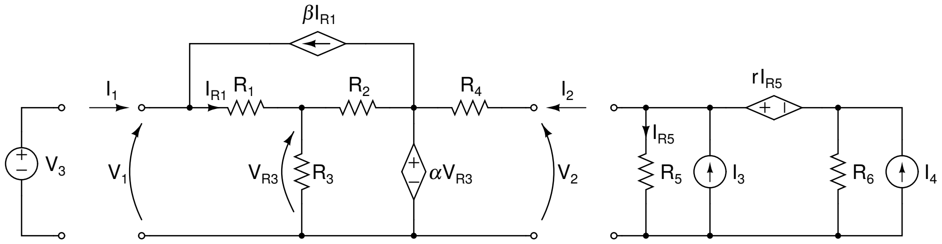
Esame di Teoria dei Circuiti – 22 Dicembre 2011 (Soluzione)

Esercizio 1



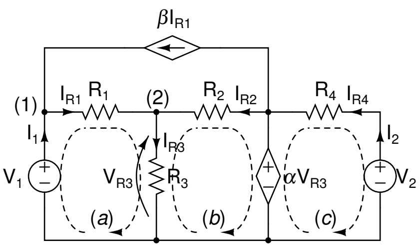
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 2\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_4 = 3\,\text{k}\Omega$, $R_5 = 4\,\text{k}\Omega$, $R_6 = 3{,}5\,\text{k}\Omega$, $r = 3\,\text{k}\Omega$, $\alpha = 3$, $\beta = 1/2$, $I_3 = 3\,\text{mA}$, $I_4 = 2\,\text{mA}$.

Determinare:

- la descrizione del doppio bipolo in figura tramite matrice delle conduttanze $\underline{G}$;
- si supponga di collegare alla porta 1 del doppio bipolo $\underline{G}$ calcolato al punto precedente il generatore ideale di tensione V_3, e alla porta 2 i generatori I_3, I_4 e $r\,I_{R5}$ e le resistenze R_5 e R_6 come mostrato in figura. Quale valore deve avere V_3 affinché la potenza dissipata dalla resistenza R_6 sia $P_{R6} = 0\,\text{W}$?
- nelle stesse ipotesi del punto precedente, come cambierebbe la soluzione dell'esercizio assumendo $r = R_5 = 4\,\text{k}\Omega$?
- nelle stesse ipotesi del punto 2, e assumendo per V_3 un valore di tensione pari a quello calcolato, determinare la potenza $P_{\underline{G}}$ dissipata dal doppio bipolo $\underline{G}$.

Soluzione

Per determinare la descrizione del sottocircuito in esame tramite matrice conduttanza $\underline{G}$ si supponga di collegare alle due porte rispettivamente i due generatori ideali di tensione V_1 e V_2, e quindi di calcolarne la corrente I_1 e I_2.



Dalla figura si noti che $I_2 = I_{R4}$; inoltre dal bilancio di corrente al nodo (1) si ha

$$I_1 + \beta I_{R1} = I_{R1}, \quad I_1 = (1-\beta)\, I_{R1}$$

Si determinino quindi I_{R1} e I_{R4}.

Prendendo V_{R3} come incognita, è possibile dai bilanci alle maglie esprimere le correnti delle resistenze in funziona di essa:

$$(a): \; V_1 = V_{R1} + V_{R3}, \quad I_{R1} = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_{R3}}{R_1}$$

$$(b): \; V_{R3} + V_{R2} = \alpha V_{R3}, \quad I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2} = (\alpha - 1)\,\frac{V_{R3}}{R_2}$$

$$(c): \; \alpha V_{R3} + V_{R4} = V_2, \quad I_{R4} = \frac{V_{R4}}{R_4} = \frac{V_2}{R_4} - \alpha\frac{V_{R3}}{R_4}$$

Considerando inoltre $I_{R3} = V_{R3}/R_3$, il circuito è risolto dal bilancio delle correnti al nodo (2):

$$(2): \; I_{R1} + I_{R2} = I_{R3}, \quad \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_{R3}}{R_1} + (\alpha - 1)\frac{V_{R3}}{R_2} = \frac{V_{R3}}{R_3}$$

$$V_{R3} = \frac{\dfrac{V_1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1-\alpha}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$$

