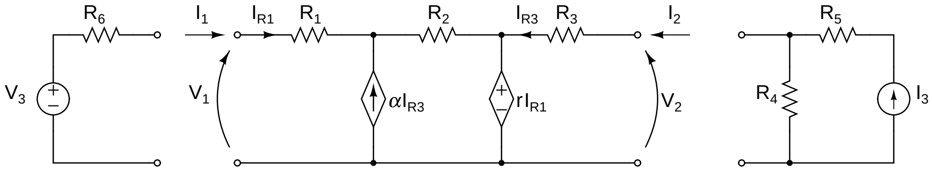
Esame di Teoria dei Circuiti - 26 marzo 2010 (Soluzione)

Esercizio 1

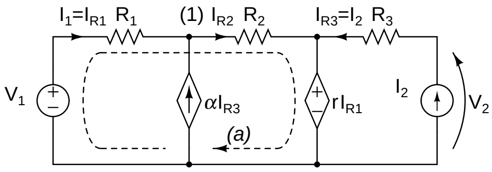


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $r = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 2$, $R_4 = R_5 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $I_3 = 3\,\mathrm{mA}$, $R_6 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $V_3 = 6\,\mathrm{V}$. Calcolare:

- la descrizione del due porte tramite matrice ibrida $\underline{H}$, definita come $\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \underline{H} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 1 del due porte calcolato al punto precedente, quando alla porta 2 viene collegato il circuito formato dal generatore ideale di corrente I_3 e le resistenze R_4 e R_5, come mostrato in figura;
- la potenza dissipata dal due porte quando entrambi i circuiti formati da I_3, V_3, R_4, R_5 e R_6 vengono collegati al due porte stesso.

Soluzione

Per trovare la matrice ibrida $\underline{H}$ si supponga di collegare al due porte il generatore ideale di tensione V_1 ed il generatore ideale di corrente I_2, e quindi di calcolare la corrente I_1 e la tensione V_2. Si definisca inoltre un verso arbitrario per la corrente I_{R2}.



Dal circuito si ricava facilmente che

$$I_1 = I_{R1}$$

$$V_2 = rI_{R1} + R_3 I_{R3} = rI_{R1} + R_3 I_2$$

Per determinare la matrice $\underline{H}$ è quindi sufficiente determinare la corrente I_{R1}.

Si consideri il sistema costituito dalle equazioni di bilancio delle correnti al nodo (1) e delle tensioni alla maglia (a)

$$(1): \quad I_{R1} + \alpha I_2 = I_{R2}$$

$$(a): \quad V_1 = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + rI_{R1}$$

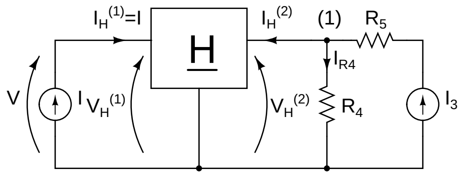
Usando il valore di I_{R2} trovato dalla prima equazione nella seconda, si ha

$$V_1 = R_1 I_{R1} + R_2 (I_{R1} + \alpha I_2) + rI_{R1}$$

$$I_1 = I_{R1} = \underbrace{\frac{1}{R_1 + R_2 + r}}_{H_{11} = 0.25\,\mathrm{m\Omega^{-1}}} V_1 \underbrace{- \frac{\alpha R_2}{R_1 + R_2 + r}}_{H_{12} = -1} I_2$$

$$V_2 = rI_{R1} + R_3 I_2 = \underbrace{\frac{r}{R_1+R_2+r}}_{H_{21}=\frac{1}{4}} V_1 + \left(\underbrace{R_3 - \frac{\alpha r R_2}{R_1+R_2+r}}_{H_{22}=1\,\mathrm{k}\Omega}\right) I_2$$

Per il secondo punto dell'esercizio, si consideri il seguente circuito, dove per calcolare il circuito equivalente di Thevenin si è collegato alla porta 1 un generatore ideale di corrente I



