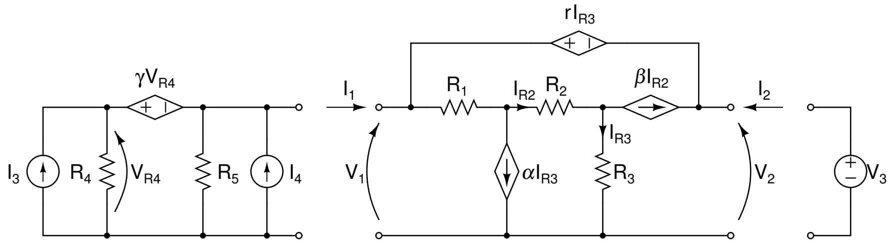
Esame di Teoria dei Circuiti – 26 Gennaio 2012 (Soluzione)

Esercizio 1



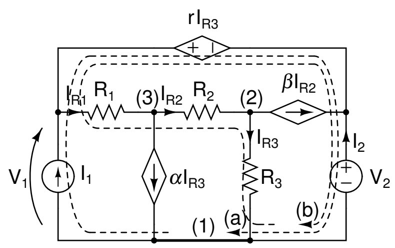
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 2\,\text{k}\Omega$, $R_4 = 2\,\text{k}\Omega$, $R_5 = 1\,\text{k}\Omega$, $r = 1\,\text{k}\Omega$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 3/2$, $V_3 = 4\,\text{V}$, $I_3 = 3\,\text{mA}$, $I_4 = 7\,\text{mA}$.

Determinare:

- la descrizione del doppio bipolo evidenziato in figura tramite matrice ibrida $\underline{H}$, definita come $\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \underline{H} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 2 del doppio bipolo $\underline{H}$ calcolato sopra, quando alla porta 1 vengono collegate le resistenze R_4 e R_5, i generatori ideali di corrente I_3 e I_4 ed il generatore di tensione comandato $\gamma\, V_{R4}$, come indicato in figura;
- il circuito equivalente di Norton alla porta 1 del doppio bipolo $\underline{H}$ calcolato sopra, quando alla porta 2 viene collegato il generatore ideale di tensione V_3;
- la potenza $P_{\underline{H}}$ dissipata dal doppio bipolo $\underline{H}$ collegando entrambi i sottocircuiti formato da R_4, R_5, I_3, I_4 e $\gamma\, V_{R4}$ (alla porta 1) e da V_3 (alla porta 2).

Soluzione

Per determinare la descrizione del sottocircuito in esame tramite matrice ibrida $\underline{H}$ si supponga di collegare alla porta di sinistra il generatore ideale di corrente I_1 e alla porta di destra il generatore ideale di tensione V_2. Si calcoli quindi la tensione V_1 ai capi di I_1 e la corrente I_2 generata da V_2.



Dalla maglia indicata con (a) e dal nodo indicato con (1) si ha

$$(a):\ \ V_1 = r\, I_{R3} + V_2$$

$$(1):\ \ I_{R3} + \alpha\, I_{R3} = I_1 + I_2, \qquad I_2 = (1+\alpha) I_{R3} - I_1$$

Si proceda quindi determinando la correndo I_{R3}.

Dal bilancio ai nodi (2) e (3) è possibile ricavare sia I_{R1} che I_{R2} in funzione di I_{R3}

$$(2):\ I_{R2} = I_{R3} + \beta\, I_{R2}, \qquad I_{R2} = \frac{1}{1-\beta} I_{R3}$$

$$(3):\ I_{R1} = I_{R2} + \alpha\, I_{R3} = \frac{1+\alpha-\alpha\beta}{1-\beta} I_{R3}$$

Per determinare il valore di I_{R3} è necessario ora considerare il bilancio delle tensioni alla maglia (b).

$$(b):\ V_2 + r\, I_{R3} = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3}$$

$$V_2 + r\, I_{R3} = R_1 \frac{1+\alpha-\alpha\beta}{1-\beta} I_{R3} + R_2 \frac{1}{1-\beta} I_{R3} + R_3 I_{R3}$$

$$I_{R3} = \frac{1-\beta}{R_1 + R_2 + (1-\beta)(\alpha R_1 + R_3 - r)} V_2$$

da cui si ricava

$$V_1 = \underbrace{\left(\frac{(1-\beta)r}{R_1 + R_2 + (1-\beta)(\alpha R_1 + R_3 - r)} + 1 \right)}_{H_{12} = 3/2} V_2$$

