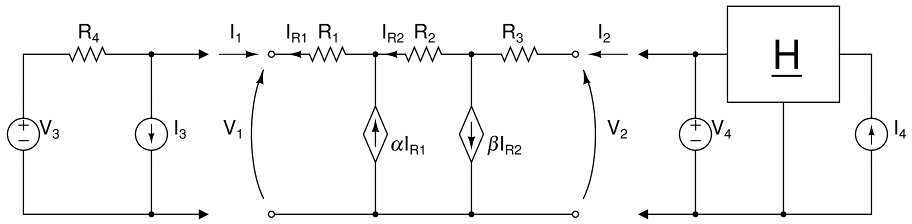
Esame di Teoria dei Circuiti – 25 Febbraio 2011 (Soluzione)

Esercizio 1



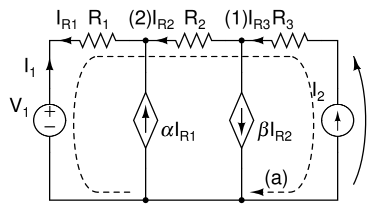
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 4\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 3/4$, $\beta = 3$, $V_3 = 1\,\mathrm{V}$, $V_4 = 3\,\mathrm{V}$, $I_3 = I_4 = 0.5\,\mathrm{mA}$.

Determinare:

- la descrizione del due porte in figura tramite matrice ibrida $\underline{H}$, definita come $\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \underline{H}\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 2 del due porte $\underline{H}$ calcolato al punto precedente, quando alla porta 1 vengono collegati i generatori ideali V_3 ed I_3 e la resistenza R_4, come mostrato in figura;
- la potenza $P_{\underline{H1}}$ e $P_{\underline{H2}}$ dissipata dai due porte $\underline{H}$, quando alla porta 1 vengono collegati V_3, I_3 e R_4 (come nel caso precedente) e alla porta 2 una seconda $\underline{H}$ identica a quella calcolata sopra, V_4 e I_4, come mostrato in figura. Indicare inoltre quali tra i generatori V_3, V_4, I_3 e I_4 cedono potenza al circuito e quali invece assorbono potenza.

Soluzione

Per determinare la descrizione tramite matrice ibrida $\underline{H}$ del circuito in esame si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali V_1 e I_2, e quindi di calcolarne la corrente I_1 e la tensione V_2 ai loro capi. Si definisca inoltre un verso arbitrario per le correnti I_{R3}.



Osservando che $I_{R3} = I_2$, e imponendo il bilancio delle correnti ai nodi (1) e (2), si può ricavare I_1:

$$(1): \quad I_{R3} = I_{R2} + \beta I_{R2}, \quad I_{R_2} = \frac{1}{1+\beta} I_{R3} = \frac{1}{1+\beta} I_2$$

$$(2): \quad I_{R2} + \alpha I_{R1} = I_{R1}, \quad I_{R_1} = \frac{1}{1-\alpha} I_{R2} = \frac{1}{(1-\alpha)(1+\beta)} I_2$$

$$I_1 = -I_{R1} = \underbrace{-\frac{1}{(1-\alpha)(1+\beta)}}_{H_{12}=-1} I_2$$

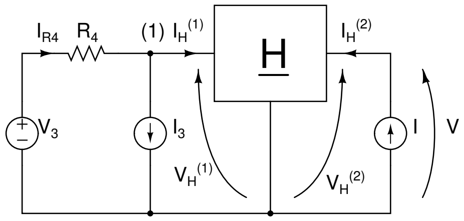
con $H_{11} = 0$.

La tensione V_2 si può ricavare dal bilancio delle tensioni alla maglia (a)

$$(a): \quad V_1 + R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} = V_2$$

$$V_2 = \underbrace{V_1}_{H_{21}=1} + \underbrace{\left(\frac{R_1}{(1-\alpha)(1+\beta)} + \frac{R_2}{1+\beta} + R_3 \right)}_{H_{22}=4\,\mathrm{k}\Omega} I_2$$

Per il secondo punto dell'esercizio, si connetta al due porte calcolato in precedenza il circuito formato da V_3, I_3 e R_4. Si calcoli l'equivalente di Thevenin del circuito complessivo collegando alla porta 2 di $\underline{H}$ un generatore ideale di corrente I per calcolarne la tensione V ai suoi capi.



Si indichino con $V_H^{(1)}$ e $I_H^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{H}$, e con $V_H^{(2)}$ e $I_H^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, con $V_H^{(2)} = V$ e $I_H^{(2)} = I$. Dalla seconda delle equazioni costitutive di $\underline{H}$ si ha $V = V_H^{(2)} = H_{21}V_H^{(1)} + H_{22}I_H^{(2)} = H_{21}V_H^{(1)} + H_{22}I$. Si determini quindi $V_H^{(1)}$.