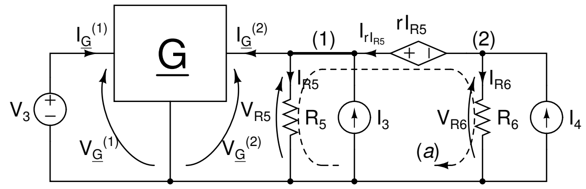
da cui

$$I_1 = (1-\beta)\left(\frac{V_1}{R_1} - \frac{V_{R3}}{R_1}\right) = \underbrace{\frac{1-\beta}{R_1}\left(1 - \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1-\alpha}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}\right)}_{G_{11} = 1/2\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_1$$

con $G_{12} = 0$.

$$I_2 = I_{R4} = \frac{V_2}{R4} - \alpha\frac{V_{R3}}{R4} = \underbrace{-\frac{\alpha}{R_4}\frac{\dfrac{1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1-\alpha}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}}_{G_{21} = 1\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_1 + \underbrace{\frac{1}{R_4}}_{G_{22} = 1/3\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_2$$

Per il secondo punto dell'esercizio, il circuito da esaminare diventa il seguente.



Si chiede di determinare quale valore deve avere V_3 affinché la potenza dissipata su R_6 sia $P_{R6} = 0\,\mathrm{W}$.

Indicando con $V_{\underline{G}}^{(1)}$ e $I_{\underline{G}}^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{G}$, e con $V_{\underline{G}}^{(2)}$ e $I_{\underline{G}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, con $V_{\underline{G}}^{(1)} = V_3$ e $V_{\underline{G}}^{(2)} = V_{R5}$, dalla seconda equazione costitutiva di $\underline{G}$ si ha

$$I_{\underline{G}}^{(2)} = G_{21}V_{\underline{G}}^{(1)} + G_{22}V_{\underline{G}}^{(2)} = G_{21}V_3 + G_{22}V_{R5} = G_{21}V_3 + G_{22}R_5I_{R5}$$

La relazione tra $V_{R5} = R_5\,I_{R5}$ e $V_{R6} = R_6\,I_{R6}$ è data dalla maglia (a)

$$(a): \; R_5\,I_{R5} = r\,I_{R5} + R_6\,I_{R6}, \quad I_{R5} = \frac{R_6}{R_5 - r}I_{R6}$$

Il circuito è risolto considerando il bilancio delle correnti ai nodi (1) e (2).

$$(1): \; I_3 + I_{rI_{R5}} = I_{R5} + I_{\underline{G}}^{(2)}$$
$$(2): \; I_4 = I_{R6} + I_{rI_{R5}}$$
$$(1)+(2): \; I_3 + I_4 + \cancel{I_{rI_{R5}}} = I_{R5} + I_{\underline{G}}^{(2)} + I_{R6} + \cancel{I_{rI_{R5}}}$$

$$I_3 + I_4 = \frac{R_6}{R_5 - r}I_{R6} + G_{21}V_3 + G_{22}\frac{R_5R_6}{R_5 - r}I_{R6} + I_{R6}$$

$$I_{R6} = \frac{I_3 + I_4 - G_{21}V_3}{1 + \dfrac{R_6}{R_5 - r} + G_{22}\dfrac{R_5 R_6}{R_5 - r}} = (R_5 - r)\,\frac{I_3 + I_4 - G_{21}V_3}{R_5 - r + R_6 + G_{22}R_5R_6}$$

$$P_{R6} = R_6\,(I_{R6})^2 = R_6\,(R_5 - r)^2\,\frac{(I_3 + I_4 - G_{21}V_3)^2}{(R_5 - r + R_6 + G_{22}R_5R_6)^2}$$