Si indichino con $V_H^{(1)}$ e $I_H^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{H}$, e con $V_H^{(2)}$ e $I_H^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, con $I_H^{(1)} = I$ e $V_H^{(1)} = V$. Dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ha

$$I_H^{(2)} = I_{R5} - I_{R4} = I_3 - \frac{V_H^{(2)}}{R_4}$$

Da questa, e ricavando $V_H^{(2)} = H_{21}V_H^{(1)} + H_{22}I_H^{(2)} = H_{21}V + H_{22}I_H^{(2)}$ dalla seconda equazione caratteristica di $\underline{H}$, si ha

$$I_H^{(2)} = I_3 - \frac{H_{21}}{R_4}V - \frac{H_{22}}{R_4}I_H^{(2)}$$

$$I_H^{(2)} = \frac{1}{1+\frac{H_{22}}{R_4}} I_3 - \frac{H_{21}}{R_4\left(1+\frac{H_{22}}{R_4}\right)} V = \frac{R_4}{R_4+H_{22}} I_3 - \frac{H_{21}}{R_4+H_{22}} V$$

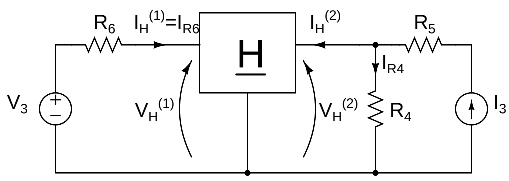
che sostituita nella prima equazione caratteristica, ovvero $I = I_H^{(1)} = H_{11}V_H^{(1)} + H_{12}I_H^{(2)}$, permette di ricavare V

$$I = H_{11}V + H_{12}I_H^{(2)} = H_{11}V + \frac{H_{12}R_4}{R_4+H_{22}} I_3 - \frac{H_{12}H_{21}}{R_4+H_{22}} V$$

$$\left(H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{R_4+H_{22}}\right) V = I - \frac{H_{12}R_4}{R_4+H_{22}} I_3$$

$$V = \underbrace{-\frac{H_{12}R_4}{R_4+H_{22}} \frac{1}{H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{R_4+H_{22}}} I_3}_{V^{(eq)} = 6\,\mathrm{V}} + \underbrace{\frac{1}{H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{R_4+H_{22}}}}_{R^{(eq)} = 3\,\mathrm{k}\Omega} I$$

Per l'ultimo punto, il circuito da considerare è il seguente



Ripetendo lo stesso procedimento eseguito al punto precedente, si arriva a

$$V_H^{(1)} = -\frac{H_{12}R_4}{R_4+H_{22}}\frac{1}{H_{11}-\dfrac{H_{12}H_{21}}{R_4+H_{22}}}I_3 + \frac{1}{H_{11}-\dfrac{H_{12}H_{21}}{R_4+H_{22}}}I_H^{(1)}$$

che messa a sistema con l'equazione di bilancio delle tensioni alla maglia di sinistra $I_H^{(1)} = \dfrac{V_3 - V_H^{(1)}}{R_6}$ permette di risolvere completamente il circuito.

$$R_6 I_H^{(1)} = V_3 - V_H^{(1)} = V_3 + \frac{H_{12}R_4}{R_4+H_{22}}\frac{1}{H_{11}-\dfrac{H_{12}H_{21}}{R_4+H_{22}}}I_3 - \frac{1}{H_{11}-\dfrac{H_{12}H_{21}}{R_4+H_{22}}}I_H^{(1)}$$