Si consideri

$$I_{R4} = \frac{V_3 - V_H^{(1)}}{R_4}$$

che sostituito nell'equazione di bilancio delle tensioni al nodo (1) permette di trovare $V_H^{(1)}$ e quindi anche V.

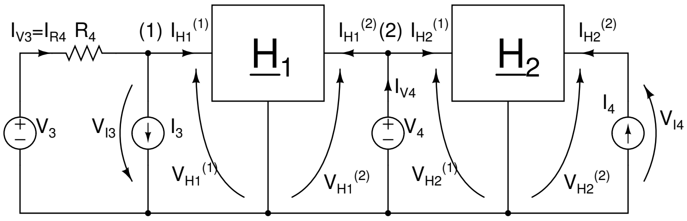
$$(1): \quad I_{R4} = I_3 + I_H^{(1)}, \quad \frac{V_3 - V_H^{(1)}}{R_4} = I_3 + H_{11}V_H^{(1)} + H_{12}I$$

$$V_H^{(1)} = \frac{V_3 - R_4 I_3 - R_4 H_{12} I}{1 + R_4 H_{11}}$$

$$V = H_{21}V_H^{(1)} + H_{22}I = \underbrace{H_{21}\frac{V_3 - R_4 I_3}{1 + R_4 H_{11}}}_{V^{(eq)} = 0.5\,\mathrm{V}} + \underbrace{\left(H_{22} - H_{12}H_{21}\frac{R_4}{1 + R_4 H_{11}} \right)}_{R^{(eq)} = 5\,\mathrm{k}\Omega} I$$

Il punto successivo dell'esercizio chiede di calcolare la potenza dei due doppi bipoli $\underline{H}$ quando, nello stesso circuito del punto precedente, alla porta 2 viene collegato il circuito formato da V_4, I_4 ed una secondo doppio bipolo descritto dalla stessa matrice $\underline{H}$ trovata precedentemente. Per fini di chiarezza, si indichi con $\underline{H}_1$ il doppio bipolo proveniente dai punti precedenti dell'esercizio, e con $\underline{H}_2$ quello appena aggiunto.

Il circuito da considerare è il seguente.



dove si sono indicati con $V_{H1}^{(1)}$, $V_{H1}^{(2)}$, $I_{H1}^{(1)}$ e $I_{H1}^{(2)}$ tensioni e correnti di $\underline{H}_1$, e con $V_{H2}^{(1)}$, $V_{H2}^{(2)}$, $I_{H2}^{(1)}$ e $I_{H2}^{(2)}$ tensioni e correnti di $\underline{H}_2$. Si ricordi che la potenza dissipata da $\underline{H}$ è definita come $P_{\underline{H}} = V_H^{(1)} I_H^{(1)} + V_H^{(2)} I_H^{(2)}$.

Per quanto riguarda la determinazione di $P_{\underline{H2}}$ è immediato determinare $I_{H2}^{(1)}$ e $V_{H2}^{(1)} = V_{I4}$:

$$I_{H2}^{(1)} = H_{11} V_{H2}^{(1)} + H_{12} I_{H2}^{(2)} = H_{11} V_4 + H_{12} I_4 = -0.5\,\mathrm{mA}$$

$$V_{H2}^{(2)} = H_{21} V_{H2}^{(1)} + H_{22} I_{H2}^{(2)} = H_{21} V_4 + H_{22} I_4 = 5\,\mathrm{V}$$

da cui $P_{\underline{H2}} = 1\,\mathrm{mW}$.

Per quanto riguarda $P_{\underline{H1}}$ è invece necessario considerare la seconda equazione costitutiva di $\underline{H}1$

$$V_4 = V_{H1}^{(2)} = H_{21} V_{H1}^{(1)} + H_{22} I_{H1}^{(2)}, \quad I_{H1}^{(2)} = \frac{1}{H_{22}} V_4 - \frac{H_{21}}{H_{22}} V_{H1}^{(1)}$$

assieme a, come nel caso precedente, il bilancio delle correnti al nodo (1)

$$(1): \quad I_{R4} = I_3 + I_{H1}^{(1)}, \quad \frac{V_3 - V_{H1}^{(1)}}{R_4} = I_3 + H_{11} V_{H1}^{(1)} + H_{12} \left(\frac{1}{H_{22}} V_4 - \frac{H_{21}}{H_{22}} V_{H1}^{(1)} \right)$$

$$V_{H1}^{(1)} = \frac{\dfrac{V_3}{R_4} - I_3 - \dfrac{H_{12}}{H_{22}} V_4}{H_{11} + \dfrac{1}{R_4} - \dfrac{H_{12} H_{21}}{H_{22}}} = 1\,\mathrm{V}$$

da cui $I_{H1}^{(2)} = 0.5\,\mathrm{mA}$ e $I_{H1}^{(1)} = -0.5\,\mathrm{mA}$. La potenza cercata è dunque $P_{\underline{H1}} = 1\,\mathrm{mW}$.