Affinché $P_{R6} = 0$, è necessario che $I_3 + I_4 - G_{21}V_3 = 0$, ovvero

$$V_3 = \frac{I_3 + I_4}{G_{21}} = 5\,\mathrm{V}$$

Una soluzione alternativa è risolvere il circuito partendo dall'ipotesi che $P_{R6} = 0\,\mathrm{W}$, ovvero $I_{R6} = 0\,\mathrm{A}$ e $V_{R6} = 0\,\mathrm{V}$. Dal bilancio alla maglia (a) si ha

$$V_{R5} = 0\,\mathrm{V}, \quad I_{R5} = 0\,\mathrm{A}$$

e dal bilancio ai nodi (1)+(2) resta solo

$$I_{\underline{G}}^{(2)} = I_3 + I_4$$

Ora considerando la seconda delle equazioni costitutive del due porte $\underline{G}$ si ricava l'unico valore di V_3 compatibile con l ipotesi che P_{R6} sia nulla.

$$I_3 + I_4 = I_{\underline{G}}^{(2)} = G_{21}V_3 + G_{22}V_{R5} = G_{21}V_3, \quad V_3 = \frac{I_3 + I_4}{G_{21}} = 5\,\mathrm{V}$$

Nel terzo punto dell'esercizio si chiede come cambierebbe la soluzione del quesito appena risolto nel caso in cui $R_5 = r = 4\,\mathrm{k\Omega}$.

Dalla formula della P_{R6} trovata in precedenza, se $R_5 = r$, si trova che la P_{R6} è sempre nulla. Il risultato quindi cambia, in quanto $P_{R6} = 0$ è assicurato qualunque sia il valore di V_3.

Questo lo si poteva vedere anche considerando il solo bilancio delle correnti alla maglia (a), che può essere riscritto come

$$I_{R6} = \frac{R_5 - r}{R_6} I_{R5}$$

Dunque se $R_5 = r$ si ha che $I_{R6} = 0$ (e quindi $I_{R6} = 0$) indipendentemente dalle altre grandezze circuitali, compresa V_3.

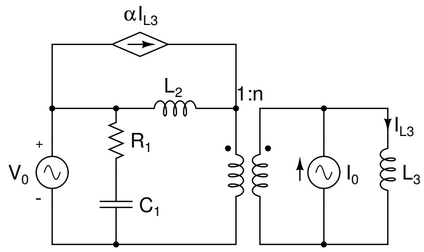
Nel quarto punto si chiede di calcolare la potenza dissipata da $\underline{G}$ assumendo per V_3 il valore calcolato al punto due.

$$P_{\underline{G}} = V_{\underline{G}}^{(1)} I_{\underline{G}}^{(1)} + V_{\underline{G}}^{(2)} I_{\underline{G}}^{(2)} = V_3 I_{\underline{G}}^{(1)} + V_{R5} I_{\underline{G}}^{(2)}$$

Poiché si è nelle ipotesi in cui sia $V_{R6} = 0$ sia $V_{R5} = 0$, si può semplificare

$$P_{\underline{G}} = V_3 I_{\underline{G}}^{(1)} = V_3(G_{11}V_3 + G_{12}V_{R5}) = G_{11}{V_3}^2 = 12{,}5\,\mathrm{mW}$$

Esercizio 2

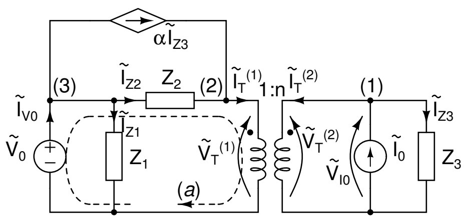


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ $C_1 = 10\,\mathrm{nF} = 10 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}$, $L_2 = 10\,\mathrm{mH}$, $L_3 = 300\,\mathrm{mH}$, $\alpha = 3$, $n = 10$, $V_0(t) = 10\cos(\omega t - \pi/2)$ V, $I_0(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4)$ mA, $\omega = 100\,\mathrm{krad/s}$.

Determinare la potenza complessa erogata dai generatori ideali V_0 e I_0.

Soluzione

Si consideri l'equivalente del circuito in esame nel dominio dei fasori, sostituendo ogni bipolo passivo con una impedenza equivalente. La serie di R_1 e C_1 può essere considerata come un'unica impedenza Z_1 pari alla somma delle impedenze associate a R_1 e C_1. Si noti che per coerenza con il cambio di notazione, il generatore di corrente comandato $\alpha\, I_{L3}$ è stato sostituito con un generatore comandato $\alpha\, I_{Z3}$.