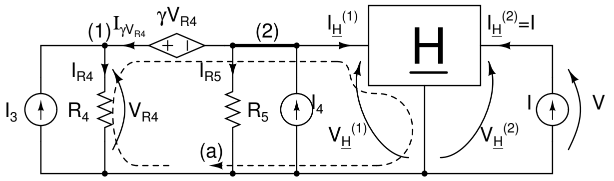
con $H_{11} = 0\,\Omega$, e

$$I_2 = \underbrace{-1}_{H_{21} = -1} I_1 + \underbrace{\frac{(1+\alpha)(1-\beta)r}{R_1 + R_2 + (1-\beta)(\alpha R_1 + R_3 - r)}}_{H_{22} = 2\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_2$$

ovvero

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} 0\,\Omega & \dfrac{3}{2} \\ -1 & 2\,\mathrm{m}\Omega^{-1} \end{pmatrix}$$

Per il secondo punto dell'esercizio, il circuito da esaminare diventa il seguente, dove per calcolare il circuito equivalente di Thevenin si è connesso alla porta 2 di $\underline{H}$ un generatore di corrente I, in modo da calcolare la tensione V ai suoi capi.



Indicando con $V_{\underline{H}}^{(1)}$ e $I_{\underline{H}}^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{H}$, e con $V_{\underline{H}}^{(2)}$ e $I_{\underline{H}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, con $V_{\underline{H}}^{(1)} = V$ e $I_{\underline{H}}^{(2)} = I$, dalla seconda equazione costitutiva di $\underline{H}$ si ha

$$I = I_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22} V_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22} V$$

$$I_{\underline{H}}^{(1)} = \frac{I}{H_{21}} - \frac{H_{22}}{H_{21}} V$$

Inoltre, dalla maglia (a) si ha

$$(a):\ V_{R4} = \gamma\, V_{R4} + V_{\underline{H}}^{(1)}, \quad V_{R4} = \frac{V_{\underline{H}}^{(1)}}{1-\gamma}, \quad I_{R4} = \frac{V_{R4}}{R_4} = \frac{V_{\underline{H}}^{(1)}}{(1-\gamma)R_4}$$

Considerando la prima equazione costitutiva di $\underline{H}$ e l espressione per $I_{\underline{H}}^{(1)}$ trovata sopra, assieme ai bilanci delle correnti ai nodi (1) e (2) (o, equivalentemente, al taglio composto contenente i nodi indicati con (1) e (2)) permette di ricavare V

$$(1):\ I_3 + I_{\gamma V_{R4}} = I_{R4}$$

$$(2):\ I_4 = I_{\gamma V_{R4}} + I_{R5} + I_{\underline{H}}^{(1)}$$

$$(1)+(2):\ I_3 + \cancel{I_{\gamma V_{R4}}} + I_4 = I_{R4} + \cancel{I_{\gamma V_{R4}}} + I_{R5} + I_{\underline{H}}^{(1)}$$

$$I_3 + I_4 = \frac{V_{\underline{H}}^{(1)}}{(1-\gamma)R_4} + \frac{V_{\underline{H}}^{(1)}}{R_5} + I_{\underline{H}}^{(1)}$$

$$I_3 + I_4 = \left(\frac{1}{(1-\gamma)R_4} + \frac{1}{R_5}\right)\left(H_{11}I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12}V\right) + I_{\underline{H}}^{(1)}$$

$$I_3 + I_4 = \left(\frac{H_{11}}{(1-\gamma)R_4} + \frac{H_{11}}{R_5} + 1\right) I_{\underline{H}}^{(1)} + \left(\frac{1}{(1-\gamma)R_4} + \frac{1}{R_5}\right) H_{12}V$$

$$I_3+I_4 = \left(\frac{H_{11}}{(1-\gamma)R_4}+\frac{H_{11}}{R_5}+1\right)\frac{I}{H_{21}} - \left(\frac{H_{11}}{(1-\gamma)R_4}+\frac{H_{11}}{R_5}+1\right)\frac{H_{22}}{H_{21}}V + \left(\frac{1}{(1-\gamma)R_4}+\frac{1}{R_5}\right)H_{12}V$$