La determinazione delle grandezze di sopra eprmette anche di rispondere immediatamente all'ultimo quesito riguardante la regione di funzionamento dei generatori ideali.

$$P_{V3} = V_3 I_{V3} = V_3 I_{R4} = V_3 \frac{V_3 - V_{H1}^{(1)}}{R4} = 0, \quad V_3 : \text{equilibrio energetico}$$

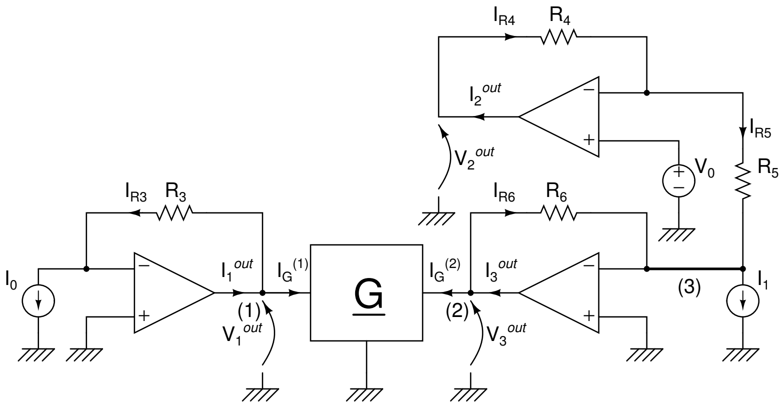
$$P_{I3} = V_{I3} I_3 = -V_{H1}^{(1)} I_3 < 0, \quad I_3 : \text{utilizzatore}$$

$$P_{V4} = V_4 I_{V4} = V_4 \left(I_{H1}^{(2)} + I_{H2}^{(1)} \right) = 0, \quad V_4 : \text{equilibrio energetico}$$

$$P_{I4} = V_{I4} I_4 = V_{H2}^{(2)} I_4 > 0, \quad I_3 : \text{generatore}$$

dove per determinare I_{V4} si e utilizzato il bilancio delle correnti al nodo (2).

Esercizio 2



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = R_2 = \ldots = R_6 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $\underline{G} = \begin{pmatrix} 2/5\,\mathrm{m} & -1/5\,\mathrm{m} \\ -1/5\,\mathrm{m} & 2/5\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \Omega^{-1}$, $V_0 = 2.5\,\mathrm{V}$, $I_0 = 2.5\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 3.75\,\mathrm{mA}$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni V_1^{out}, V_2^{out} e V_3^{out} e le correnti I_1^{out}, I_2^{out} e I_3^{out} di uscita degli amplificatori operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti come indicati in figura. Si consideri per tutti gli amplificatori operazionale che la corrente sugli ingressi sia nulla.

Per il corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 1, si ha

$$V_1^- = V_1^+ = 0$$

da cui

$$V_1^{out} = V_1^- + R_3 I_{R3} = R_3 I_0 = 5\,\mathrm{V}$$

$$I_1^{out} = I_{R3} + I_G^{(1)} = I_0 + G_{11} V_1^{out} + G_{12} V_3^{out}$$

Considerando il corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 2

$$V_2^- = V_2^+ = V_0$$

e quello agli ingressi dell'operazionale 3

$$V_3^- = V_3^+ = 0$$

è possibile ricavare I_{R5}

$$I_{R5} = \frac{V_2^- - V_3^-}{R_5} = \frac{V_0}{R_5}$$

da cui

$$V_2^{out} = V_2^- + R_4 I_{R4} = V_0 + R_4 I_{R5} = V_0 \left(1 + \frac{R_4}{R_5}\right) = 5\,\mathrm{V}$$

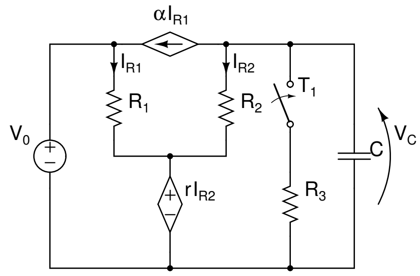
$$I_2^{out} = I_{R4} = I_{R5} = 1.25\,\mathrm{mA}$$

$$V_3^{out} = V_3^- + R_6 I_{R6} = R_6 \left(I_1 - I_{R5}\right) = 5\,\mathrm{V}$$

$$I_3^{out} = I_{R6} + G_{21} V_1^{out} + G_{22} V_3^{out} = I_1 - I_{R5} + G_{21} V_1^{out} + G_{22} V_3^{out} = 3.5\,\mathrm{mA}$$

da cui si ricava anche $I_1^{out} = 3.5\,\mathrm{mA}$.