Con

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = 1\,\mathrm{k\Omega} - 1\,j\,\mathrm{k\Omega}$$

$$Z_2 = j\omega L_2 = 1\,j\,\mathrm{k\Omega}$$

$$Z_3 = j\omega L_3 = 30\,j\,\mathrm{k\Omega}$$

$$\tilde{V}_0 = 10e^{-j\pi/2}\,\mathrm{V} = -10\,j\,\mathrm{V}$$

$$\tilde{I}_0 = \sqrt{2}e^{j\pi/4}\,\mathrm{V} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,\mathrm{mA} = 1 + 1\,j\,\mathrm{mA}$$

Per la presenza del generatore comandato $\alpha\,\tilde{I}_{Z3}$, non è possibile risolvere il circuito mediante semplificazione con circuiti equivalenti di Thevenin o Norton. Pertanto è necessario procedere con l'analisi circuitale completa, considerando tra le varie equazioni del circuito anche quella del trasformatore:

$$\begin{cases} \tilde{V}_T^{(1)} = n\,\tilde{V}_T^{(2)} \\ \tilde{I}_T^{(2)} = -n\,\tilde{I}_T^{(1)} \end{cases}$$

La tensione $\tilde{V}_T^{(2)}$ è data da $\tilde{V}_T^{(2)} = \tilde{V}_{Z3} = Z_3\tilde{I}_{Z3}$; dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ha

$$(1):\ \tilde{I}_T^{(2)} + \tilde{I}_{Z3} = \tilde{I}_0, \quad \tilde{I}_T^{(2)} = \tilde{I}_0 - \tilde{I}_{Z3}$$

e, considerando $\tilde{V}_{Z2} = \tilde{V}_0 - \tilde{V}_T^{(1)}$ dalla maglia (a), si ha anche

$$\tilde{I}_{Z2} = \frac{\tilde{V}_0}{Z_2} - \frac{\tilde{V}_T^{(1)}}{Z_2} = \frac{\tilde{V}_0}{Z_2} - \frac{\tilde{V}_T^{(2)}}{n\,Z_2} = \frac{\tilde{V}_0}{Z_2} - \frac{Z_3}{n\,Z_2}\tilde{I}_{Z3}$$

Ora, dal bilancio al nodo (2) è possibile ricavare $\tilde{I}_{Z3}$

$$(2): \; \alpha\, \tilde{I}_{Z3} + \tilde{I}_{Z2} = \tilde{I}_T^{(1)}$$

$$\alpha\, \tilde{I}_{Z3} + \frac{\tilde{V}_0}{Z_2} - \frac{Z_3}{n\, Z_2}\tilde{I}_{Z3} = -n\, \tilde{I}_0 + n\, \tilde{I}_{Z3}$$

$$\tilde{I}_{Z3} = \frac{\dfrac{\tilde{V}_0}{Z_2} + n\, \tilde{I}_0}{n - \alpha + \dfrac{Z_3}{n\, Z_2}} = \frac{n\, \tilde{V}_0 + n^2 Z_2 \tilde{I}_0}{n^2 Z_2\, (n-\alpha) + Z_3} = 1\, j\, \mathrm{mA}$$

Ne segue che

$$\tilde{V}_{I0} = Z_3 \tilde{I}_{Z3} = -30\,\mathrm{V}$$

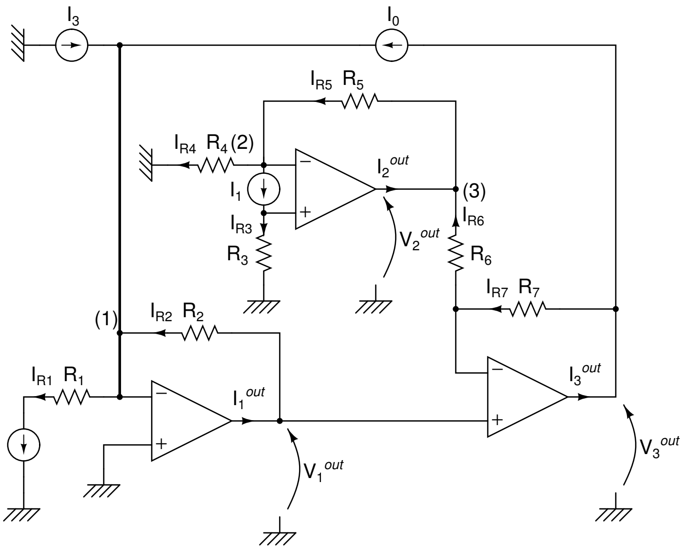
$$\tilde{N}_{I0} = \frac{1}{2}\tilde{V}_{I0}\tilde{I}_0^* = -15\,\mathrm{mW} + 15\, j\,\mathrm{mVAR}$$

