1}{r+R_3}V_2 = I_{R3} = \frac{\alpha}{1+\alpha}I_1 + I_2 - \frac{1}{R_4}V_2$$

da cui

$$V_2 = \underbrace{\frac{\frac{\alpha}{1+\alpha}}{\frac{1}{r+R_3}+\frac{1}{R_4}}}_{R_{21}=1\,\mathrm{k}\Omega} I_1 + \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{r+R_3}+\frac{1}{R_4}}}_{R_{22}=3\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

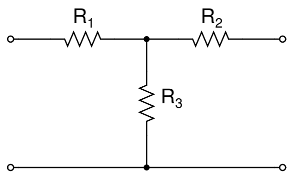
La tensione V_1 si può ricavare dal bilancio delle tensioni alla maglia (a)

$$(a): \quad V_1 = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + r I_{R3}$$

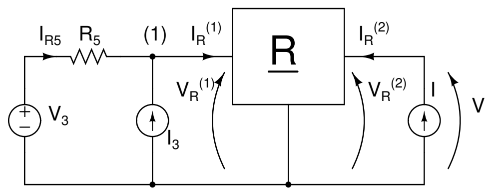
$$V_1 = R_1 I_1 + \frac{1}{1+\alpha}R_2 I_1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}rI_1 + rI_2 - \frac{r}{R_4}V_2 =$$

$$= \underbrace{\left(R_1 + \frac{1}{1+\alpha}R_2 + \frac{\alpha}{1+\alpha}r - \frac{r}{R_4}\frac{\frac{\alpha}{1+\alpha}}{\frac{1}{r+R_3}+\frac{1}{R_4}} \right)}_{R_{11}=3\,\mathrm{k}\Omega} I_1 + \underbrace{\left(r - \frac{r}{R_4}\frac{1}{\frac{1}{r+R_3}+\frac{1}{R_4}} \right)}_{R_{12}=1\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

La matrice risultante è quindi $\underline{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ kΩ, che può essere facilmente ottenuta tramite il seguente circuito contenente tre sole resistenze, in cui $R_1 = R_2 = 2\,\mathrm{k}\Omega$ e $R_3 = 1\,\mathrm{k}\Omega$.



Per il secondo punto dell'esercizio, è necessario connettere al due porte calcolato in precedenza il circuito formato da V_3, I_3 e R_5, e calcolare l'equivalente di Thevenin del circuito complessivo. Si consideri il seguente schema, dove per calcolare il circuito equivalente di Thevenin si è collegato alla porta 2 di $\underline{R}$ un generatore ideale di corrente I



Si indichino con $V_R^{(1)}$ e $I_R^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{R}$, e con $V_R^{(2)}$ e $I_R^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, con $V_R^{(2)} = V$ e $I_R^{(2)} = I$. Dalla seconda delle equazioni costitutive di $\underline{R}$ si ha $V = V_R^{(2)} = R_{21}I_R^{(1)} + R_{22}I_R^{(2)} = R_{21}I_R^{(1)} + R_{22}I$. Si determini quindi $I_R^{(1)}$.

Si consideri

$$I_{R5} = \frac{V_3 - V_R^{(1)}}{R_5} = \frac{V_3 - R_{11}I_R^{(1)} + R_{12}I}{R_5}$$

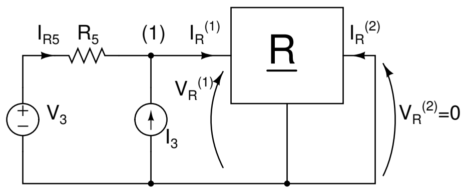
che sostituito nell'equazione di bilancio delle tensioni al nodo (1) permette di trovare $I_R^{(1)}$ e quindi anche V.