Esercizio 3



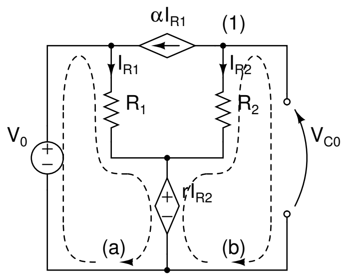
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 3\,\text{k}\Omega$ $R_2 = 2\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 5\,\text{k}\Omega$, $r = 3\,\text{k}\Omega$, $C = 100\,\mu\text{F}$, $\alpha = \frac{3}{2}$, $V_0 = 1\,\text{V}$.

Per $t < t_0 = 0\,\text{s}$ l'interruttore T_1 è aperto ed il circuito è a regime; all'istante $t = t_0$ l'interruttore T_1 si chiude.

Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$ ai capi del condensatore.

Soluzione

Per $t < 0$ l'interruttore T è chiuso ed il circuito a regime, ovvero $I_C = 0$; il circuito in esame è dunque equivalente ad un circuito in cui la capacità è sostituita da un circuito aperto. Il circuito si semplifica come segue:



Per determinare la tensione iniziale V_{C0} si può osservare che dalla maglia (b) si ha

$$(b): \quad rI_{R2} + R_2 I_{R2} = V_{C0}$$

Si determini quindi I_{R2}.

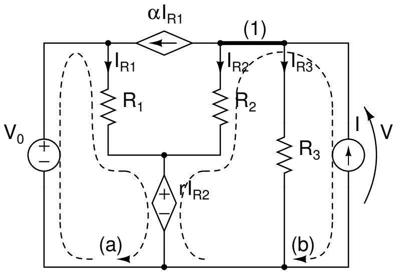
Dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ha $\alpha I_{R1} + I_{R2} = 0$, cioè $I_{R1} = -\dfrac{1}{\alpha} I_{R2}$. Dal bilancio delle tensioni alla maglia (a) si ha

$$(a): \quad V_0 = R_1 I_{R1} + rI_{R2} = -\frac{R_1}{\alpha} I_{R2} + rI_{R2}, \quad I_{R2} = \frac{\alpha}{\alpha r - R_1} V_0$$

da cui

$$V_{C0} = \alpha \frac{r + R_2}{\alpha r - R_1} V_0 = 5\,\text{V}$$

All'istante $t = t_0 = 0\,\text{sec}$ l'interruttore T si chiude e comincia il transitorio di carica/scarica di C. Per il calcolo di tale transitorio, si ricorra all'equivalente di Thevenin del circuito connesso alla capacità. Si supponga quindi di sostituire alla capacità stessa un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi. Il circuito da esaminare diventa il seguente:



Come nel caso precedente, si può considerare il bilancio delle tensioni alla maglia (b), da cui $V = (r + R_2)I_{R2}$ e quindi $I_{R2} = \dfrac{V}{r + R_2}$. La corrente I_{R3} è data da $I_{R3} = \dfrac{V}{R_3}$, mentre per determinare la corrente I_{R1} si può considerare il bilancio delle tensioni alla maglia (a)

$$(a): \quad V_0 = R_1 I_{R1} + r I_{R2}, \quad I_{R1} = \frac{V_0}{R_1} - \frac{r}{R_1} I_{R2} = \frac{V_0}{R_1} - \frac{r}{R_1(r + R_2)} V$$

A questo punto per determinare V è sufficiente considerare il bilancio delle correnti al nodo (1)

$$(1): \quad I = I_{R3} + I_{R2} + \alpha I_{R1}$$

$$I = \frac{V}{R_3} + \frac{V}{r + R_2} + \alpha \frac{V_0}{R_1} - \alpha \frac{r}{R_1(r + R_2)} V$$

$$V = \underbrace{-\frac{\alpha \dfrac{V_0}{R_1}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{r + R_2} - \alpha \dfrac{r}{R_1(r + R_2)}}}_{V^{(eq)} = -5\,\mathrm{V}} + \underbrace{\frac{1}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{r + R_2} - \alpha \dfrac{r}{R_1(r + R_2)}}}_{R^{(eq)} = 10\,\mathrm{k\Omega}} I$$

La tensione $V_c(t)$ è quindi data da

$$V_c(t) = \begin{cases} V_{C0} = 5\,\mathrm{V}, & t < t_0 = 0\,\mathrm{s} \\ V^{(eq)} + \left(V_{C0} - V^{(eq)}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = -5 + 10 e^{-\frac{t}{\tau}}\,\mathrm{V}, & t \geq t_0 = 0\,\mathrm{s} \end{cases}$$

con $\tau = R^{(eq)} C = 1\,\mathrm{s}$. L'andamento della tensione nel tempo è quello dato dalla figura seguente.