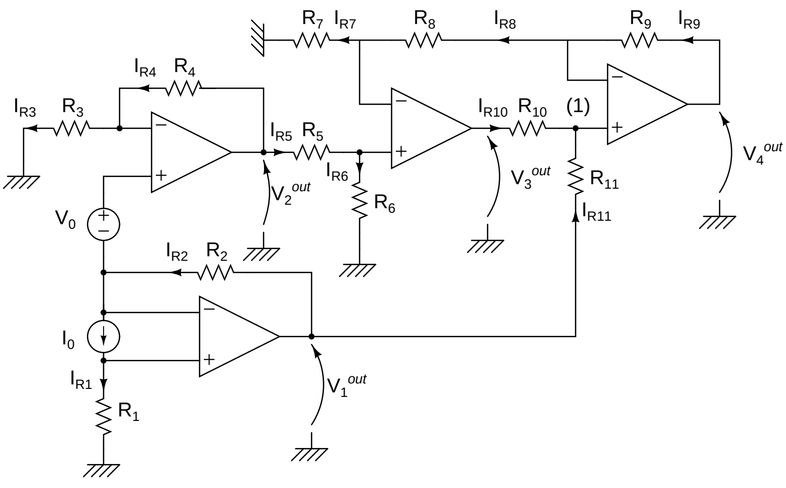
$$I_H^{(1)} = \frac{V_3 + \dfrac{H_{12}R_4}{R_4+H_{22}}\dfrac{1}{H_{11}-\dfrac{H_{12}H_{21}}{R_4+H_{22}}}I_3}{R_6 + \dfrac{1}{H_{11}-\dfrac{H_{12}H_{21}}{R_4+H_{22}}}} = 0\,\mathrm{mA}$$

da cui segue $V_H^{(1)} = 6\,\mathrm{V}$. Inoltre, da $I_H^{(1)} = H_{11}V_H^{(1)} + H_{12}I_H^{(2)}$, si ha $I_H^{(2)} = 1.5\,\mathrm{mA}$ e da $V_H^{(2)} = H_{21}V_H^{(1)} + H_{22}I_H^{(2)}$, si ha $V_H^{(2)} = 3\,\mathrm{V}$.

La potenza dissipata da $\underline{H}$ è data da

$$P_H = V_H^{(1)}I_H^{(1)} + V_H^{(2)}I_H^{(2)} = 4.5\,\mathrm{mW}$$

Esercizio 2



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_{11} = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $I_0 = 0.5\,\mathrm{mA}$, $V_0 = 2\,\mathrm{V}$. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni di uscita V_1^{out}, V_2^{out}, V_3^{out} e V_4^{out} degli amplificatori operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti indicati in figura. Dato che per ipotesi gli ingressi degli operazionali non assorbono corrente, si ha

$$I_{R1} = I_{R2} = I_0$$
$$I_{R3} = I_{R4}$$
$$I_{R5} = I_{R6}$$
$$I_{R7} = I_{R8} = I_{R9}$$
$$I_{R10} + I_{R11} = 0$$

Si consideri inoltre l'ipotesi di corto circuito virtuale per gli ingressi di ogni amplificatore operazionale. Per quanto riguarda l'operazionale 1 si ha

$$V_1^- = V_1^+ = R_1 I_{R1} = R_1 I_0$$

$$V_1^{out} = V_1^- + R_2 I_{R2} = (R_1 + R_2) I_0 = 1\,\mathrm{V}$$

Per l'operazionale 2 si ha

$$V_2^- = V_2^+ = V_0 + R_1 I_0$$

$$I_{R3} = I_{R4} = \frac{V_0 + R_1 I_0}{R3}$$

$$V_2^{out} = V_2^- + R_4 I_{R4} = (V_0 + R_1 I_0)\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = 5\,\mathrm{V}$$

L'ipotesi di corto circuito virtuali agli ingressi dell'operazionale 3 permette di calcolare la tensione di uscita V_4^{out}

$$V_3^- = V_3^+ = \frac{R_6}{R_5 + R_6} V_2^{out}$$

$$I_{R7} = I_{R8} = I_{R9} = \frac{V_3^-}{R_7} = \frac{R_6}{R_7(R_5 + R_6)} V_2^{out}$$

$$V_4^{out} = R_7 I_{R7} + R_8 I_{R8} + R_9 I_{R9} = \frac{V_3^-}{R_7} = \frac{R_6(R_7 + R_8 + R_9)}{R_7(R_5 + R_6)} V_2^{out} = 7.5\,\mathrm{V}$$

mentre l'ipotesi di corto circuito virtuali agli ingressi dell'operazionale 4 permette di calcolare la tensione di uscita V_3^{out}

