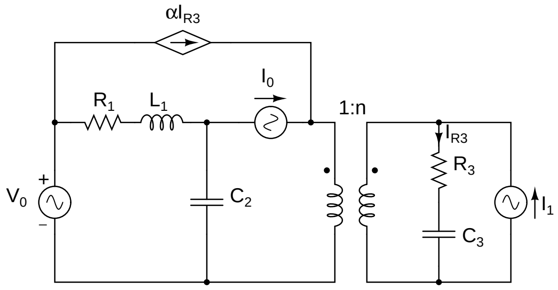
Esame di Teoria dei Circuiti - 23 luglio 2009 (Soluzione)

Esercizio 1

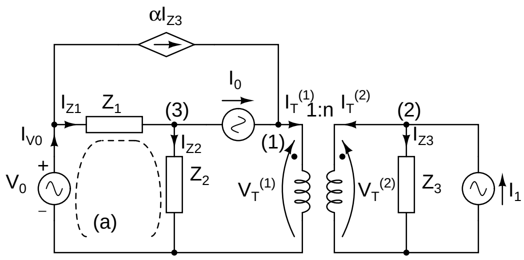


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$\omega = 25\,\mathrm{krad/s}$, $R_1 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $L_1 = 80\,\mathrm{mH}$, $C_2 = 20\,\mathrm{nF} = 20 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}$, $R_3 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $C_3 = 80\,\mathrm{nF} = 80 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}$ $\alpha = 2$, $n = 4$, $V_0(t) = 4\cos(\omega t)\mathrm{V}$, $I_0(t) = 3\sqrt{2}\cos(\omega t - \pi/4)\mathrm{mA}$, $I_1(t) = \cos(\omega t + \pi/2)\mathrm{mA}$.

Calcolare la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore ideale di tensione V_0.

Soluzione

Nel dominio dei fasori il circuito può essere ridisegnato come



con $Z_1 = 2\,\mathrm{k}\Omega + 2j\,\mathrm{k}\Omega$, $Z_2 = -2j\,\mathrm{k}\Omega$, $Z_3 = 2\,\mathrm{k}\Omega - 500j\,\Omega$, $V_0 = 4\,\mathrm{V}$, $I_0 = 3\sqrt{2}e^{-j\pi/4}\,\mathrm{mA} = 3\,\mathrm{mA} - 3j\,\mathrm{mA}$, $I_1 = e^{j\pi/2}\,mA = j\,\mathrm{mA}$.

Per via della presenza del generatore comandato αI_{Z3}, non è possibile semplificare il circuito mediante sostituzione del trasformatore e di uno dei due circuiti ad esso connesso con l'equivalente di Thevenin. Pertanto è necessario procedere con l'analisi circuitale classica, considerando tra le varie equazioni del circuito anche quella del trasformatore:

$$\begin{cases} V_T^{(2)} = nV_T^{(1)} \\ I_T^{(1)} = -nI_T^{(2)} \end{cases}$$

La potenza complessa erogata dal generatore V_0 è definita come

$$N_{V0} = P_{V0} + jQ_{V0} = \frac{1}{2}V_0 I_{V0}^*$$

dove I_0^* il complesso coniugato di $I_0 = I_{Z1} + \alpha I_{Z3}$. Si determinino quindi I_{Z1} e I_{Z3}.

Dal bilancio delle correnti ai nodi (1) e (2) si ha

$$\alpha I_{Z_3} + I_0 = I_T^{(1)} = -nI_T^{(2)} = -n\left(I_1 - I_{Z3}\right)$$

$$I_{Z3} = \frac{I_0 + nI_1}{n - \alpha}$$

Per determinare I_{Z1} è sufficiente considerare il bilancio delle tensioni alla maglia indicata con (a) e il bilancio delle correnti al nodo (3).