$$(1): \quad I_{R5} + I_3 = I_R^{(1)}, \qquad \frac{V_3 - R_{11}I_R^{(1)} - R_{12}I}{R_5} + I_3 = I_R^{(1)}$$

$$I_R^{(1)} = \frac{V_3 + R_5 I_3 - R_{12} I}{R_{11} + R_5}$$

$$V = R_{21} I_R^{(1)} + R_{22} I = \underbrace{R_{21}\frac{V_3 + R_5 I_3}{R_{11} + R_5}}_{V^{(eq)} = 4\,\mathrm{V}} + \left(\underbrace{R_{22} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{11} + R_5}}_{R^{(eq)} = 2.8\,\mathrm{k\Omega}}\right) I$$

Il punto successivo dell'esercizio chiede di calcolare la potenza di $\underline{R}$ quando, nello stesso circuito del punto precedente, la porta 2 viene cortocircuitata. Il circuito da considerare è il seguente.



La potenza dissipata da $\underline{R}$ è data da

$$P_{\underline{R}} = V_R^{(1)} I_R^{(1)} + V_R^{(2)} I_R^{(2)} = V_R^{(1)} I_R^{(1)} = R_{11}\left(I_R^{(1)}\right)^2 + R_{12} I_R^{(1)} I_R^{(2)}$$

essendo $V_R^{(2)} = 0$. Si calcolino quindi $I_R^{(1)}$ e $I_R^{(2)}$.

Dalla seconda delle equazioni costitutive di $\underline{R}$ si ha

$$V_R^{(2)} = R_{21} I_R^{(1)} + R_{22} I_R^{(2)} = 0, \quad I_R^{(2)} = -\frac{R_{21}}{R_{22}} I_R^{(1)}$$

Inoltre, considerando l'espressione per I_{R5} trovata nel caso precedente, dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ha

$$(1): \quad \frac{V_3 - R_{11} I_R^{(1)} - R_{12} I_R^{(2)}}{R_5} + I_3 = I_R^{(1)}, \quad \frac{V_3 - R_{11} I_R^{(1)} + \dfrac{R_{12}R_{21}}{R_{22}} I_R^{(1)}}{R_5} + I_3 = I_R^{(1)},$$

$$I_{R1} = \frac{\dfrac{V_3}{R_5} + I_3}{1 + \dfrac{R_{11}}{R_5} - \dfrac{R_{12}R_{21}}{R_5 R_{22}}} = R_{22}\frac{V_3 + R_5 I_3}{R_5 R_{22} + R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}}$$

da cui

$$P_{\underline{R}} = \left(R_{11} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{22}}\right)\left(I_R^{(1)}\right)^2 =$$

$$= \left(R_{11} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{22}}\right)\left(R_{22}\frac{V_3 + R_5 I_3}{R_5 R_{22} + R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}}\right)^2 = \frac{2400}{49}\,\mathrm{mW} \simeq 48.98\,\mathrm{mW}$$

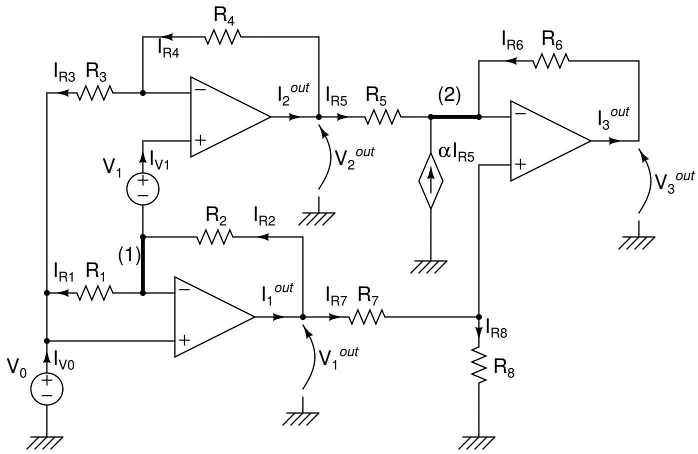
Per annullare la potenza $P_{\underline{R}}$ è necessario imporre uguale a zero il numeratore dell'espressione appena trovata, ovvero

$$\left(R_{11} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{22}}\right)\left(R_{22}\frac{V_3 + R_5 I_3}{R_5 R_{22} + R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}}\right)^2 = 0$$

È intuitivo che la soluzione cercata è

$$V_3 + R_5 I + 3 = 0, \quad V_3 = -R_5 I_3 = -10\,\mathrm{V}$$

Esercizio 2



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_8 = 2.5\,\mathrm{k}\Omega$, $\alpha = 2/3$, $V_0 = 5\,\mathrm{V}$, $V_1 = 2.5\,\mathrm{V}$.