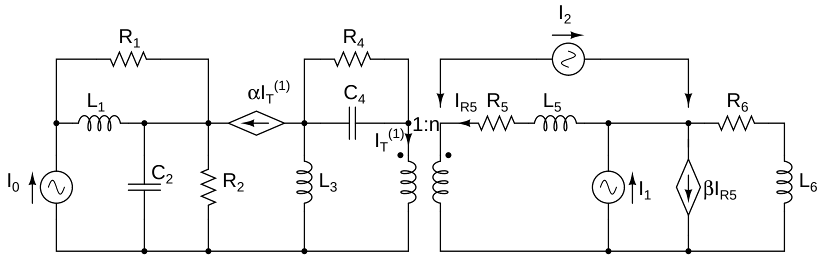
$$I_{R10} = \frac{V_3^{out} - V_4^+}{R_{10}}, \quad I_{R11} = \frac{V_1^{out} - V_4^+}{R_{11}}$$

$$I_{R10} + I_{R11} = \frac{V_3^{out}}{R_{10}} + \frac{V_1^{out}}{R_{11}} - V_4^+\left(\frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{11}}\right) = 0$$

$$V_4^+ = V_4^- = \frac{R_6(R_7 + R_8)}{R_7(R_5 + R_6)} V_2^{out}$$

$$V_3^{out} = V_4^+\left(1 + \frac{R_{10}}{R_{11}}\right) - \frac{R_{10}}{R_{11}} V_1^{out} = \left(1 + \frac{R_{10}}{R_{11}}\right)\frac{R_6(R_7 + R_8)}{R_7(R_5 + R_6)} V_2^{out} - \frac{R_{10}}{R_{11}} V_1^{out} = 9\,\mathrm{V}$$

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$\omega = 200\,\mathrm{rad/s}$, $R_1 = 400\,\Omega$, $L_1 = 2\,\mathrm{H}$, $C_2 = 16.6\,\mu\mathrm{F} = 16.6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}$, $R_2 = 300\,\Omega$, $L_3 = 100\,\mathrm{mH}$, $R_4 = 200\,\Omega$, $C_4 = 25\,\mu\mathrm{F} = 25 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}$, $R_5 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $L_5 = 17.5\,\mathrm{H}$, $R_6 = 2.5\,\mathrm{k}\Omega$, $L_6 = 12.5\,\mathrm{H}$, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{2}{5}$, $n = 5$, $I_0(t) = 350\cos(\omega t - \pi/2)\mu\mathrm{A} = 350\cos(\omega t - \pi/2) \cdot 10^{-6}\mathrm{A}$, $I_1(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4)\mathrm{mA}$.

Calcolare:

- la potenza attiva e reattiva ai capi dell'induttore L_6;
- supponendo di collegare al circuito un generatore ideale di corrente I_2 come indicato in figura, determinare per quale valore di corrente I_2 la potenza calcolata al punto precedente si annulla.

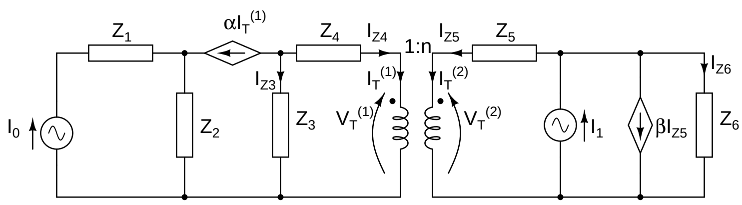
Soluzione

Poiché l'induttore è un circuito senza perdite, la potenza attiva dissipata da L_6 è nulla. Per calcolare invece la potenza reattiva scambiata con il circuito durante il regime sinusoidale, si consideri il fasore della corrente I_{L6}; la potenza complessa su L_6 è data da

$$N_{L6} = \frac{1}{2} V_{L6} I_{L6}^* = \frac{1}{2} j\omega L_6 I_{L6} I_{L6}^* = \frac{1}{2} j\omega L_6 \left|I_{L6}\right|^2$$

dove I_{L6}^* è il complesso coniugato del fasore della corrente I_{L6}. È quindi sufficiente calcolare la corrente I_{L6} tramite metodo dei fasori.