$$V_0 = Z_1 I_{Z1} + Z_2 I_{Z2} = Z_1 I_{Z1} + Z_2\left(I_{Z1} - I_0\right)$$

$$I_{Z1} = \frac{V_0 + Z_2 I_0}{Z_1 + Z_2}$$

Ne segue che

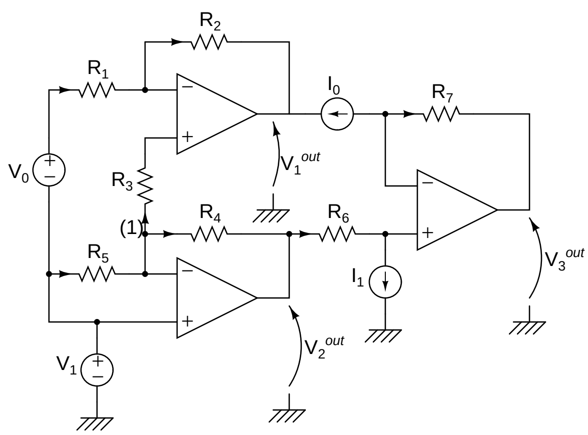
$$I_{V0} = \frac{V_0 + Z_2 I_0}{Z_1 + Z_2} + \alpha \frac{I_0 + nI_1}{n - \alpha} = 2\,\mathrm{mA} - 2j\,\mathrm{mA}$$

$$I^*_{V0} = 2\,\mathrm{mA} + 2j\,\mathrm{mA}$$

$$N_{V0} = \frac{1}{2} V_0 I^*_{V0} = 4\,\mathrm{mW} + 4j\,\mathrm{mVAr}$$

con $P_{V0} = 4\,\mathrm{mW}$, $Q_{V0} = 4\,\mathrm{mVAr}$.

Esercizio 2



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_7 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $V_0 = 3\,\mathrm{V}$, $V_1 = 6\,\mathrm{V}$, $I_0 = I_1 = 2\,\mathrm{mA}$. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni di uscita degli operazionali V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out}.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti indicati in figura. Dato che gli ingressi degli operazionali non assorbono corrente, si ha $I_{R3} = 0$. Inoltre per il corto circuito virtuale sugli ingressi dell'operazionale 2 si ha

$$V_2^+ = V_1 = V_2^-$$

$$I_{R5} = \frac{V_2^+ - V_2^-}{R_5} = 0$$

Dato che, per il bilancio delle correnti al nodo (1) si ha $I_{R5} = I_{R3} + I_{R4}$, ne segue che anche $I_{R4} = 0$. Quindi

$$V_2^{out} = V_2^- - R_4 I_{R4} = V_1 = 6\,\mathrm{V}$$

Per quanto riguarda l'operazionale 1 si ha

$$V_1^+ = V_2^- - R_3 I_{R3} = V_1$$

$$I_{R1} = \frac{V_2^+ + V_0 - V_1^-}{R_1} = \frac{V_0}{R_1} = I_{R2}$$

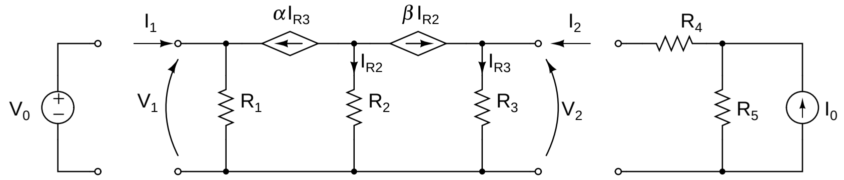
$$V_1^{out} = V_1^- - R_2 I_{R2} = V_1 - \frac{R_2}{R_1} V_0 = 3\,\mathrm{V}$$

Per determinare V_3^{out} si consideri che $I_{R6} = I_1$ e $I_{R7} = -I_0$, e quindi

$$V_3^+ = V_2^{out} - R_6 I_{R6} = V_2^{out} - R_6 I_1 = V_3^-$$

$$V_3^{out} = V_3^- - R_7 I_{R7} = V_2^{out} - R_6 I_1 + R_7 I_0 = 6\,\mathrm{V}$$

Esercizio 3

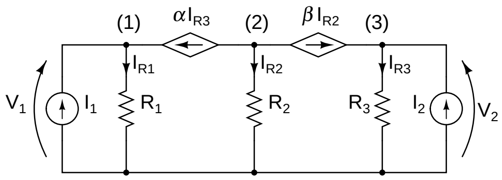


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 6\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $R_4 = R_5 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $V_0 = 6\,\mathrm{V}$, $I_0 = 4\,\mathrm{mA}$.
Calcolare:

- la matrice R delle resistenze del due porte;
- la potenza dissipata dal due porte calcolato al punto precedente, quando alla porta 1 viene collegato il generatore ideale di tensione V_0, e alla porta 2 il generatore di corrente I_0 e le resistenze R_4 e R_5, come mostrato in figura.