Supponendo che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno, calcolare:

- le tensioni V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out} e le correnti I_1^{out}, I_2^{out} e I_3^{out} di uscita degli amplificatori operazionali;
- la regione di funzionamento (generatore o utilizzatore) di V_0 e V_1.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti come indicati in figura.

Per il corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 1, si ha

$$V_1^- = V_1^+ = V_0$$

da cui $I_{R1} = 0$. Inoltre, per via del fatto che gli ingressi degli amplificatori operazioni non assorbono corrente, $I_{V1} = 0\,\mathrm{mA}$. Dal bilancio al nodo (1)

$$(1): \quad I_{R2} = I_{R1} + I_{V1} = 0\,\mathrm{mA}$$

$$V_1^{out} = V_1^- + R_2 I_{R2} = V_0 = 5\,\mathrm{V}$$

e, dato che $I_{R7} = I_{R8}$, si ha anche

$$I_1^{out} = I_{R2} + I_{R7} = I_{R7} = \frac{V_0}{R_7 + R_8} = 1\,\mathrm{mA}$$

Per quanto riguarda l'amplificatore operazionale 2, si ha

$$V_2^- = V_2^+ = V_1^- + V_1 = V_0 + V_1$$

$$I_{R4} = I_{R3} = \frac{V_1^- - V_0}{R_3} = \frac{V_1}{R_3}$$

$$V_2^{out} = V_2^- + R_4 I_{R4} = V_0 + V_1 + \frac{R_4}{R_3} V_1 = 10\,\mathrm{V}$$

Per trovare la corrente I_2^{out} è necessario utilizzare la condizione di corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 3

$$V_3^- = V_3^+ = R_8 I_{R8} = \frac{R_8}{R_7 + R_8} V_0$$

$$I_{R5} = \frac{V_2^{out} - V_3^-}{R_5} = \frac{V_0 + V_1 + \dfrac{R_4}{R_3}V_1 - \dfrac{R_8}{R_7 + R_8}V_0}{R_5} = 3\,\text{mA}$$

$$I_2^{out} = I_{R4} + I_{R5} = 4\,\text{mA}$$

Per risolvere l'operazionale 3 si deve considerare il bilancio delle correnti al nodo (2)

$$(2): \quad I_{R5} + \alpha I_{R5} + I_{R6} = 0, \quad I_{R6} = -(1+\alpha)I_{R5}$$

da cui

$$V_3^{out} = V_3^- + R_6 I_{R6} = \frac{R_8}{R_7 + R_8}V_0 - (1+\alpha)R_6 I_{R5} = -10\,\text{V}$$

$$I_3^{out} = I_{R6} = -(1+\alpha)I_{R5} = -5\,\text{mA}$$

Nel secondo punto si chiede di determinare la regione di funzionamento dei due generatore di tensioni, ovvero se la loro potenza risulta positiva (funzionamento da generatore) oppure negativa (funzionamento da utilizzatore).

Per quanto riguarda V_1 è già stato osservato $I_{V1} = 0\,\text{mA}$, e quindi

$$P_{V1} = V_1 I_{V1} = 0\,\text{mW}$$

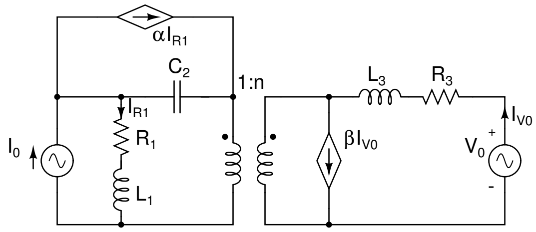
ovvero V_1 è in equilibrio energetico con il circuito (non cede né assorbe potenza). Per quanto riguarda V_0 la sua corrente risulta

$$I_{V0} = -I_{R1} - I_{R3} = -\frac{V_1}{R_3} = -1\,\text{mA}$$

$$P_{V0} = V_0 I_{V0} = -5\,\text{mW} < 0$$

ovvero V_1 sta funzionando come utilizzatore, assorbendo potenza dal resto del circuito.