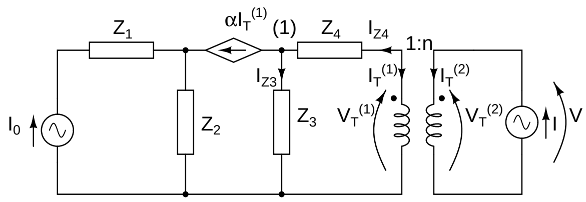
Nel dominio dei fasori il circuito può essere ridisegnato come



Si determini I_{Z6}, con

$$
\begin{aligned}
&Z_1 = R_1 // j\omega L_1 = \frac{j\omega R_1 L_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{j\omega R_1 L_1 (R_1 - j\omega L_1)}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} = 200\,\Omega + 200j\,\Omega \\
&Z_2 = R_2 // \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{\dfrac{R_2}{j\omega C_2}}{R2 + \dfrac{1}{j\omega C_2}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} = \frac{R_2(1 - j\omega R_2 C_2)}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2} = 150\,\Omega - 150j\,\Omega \\
&Z_3 = j\omega L_3 = 20j\,\Omega \\
&Z_4 = R_4 // \frac{1}{j\omega C_4} = \frac{\dfrac{R_4}{j\omega C_4}}{R2 + \dfrac{1}{j\omega C_4}} = \frac{R_4}{1 + j\omega R_4 C_4} = \frac{R_4(1 - j\omega R_4 C_4)}{1 + \omega^2 R_4^2 C_4^2} = 100\,\Omega - 100j\,\Omega \\
&Z_5 = R_5 + j\omega L_5 = 1\,\mathrm{k}\Omega + 3.5j\,\mathrm{k}\Omega \\
&Z_6 = R_6 + j\omega L_6 = 2.5\,\mathrm{k}\Omega + 2.5j\,\mathrm{k}\Omega \\
&I_0 = 350\,e^{-j\pi/2}\,\mu\mathrm{A} = -350j\,\mu\mathrm{A} \\
&I_1 = 2\sqrt{2}\,e^{-j\pi/4}\,\mathrm{mA} = 2\,\mathrm{mA} + 2j\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

Per semplificare l'esercizio, è possibile calcolare l'equivalente di Thevenin del sottocircuito a sinistra del trasformatore. Si supponga quindi di connettere un genratore di corrente I al circuito, come mostrato in figura, e di calcolarne la tensione V.



Dal bilancio delle correnti al nodo (1)

$$I_{Z4} = I_{Z3} + \alpha I_T^{(1)} = 0$$

da cui, notando che $I_{Z4} = -I_T^{(1)}$, si ha $I_{Z3} = -(1+\alpha)\,I_T^{(1)}$.

Considerando inoltre le equazioni del trasformatore

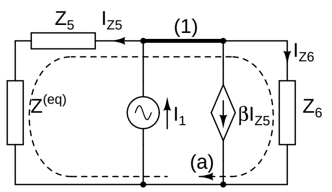
$$\begin{cases} V_T^{(2)} = nV_T^{(1)} \\ I_T^{(1)} = -nI_T^{(2)} \end{cases}$$

e che $V_T^{(1)} = Z_3 I_{Z3} + Z_4 I_{Z4}$, si può calcolare V come

$$V = V_T^{(2)} = nV_T^{(1)} = -n\left((1+\alpha)\,Z_3 + Z_4\right) I_T^{(1)} = n^2\left((1+\alpha)\,Z_3 + Z_4\right) I = V^{(eq)} + Z^{(eq)} I$$

con $V^{(eq)} = 0$ e $Z^{(eq)} = n^2\left((1+\alpha)\,Z_3 + Z_4\right) = 2.5\,\mathrm{k}\Omega$.