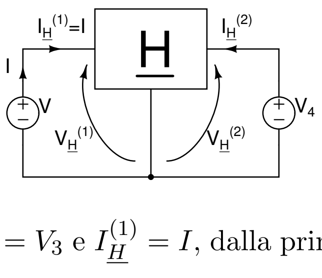
$$V = \frac{I_3 + I_4 - \left(\frac{H_{11}}{(1-\gamma)R_4} + \frac{H_{11}}{R_5} + 1\right)\frac{1}{H_{21}}I}{-\left(\frac{H_{11}}{(1-\gamma)R_4} + \frac{H_{11}}{R_5} + 1\right)\frac{H_{22}}{H_{21}} + \left(\frac{1}{(1-\gamma)R_4} + \frac{1}{R_5}\right)H_{12}}$$

Si noti che, osservando che $H_{11} = 0\,\Omega$, l'espressione si può semplificare in

$$V = \frac{I_3 + I_4 - \frac{1}{H_{21}}I}{\left(\frac{1}{(1-\gamma)R_4} + \frac{1}{R_5}\right)H_{12} - \frac{H_{22}}{H_{21}}} =$$

$$= \underbrace{\frac{I_3 + I_4}{\left(\frac{1}{(1-\gamma)R_4} + \frac{1}{R_5}\right)H_{12} - \frac{H_{22}}{H_{21}}}}_{V^{(eq)} = 5\,\mathrm{V}} \underbrace{- \frac{1}{H_{21}}\frac{1}{\left(\frac{1}{(1-\gamma)R_4} + \frac{1}{R_5}\right)H_{12} - \frac{H_{22}}{H_{21}}}}_{R^{(eq)} = 500\,\Omega} I$$

Nel punto successivo il circuito da esaminare diventa il seguente, dove per calcolare il circuito equivalente di Norton si è connesso alla porta 1 di $\underline{H}$ un generatore di tensione V, in modo da calcolarne la tensione V ai capi.



Osservando che $V_{\underline{H}}^{(1)} = V$, $V_{\underline{H}}^{(2)} = V_3$ e $I_{\underline{H}}^{(1)} = I$, dalla prima equazione costitutiva di $\underline{H}$ si ha

$$V_{\underline{H}}^{(1)} = H_{11}I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12}V_{\underline{H}}^{(2)}, \quad I = I_{\underline{H}}^{(1)} = \frac{V_{\underline{H}}^{(1)} - H_{12}V_{\underline{H}}^{(2)}}{H_{11}} = \frac{V - H_{12}V_3}{H_{11}}$$

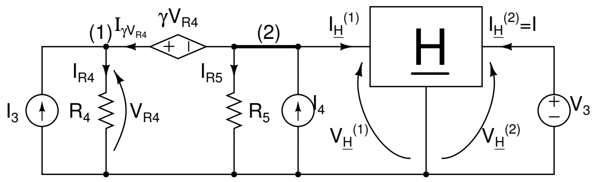
Tuttavia, poiché $H_{11} = 0\,\Omega$, I non può essere calcolato, ovvero il circuito equivalente di Norton del circuito formato da $\underline{H}$ e V_3 non esiste.

Se $H_{11} = 0\,\Omega$ infatti si ha che

$$V_{\underline{H}}^{(1)} = H_{11} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{12} V_{\underline{H}}^{(2)} = H_{12} V_3 = 6\,\text{V}$$

indipendentemente da $I_{\underline{H}}^{(1)}$, ovvero il bipolo formato da $\underline{H}$ e V_3 è equivalente ad un generatore ideale di tensione di $6\,\text{V}$.

L'ultimo punto dell'esercizio chiede di calcolare la potenza dissipata da $\underline{H}$ quando entrambi i sottocircuiti considerati sopra sono connessi al doppio bipolo, ovvero quando si considera il circuito seguente.