Esercizio 3

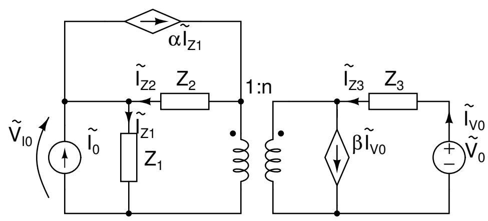


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$ $L_1 = 125\,\mathrm{mH}$, $C_2 = 100\,\mathrm{nF}$, $R_3 = 4\,\mathrm{k}\Omega$ $L_3 = 400\,\mathrm{mH}$, $\alpha = 1/4$, $\beta = 3/4$, $n = 4$, $V_0(t) = 16\sqrt{2}\cos(\omega t + 3\pi/4)$ V, $I_0(t) = 4\cos(\omega t + \pi/2)$ mA, $\omega = 10\,\mathrm{krad/s}$.

Determinare la potenza complessa erogata dai generatori ideali V_0 e I_0.

Soluzione

Si consideri il circuito equivalente nel dominio dei fasori. Si sostituisca inoltre il generatore di corrente comandato αI_{R1}, per motivi di coerenza, con il generatore $\alpha\tilde{I}_{Z1}$.



con

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = (1 + 1.25j)\,\mathrm{k}\Omega$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2} = -1\,j\,\mathrm{k}\Omega$$

$$Z_3 = R_3 + j\omega L_3 = (4 + 4j)\,\mathrm{k}\Omega$$

$$\tilde{V}_0 = 16\sqrt{2}\,e^{j3\pi/4}\,\mathrm{V} = 16\sqrt{2}\frac{-1+j}{\sqrt{2}}\,\mathrm{V} = (-16 + 16j)\,\mathrm{V}$$

$$\tilde{I}_0 = 4\,e^{j\pi/2}\,\mathrm{mA} = 4j\,\mathrm{mA}$$

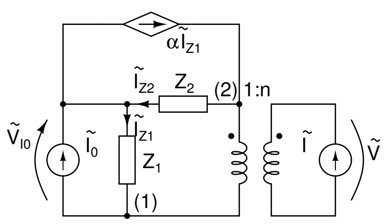
La potenze complesse cercate sono date da

$$N_{I0} = \frac{1}{2}\tilde{V}_{I0}\tilde{I}_0^* = P_{I0} + jQ_{I0}$$

$$N_{V0} = \frac{1}{2}\tilde{V}_0\tilde{I}_{V0}^* = P_{V0} + jQ_{V0}$$

dove $\tilde{I}_0^*$ e $\tilde{I}_{V0}^*$ sono rispettivamente il complesso coniugato di $\tilde{I}_0$ e di $\tilde{I}_{V0}$. Si determinino quindi $\tilde{V}_{I0}$ e $\tilde{I}_{V0}$.

Per semplificare la risoluzione circuitale, si consideri il circuito equivalente di Thevenin del circuito a destra del trasformatore, trasformatore compreso, collegando un generatore di corrente $\tilde{I}$ e calcolandone la tensione $\tilde{V}$ ai suoi capi.