Soluzione

Per trovare la matrice delle resistenze R si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di corrente I_1 e I_2 e di calcolare le tensioni V_1 e V_2 ai loro capi.



Considerando I_{R1}, I_{R2} e I_{R3} le tre incognite del sistema, è sufficiente considerare il bilancio delle correnti ai nodi indicati con (1), (2) e (3) per risolvere il circuito.

$$\begin{aligned} (1):&\qquad I_1 + \alpha I_{R3} = I_{R1} \\ (2):&\qquad \alpha I_{R3} + \beta I_{R2} + I_{R2} = 0 \\ (3):&\qquad I_2 + \beta I_{R2} = I_{R3} \end{aligned}$$

Dalla (2) si ricava I_{R2}

$$I_{R2} = -\frac{\alpha}{1+\beta} I_{R3}$$

che sostituito nella (3) permette di esplicitare I_{R3}

$$I_2 - \beta \frac{\alpha}{1+\beta} I_{R3} = I_{R3}$$

$$I_{R3} = \frac{I_2}{1 + \dfrac{\alpha\beta}{1+\beta}} = \frac{1+\beta}{1+\beta+\alpha\beta} I_2$$

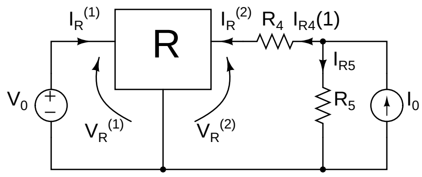
A questo punto, osservando che $V_1 = R_1 I_{R1}$ e che $V_2 = R_3 I_{R3}$, ed utilizzando l'equazione (1) per determinare I_{R1}, si possono calcolare i quattro coefficienti della matrice R.

$$V_1 = R_1 I_1 + R_1 \alpha\, I_{R3} = \underbrace{R_1}_{R_{11} = 2\,\mathrm{k}\Omega} I_1 + \underbrace{\frac{\alpha(1+\beta)}{1+\beta+\alpha\beta} R_1}_{R_{12} = 2\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

$$V_2 = \underbrace{\frac{1+\beta}{1+\beta+\alpha\beta} R_3}_{R_{22} = 2\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

con $R_{21} = 0$.

Per il secondo punto dell'esercizio, si consideri il seguente circuito:



Si indichi con $V_R^{(1)}$ e $I_R^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di R, e con $V_R^{(2)}$ e $I_R^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2. Ricordando che dall'equazione costitutiva di R si ha $V_R^{(2)} = R_{22} I_R^{(2)}$, si ha che la potenza dissipata da R è data da

$$P_R = V_R^{(1)} I_R^{(1)} + V_R^{(2)} I_R^{(2)} = V_0 I_R^{(1)} + R_{22} \left(I_R^{(2)}\right)^2$$

Per determinare la potenza P_R è quindi sufficiente determinare $I_R^{(1)}$ e $I_R^{(2)}$.

Dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ottiene

$$I_0 = I_{R5} + I_{R4} = I_{R5} + I_R^{(2)}$$

da cui si ricava $I_{R5} = I_0 - I_R^{(2)}$. Sostituendo questa espressione nel bilancio delle tensioni alla maglia formata da R_4, R_5 e la porta 2 di R si ottiene

$$V_R^{(2)} + R_4 I_{R4} = R_5 I_{R5}$$

$$R_{22} I_R^{(2)} + R_4 I_R^{(2)} = R_5 I_0 - R_5 I_R^{(2)}$$

$$I_R^{(2)} = \frac{R_5 I_0}{R_4 + R_5 + R_{22}} = 1\,\mathrm{mA}$$

Inoltre, osservando che $V_0 = V_R^{(1)}$ si ottiene il valore di $I_R^{(1)}$.

$$V_0 = V_R^{(1)} = R_{11} I_R^{(1)} + R_{12} I_R^{(2)} = R_{11} I_R^{(1)} + R_{12} \frac{R_5 I_0}{R_4 + R_5 + R_{22}}$$

$$I_R^{(1)} = \frac{V_0}{R_{11}} - \frac{R_{12} R_5 I_0}{R_{11}(R_4 + R_5 + R_{22})} = 2\,\mathrm{mA}$$

Segue che $P_R = 14\,\mathrm{mW}$