Dal punto precedente si ha $V_{\underline{H}}^{(1)} = 6\,\text{V}$; inoltre dalla somma dei bilanci delle correnti ai nodi (1) e (2) già considerata sopra si ha

$$(1) + (2): \;\; I_3 + \cancel{I_{\gamma V_{R4}}} + I_4 = I_{R4} + \cancel{I_{\gamma V_{R4}}} + I_{R5} + I_{\underline{H}}^{(1)}$$

$$I_{\underline{H}}^{(1)} = I_3 + I_4 - \frac{V_{\underline{H}}^{(1)}}{(1-\gamma)R_4} - \frac{V_{\underline{H}}^{(1)}}{R_5} = 10\,\text{mA}$$

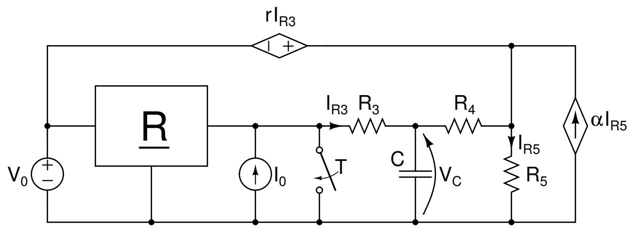
Inoltre

$$V_{\underline{H}}^{(2)} = V_3 = 4\,\text{V}, \quad I_{\underline{H}}^{(2)} = H_{21} I_{\underline{H}}^{(1)} + H_{22} V_{\underline{H}}^{(2)} = -2\,\text{mA}$$

La potenza dissipata dal doppio bipolo vale quindi

$$P_{\underline{H}} = V_{\underline{H}}^{(1)} I_{\underline{H}}^{(1)} + V_{\underline{H}}^{(2)} I_{\underline{H}}^{(2)} = 52\,\text{mW}$$

Esercizio 2



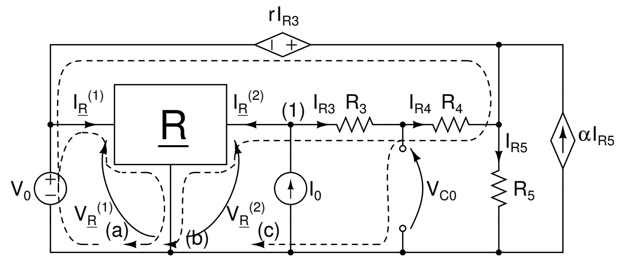
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $\underline{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ kΩ, $R_3 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_5 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $r = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 10\,\mathrm{nF}$, $\alpha = 1/3$, $V_0 = 10\,\mathrm{V}$, $I_0 = 1{,}25\,\mathrm{mA}$.

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T è aperto ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore T si chiude.

Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$ ai capi del condensatore.

Soluzione

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T è aperto e, per via dell'ipotesi che il circuito sia a regime, si ha $I_C = 0\,\mathrm{A}$; sia la capacità C che l'interruttore T sono assimilabili a circuiti aperti. Il circuito da considerare è il seguente.



Si indichino con $V_{\underline{R}}^{(1)}$ e $I_{\underline{R}}^{(1)}$ tensione e corrente alla porta 1 di $\underline{R}$, e con $V_{\underline{R}}^{(2)}$ e $I_{\underline{R}}^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2. Dal nodo (1)

$$(1):\ I_0 = I_{\underline{R}}^{(2)} + I_{R3}, \quad I_{\underline{R}}^{(2)} = I_0 - I_{R3}$$

Inoltre, $I_{R4} = I_{R3}$. Il circuito è risolto considerando i bilanci delle tensioni alle maglie indicate con (a) e (b).

$$(a):\ V_0 = R_{11} I_{\underline{R}}^{(1)} + R_{12} I_{\underline{R}}^{(2)}, \quad I_{\underline{R}}^{(1)} = \frac{V_0}{R_{11}} - \frac{R_{12}}{R_{11}}\left(I_0 - I_{R3}\right)$$

$$(b):\ V_0 + r\,I_{R3} + R_4 I_{R4} + R_3 I_{R3} = V_{\underline{R}}^{(2)}$$

$$V_0 + r\,I_{R3} + R_4 I_{R3} + R_3 I_{R3} = R_{21} I_{\underline{R}}^{(1)} + R_{22} I_{\underline{R}}^{(2)}$$

$$V_0 + r\,I_{R3} + R_4 I_{R3} + R_3 I_{R3} = \frac{R_{21}}{R_{11}} V_0 - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{11}}\left(I_0 - I_{R3}\right) + R_{22} I_0 - R_{22} I_{R3}$$