Dalle equazioni del trasformatore, si ha

$$\tilde{I}_T^{(1)} = -n\tilde{I}_T^{(2)} = -n\tilde{I}$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_T^{(2)} = n\tilde{V}_T^{(1)} = n\left(Z_1\tilde{I}_{Z1} + Z_2\tilde{I}_{Z2}\right)$$

Le due correnti $\tilde{I}_{Z1}$ e $\tilde{I}_{Z2}$ si possono ricavare, rispettivamente, dal bilancio delle correnti ai nodi (1) e (2).

$$(1): \quad \tilde{I}_{Z1} + \tilde{I}_T^{(2)} = \tilde{I}_0, \quad \tilde{I}_{Z1} = \tilde{I}_0 + n\tilde{I}$$

$$(2): \quad \alpha\tilde{I}_{Z1} = \tilde{I}_{Z2} + \tilde{I}_T^{(2)}, \quad \tilde{I}_{Z2} = \alpha\tilde{I}_{Z1} + n\tilde{I} = \alpha\tilde{I}_0 + n(1+\alpha)\tilde{I}$$

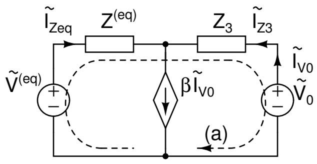
da cui

$$\tilde{V} = \underbrace{n\left(Z_1 + \alpha Z_2\right)\tilde{I}_0}_{\tilde{V}^{(eq)}} + \underbrace{n^2\left(Z_1 + (1+\alpha)Z_2\right)}_{\tilde{Z}^{(eq)}}\tilde{I}$$

con

$$\tilde{V}^{(eq)} = (-16 + 16j)\,\mathrm{V}, \quad \tilde{Z}^{(eq)} = 16j\,\mathrm{k}\Omega$$

Si consideri ora il circuito semplificato, usando il circuito equivalente di Thevenin appena calcolato.



con $\tilde{I}_{Z3} = \tilde{I}_{V0}$ Dal bilancio delle correnti al nodo (1)

$$(1): \quad \tilde{I}_{V0} + \tilde{I}_{Zeq} = \beta\tilde{I}_{V0}, \quad \tilde{I}_{Zeq} = -(1-\beta)\tilde{I}_{V0}$$

che sostituita nel bilancio delle tensioni alla maglia (a) permette di trovare $\tilde{I}_{V0}$

$$(a): \quad \tilde{V}^{(eq)} + Z_3\tilde{I}_{V0} = Z^{(eq)}\tilde{I}_{Zeq} + \tilde{V}_0$$

$$\tilde{V}^{(eq)} + Z_3\tilde{I}_{V0} = -(1-\beta)Z^{(eq)}\tilde{I}_{V0} + \tilde{V}_0$$

$$\tilde{I}_{V0} = \frac{\tilde{V}_0 - \tilde{V}^{(eq)}}{Z_3 + (1-\beta)Z^{(eq)}} = 0\,\mathrm{mA}$$

da cui $N_{V0} = 0\,\mathrm{mVA}$. Segue che

$$P_{V0} = 0\,\mathrm{mW}, \quad Q_{V0} = 0\,\mathrm{mVAR},$$

Per determinare la potenza N_{I0}, si deve considerare l'intero circuito di partenza; è possibile tuttavia semplificarne la risoluzione avendo già calcolato $I_{V0} = 0\,\mathrm{mA}$. Infatti la corrente del trasformatore è data da

$$\tilde{I}_T^{(1)} = -n\tilde{I}_T^{(2)} = n\tilde{I}_{Zeq} = -n(1-\beta)\tilde{I}_{V0} = 0\,\mathrm{mA}$$

mentre la corrente $\tilde{I}_{Z1}$ è data da

$$\tilde{I}_{Z1} = \tilde{I}_0 - \tilde{I}_T^{(1)} = \tilde{I}_0$$

$$\tilde{V}_{I0} = Z_1\tilde{I}_{Z1} = Z_1\tilde{I}_0$$

$$N_{I0} = \frac{1}{2}\tilde{V}_{I0}\tilde{I}_0^* = \frac{1}{2}Z_1\tilde{I}_0\tilde{I}_0^* = (8 + 10j)\,\mathrm{mVA}$$

da cui $P_{I0} = 8\,\mathrm{mW}$ e $Q_{I0} = 10\,\mathrm{mVAR}$.