mentre per la potenza complessa di $\tilde{V}_0$ è necessario considerare il bilancio delle correnti al nodo (3).

$$(3): \quad \tilde{I}_{V0} = \tilde{I}_{Z1} + \tilde{I}_{Z2} + \alpha\, \tilde{I}_{Z3} = \frac{\tilde{V}_0}{Z_1} + \frac{\tilde{V}_0}{Z_2} - \frac{Z_3}{n\, Z_2}\tilde{I}_{Z3} + \alpha\, \tilde{I}_{Z3} = (-5 - 5\, j)\ \mathrm{mA}$$

$$\tilde{N}_{V0} = \frac{1}{2}\tilde{V}_0 \tilde{I}_{V0}^* = 25\,\mathrm{mW} + 25\, j\,\mathrm{mVAR}$$

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = R_2 = \ldots = R_7 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $I_0 = 5\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 1{,}66\,\mathrm{mA}$, $I_2 = 3\,\mathrm{mA}$, $I_3 = 3\,\mathrm{mA}$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Determinare le tensioni correnti V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out} e le correnti I_1^{out}, I_2^{out} e I_3^{out} di uscita degli amplificatori operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti come indicati in figura. Si consideri inoltre che per tutti gli amplificatori operazionale la corrente sugli ingressi sia nulla e che la tensione ai due ingressi sia uguale per via del corto circuito virtuale.

Dal bilancio delle correnti al nodo (1), considerando che $I_{R1} = I_2$ e che $I_1^{out} = I_{R2}$, si ha

$$I_0 + I_3 + I_{R2} = I_2, \quad I_1^{out} = I_{R2} = I_2 - I_0 - I_3 = -5\,\mathrm{mA}$$

e quindi, osservando che $V_1^- = V_1^+ = 0$, si ha

$$V_1^{out} = V_1^- + R_2 I_{R2} = -5\,\mathrm{V}.$$

Passando all'operazionale 2, per il corto circuito virtuale si ha

$$V_{R3} = R_3 I_1 = V_2^+ = V_2^- = V_{R4}$$

ovvero $I_{R4} = V_{R4}/R_4 = R_3 I_1/R_4$. Dal bilancio al nodo 2

$$I_{R5} = I_{R4} + I_1 = \left(\frac{R_3}{R_4} + 1\right) I_1$$

$$V_2^{out} = V_2^- + R_5 I_{R5} = R_3 I_1 + \left(\frac{R_3}{R_4} + 1\right) I_1 \approx 5\,\mathrm{V}$$

Dal nodo (3), $I_2^{out} = I_{R5} - I_{R6}$; per determinare $I_{R6} = I_{R7}$ è necessario considerare il corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 3

$$V_3^- = V_3^+ = V_1^{out}, \quad I_{R7} = I_{R6} = \frac{V_1^{out}}{R_6} - \frac{V_2^{out}}{R_6}$$

$$I_2^{out} = \left(\frac{R_3}{R_4} + 1\right) I_1 - \frac{V_1^{out}}{R_6} + \frac{V_2^{out}}{R_6} \approx 13{,}33\,\mathrm{mA}$$

Conoscendo I_{R7}, anche l operazionale 3 è risolto.

$$V_3^{out} = V_3^- + R_7 I_{R7} = V_1^{out} + \frac{R_7}{R_6} V_1^{out} - \frac{R_7}{R_6} V_2^{out} \approx -15\,\mathrm{V}$$

$$I_3^{out} = I_0 + I_{R7} = I_0 + \frac{V_1^{out}}{R_6} - \frac{V_2^{out}}{R_6} \approx -5\,\mathrm{mA}$$