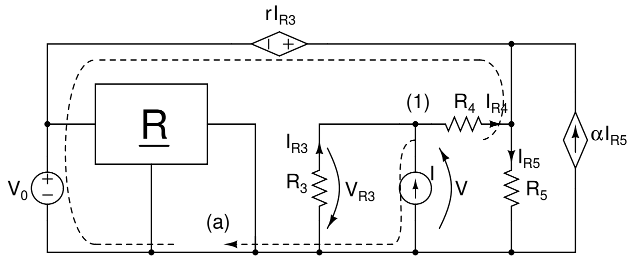
$$I_{R3} = \frac{-V_0 + \dfrac{R_{21}}{R_{11}} V_0 - \dfrac{R_{12}R_{21}}{R_{11}} I_0 + R_{22} I_0}{r + R_4 + R_3 - \dfrac{R_{12}R_{21}}{R_{11}} + R_{22}} = -5\,\mathrm{mA}$$

La tensione V_{C0} si può ottenere dal bilancio delle tensioni alla maglia (c)

$$(c):\ V_0 + r\,I_{R3} + R_4 I_{R4} = V_{C0}$$

$$V_{C0} = V_0 + (r + R_4)\, I_{R3} = -5\,\mathrm{V}$$

All'istante $t = t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T si chiude e comincia il transitorio di carica (o scarica) di C. Per il calcolo di tale transitorio, si ricorra all'equivalente di Thevenin del circuito connesso alla capacità. Si supponga quindi di sostituire alla capacità stessa un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi. Il circuito da considerare è il seguente, dove il generatore di corrente I_0 è stato omesso in quanto chiuso in corto circuito dall'interruttore T, e quindi non influisce su alcuna grandezza elettrica del circuito.



La tensione cercata V è uguale e $V = -V_{R3} = -R_3 I_{R3}$. Dal nodo (1) si ha

$$(1):\ I_{R3} + I = I_{R4}$$

mentre considerando il bilancio delle tensioni alla maglia (a) è possibile risolvere il circuito.

$$(a):\ V_0 + r\, I_{R3} + R_4 I_{R4} + R_3 I_{R3} = 0\,\mathrm{V}$$

$$V_0 + r\, I_{R3} + R_4 I_{R3} + R_4 I + R_3 I_{R3} = 0\,\mathrm{V}$$

$$I_{R3} = -\frac{V_0 + R_4 I}{r + R_4 + R_3}$$

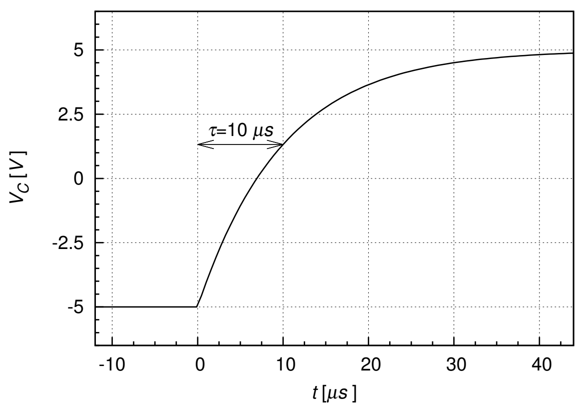
da cui

$$V = -R_3 I_{R3} = \underbrace{\frac{R_3}{r + R_4 + R_3} V_0}_{V^{(eq)} = 5\,\mathrm{V}} + \underbrace{\frac{R_3 R_4}{r + R_4 + R_3}}_{R^{(eq)} = 1\,\mathrm{k}\Omega} I$$

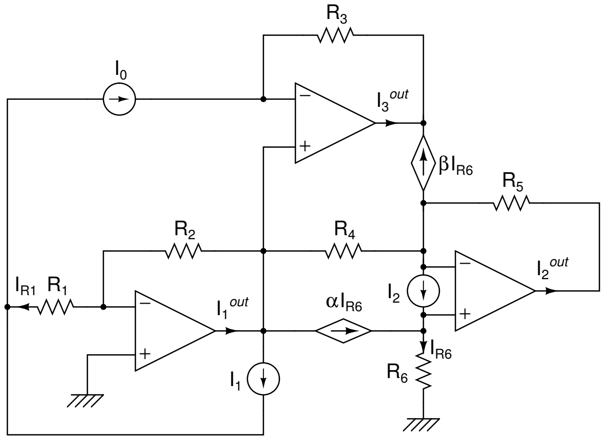
La tensione $V_c(t)$ può essere ricavate dalla formula del transitorio del primo ordine

$$V_c(t) = \begin{cases} V_{C0} = -5\,\mathrm{V}, & t < t_0 = 0\,\mathrm{s} \\ V^{(eq)} + \left(V_{C0} - V^{(eq)}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = 5 - 10 e^{-\frac{t}{\tau}}\,\mathrm{V}, & t \geq t_0 = 0\,\mathrm{s} \end{cases}$$

con $\tau = R^{(eq)} C = 10\,\mu\mathrm{s}$. L'andamento della tensione nel tempo è quello dato dalla figura seguente.



Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_6 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $I_0 = 3{,}5\,\mathrm{mA}$, $I_1 = 1\,\mathrm{mA}$, $I_2 = 2\,\mathrm{mA}$, $\alpha = 1/3$, $\beta = 2/3$.

Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Determinare:

- le correnti I_1^{out}, I_2^{out} e I_3^{out} di uscita degli amplificatori operazionali.;
- la regione di funzionamento (attiva o passiva) dei generatori ideali di corrente I_0, I_1 e I_2.

Soluzione

Si considerino i versi delle tensioni e delle correnti come indicato in figura. Si consideri inoltre che per tutti gli amplificatori operazionali la corrente agli ingressi sia nulla e che la tensione ai due ingressi sia uguale per via del corto circuito virtuale.

Dal nodo (1), si ha $I_{R1} = I_0 - I_1$; dal nodo (2) si ha $I_2 + \alpha\, I_{R6} = I_{R6}$, da cui

$$I_{R6} = \frac{I_2}{1-\alpha} = 3\,\mathrm{mA}$$

Ora è possibile considerare le tensioni e correnti sui tre amplificatori operazionali. Per l'operazionale 1, si ha $V_1^- = V_1^+ = 0\,\mathrm{V}$. Segue che

$$V_1^{out} = V_1^- + R_2 I_{R2} = V_1^- + R_2 I_{R1} = V_1^- + R_2(I_0 - I_1) = 5\,\mathrm{V}$$

$$I_1^{out} = I_1 + \alpha\, I_{R6} - I_{R4} + I_{R2} = \cancel{I_1} + \frac{\alpha}{1-\alpha} I_2 - I_{R4} + I_0 - \cancel{I_1}$$

Per determinare I_1^{out} è necessario determinare I_{R4}, che si può ottenere considerando che per l'operazionale indicato con 2 si ha $V_2^- = V_2^+ = R_6 I_{R6} = 6\,\mathrm{V}$, ovvero

$$I_{R4} = \frac{V_2^- - V_1^{out}}{R_4} = 1\,\mathrm{mA}, \quad I_1^{out} = 4\,\mathrm{mA}$$

Inoltre, dato che la corrente di ingresso dell'amplificatore operazione è nulla, si ha

$$I_2^{out} = I_{R5} = \beta\, I_{R6} + I_{R4} + I_2 = 4{,}5\,\mathrm{mA}$$

Infine, per l'operazionale 3 è immediato osservare che

$$I_3^{out} = I_{R3} - \beta\, I_{R6} = -I_0 - \beta\, I_{R6} = -5{,}5\,\mathrm{mA}$$

Per risolvere il secondo punto dell'esercizio è necessario calcolare le tensioni ai capi dei tre generatori di corrente. Per quanto riguarda il primo si ha

$$V_{I0} - R_1 I_{R1} = V_3^- - V_1^-, \quad V_{I0} = V_1^{out} + R_1 I_{R1} = V_1^{out} + R_1(I_0 - I_1) = 10\,\mathrm{V}$$

dunque la potenza erogata da I_0 vale $P_{I0} = V_{I0} I_0 > 0\,\mathrm{W}$. Il generatore I_0 funziona in regione attiva.

Per il generatore I_1 si ha

$$V_{I1} + R_1 I_{R1} = V_1^- - V_1^{out}, \quad V_{I1} = R_1 I_{R1} - V_1^{out} = -10\,\mathrm{V}$$

e $P_{I1} = V_{I1} I_1 < 0\,\mathrm{W}$. Il generatore I_1 funziona in regione passiva.

Per quanto riguarda I_2, è immediato concludere che $V_{I2} = 0\,\mathrm{V}$, e quindi $P_{I2} = 0\,\mathrm{W}$. Il generatore I_2 non eroga né assorbe potenza.