Si consideri ora il circuito semplificato



che può essere risolto mettendo a sistema il bilancio delle correnti al nodo (1) e delle tensioni alla maglia (a).

$$(1) \qquad I_1 = I_{Z5} + I_{Z6} + \beta I_{Z5}$$
$$(a) \quad \left(Z^{(eq)} + Z_5\right) I_{Z5} - Z_6 I_{Z6} = 0$$

Dalla (1) si ricava

$$I_{Z5} = \frac{I_1 - I_{Z6}}{1+\beta}$$

che sostituito in (a)

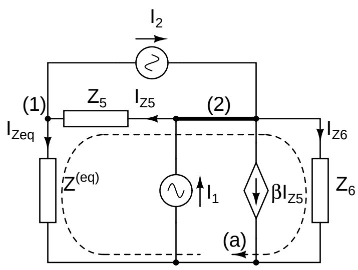
$$\left(Z^{(eq)} + Z_5\right) \frac{I_1 - I_{Z6}}{1+\beta} - Z_6 I_{Z6} = 0$$

$$I_{Z6} = \frac{\dfrac{Z^{(eq)} + Z_5}{1+\beta} I_1}{\dfrac{Z^{(eq)} + Z_5}{1+\beta} + Z_6} = \frac{Z^{(eq)} + Z_5}{Z^{(eq)} + Z_5 + (1+\beta) Z_6} = 1\,\mathrm{mA} + 1j\,\mathrm{mA}$$

In conclusione

$$P_{L6} = 0\,\mathrm{W}, \quad Q_{L6} = \frac{j\omega \left|I_{Z5}\right|^2}{2} = 2.5\,\mathrm{mVAR}$$

Per risolvere il secondo punto dell'esercizio, si connetta il generatore I_2 al circuito. Per avere $N_{L6} = 0$, è necessario che $I_{Z6} = 0$. Si determini quindi per quale valore di I_2 la corrente I_{Z6} si annulla. Poiché la parte di sinistra del circuito rimane invariata, resta conveniente continuare ad usare il suo circuito equivalente di Thevenin.



Per risolvere il circuito è ora necessari mettere a sistema il bilancio delle correnti a entrambi i nodi (1) e (2) con il bilancio delle tensioni alla maglia (a).

$$(1) \qquad I_{Z5} = I_{Zeq} + I_2$$
$$(2) \qquad I_1 + I_2 = I_{Z5} + I_{Z6} + \beta I_{Z5}$$
$$(a) \quad Z^{(eq)} I_{Zeq} + Z_5 I_{Z5} - Z_6 I_{Z6} = 0$$

Dalla (2)

$$I_{Z5} = \frac{I_1 + I_2 - I_{Z6}}{1+\beta}$$

che sostituita nella (1)

$$I_{Zeq} = \frac{I_1 + I_2 - I_{Z6}}{1+\beta} - I_2 = \frac{I_1 - \beta I_2 - I_{Z6}}{1+\beta}$$

Sostituendo entrambe le espressioni in (a), si ricava I_{Z6}

$$Z^{(eq)} \frac{I_1 - \beta I_2 - I_{Z6}}{1+\beta} + Z_5 \frac{I_1 + I_2 - I_{Z6}}{1+\beta} - Z_6 I_{Z6}$$

$$\left(\frac{Z^{(eq)}}{1+\beta}+\frac{Z_5}{1+\beta}+Z_6\right)I_{Z6}=Z^{(eq)}\frac{I_1-\beta I_2}{1+\beta}+Z_5\frac{I_1+I_2}{1+\beta}$$

$$I_{Z6}=\frac{\left(Z^{(eq)}+Z_5\right)I_1-\left(\beta Z^{(eq)}-Z_5\right)I_2}{Z^{(eq)}+Z_5+(1+\beta)\,Z_6}$$

Imponendo $I_{Z6}=0$, si ha

$$I_2=\frac{Z^{(eq)}+Z_5}{\beta Z^{(eq)}-Z_5}I_1=-4\,\mathrm{mA}$$

Il valore cercato della corrente è quindi $I_2(t)=4\cos(\omega t+\pi)\mathrm{mA}$.