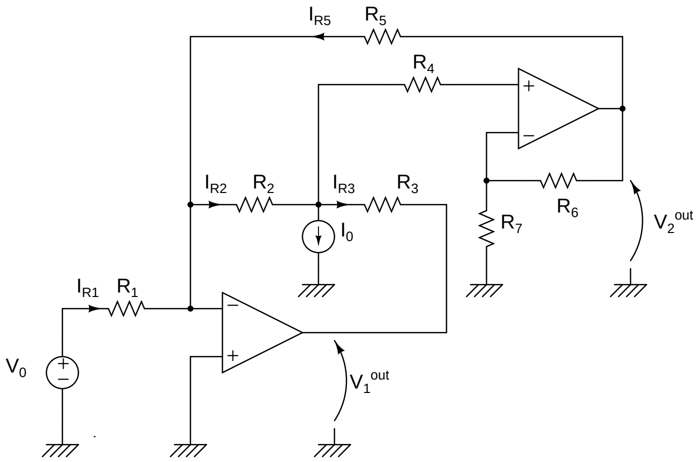
Esame di Teoria dei Circuiti - 3 settembre 2008 - Soluzione

Esercizio 1



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_7 = 4$ kΩ, $V_0 = 9$ V, $I_0 = 3$ mA. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni di uscita degli operazionali V_1^{out} e V_2^{out}.

Soluzione

Dato che gli ingressi degli operazionali non assorbono corrente si può scrivere

$$V_1^+ = 0 = V_1^-; \quad I_{R1} = \frac{V_0}{R_1}; \quad I_{R5} = \frac{V_2^{out}}{R_5}$$

$$I_{R2} = I_{R1} + I_{R5}; \quad I_{R4} = 0; \quad I_{R3} = I_{R2} - I_0$$

ne segue che

$$V_2^+ = V_1^- - R_2 I_{R2} + R_4 I_{R4} = -V_0 \frac{R_2}{R_1} - V_2^{out} \frac{R_2}{R_5}$$

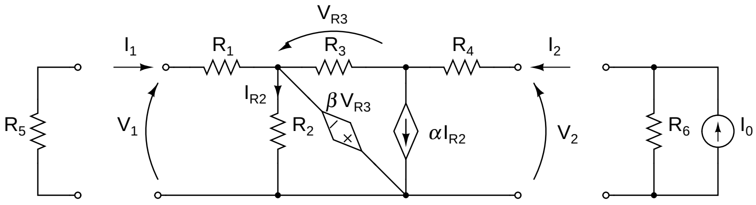
e, dato che $V_2^- = V_2^{out} \dfrac{R_7}{R_6 + R_7} = V_2^+$, segue che

$$V_2^{out} = -V_0 \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\dfrac{R_2}{R_5} + \dfrac{R_7}{R_6 + R_7}} = -6 \text{ V}$$

Per l'operazionale 1 invece si ha

$$V_1^{out} = V_1^- - R_2 I_{R2} - R_3 I_{R3} = -V_0 \frac{R_2}{R_1} - V_2^{out} \frac{R_2}{R_5} + I_0 R_3 - V_0 \frac{R_3}{R_1} - V_2^{out} \frac{R_3}{R_5} = 6 \text{ V}$$

Esercizio 2

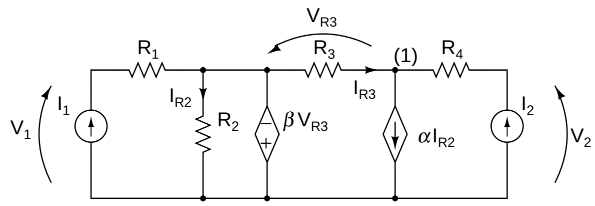


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 4\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 12\ \text{k}\Omega$, $R_3 = 4\ \text{k}\Omega$, $R_4 = 1\ \text{k}\Omega$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{3}{2}$, $I_0 = 3$ mA, $R_5 = 1\ \text{k}\Omega$, $R_6 = 3\ \text{k}\Omega$. Calcolare:

- la matrice R delle resistenze del due-porte
- la potenza dissipata sulla resistenza R_6 quando alla porta 1 viene collegata la resistenza R_5 e alla porta 2 il generatore ideale di corrente I_0 e la resistenza R_6, come indicato in figura.

Soluzione

Per trovare la matrice R si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di corrente I_1 e I_2 e di calcolare le tensione V_1 e V_2 ai loro capi:



Dalla figura si può ricavare che:

$$V_1 = R_1 I_1 - \beta V_{R3} = R_1 I_1 - \beta R_3 I_{R3}$$
$$V_2 = R_4 I_2 - V_{R3} - \beta V_{R3} = R_4 I_2 - (1+\beta) R_3 I_{R3}$$

Notando che $I_{R2} = -\beta V_{R3}/R_2 = -\beta R_3 I_{R3}/R_2$, dal bilancio delle correnti al nodo (1) si può ricavare il valore della corrente I_{R3}:

$$I_{R3} + I_2 = \alpha I_{R2} = -\alpha\ \beta\ I_{R3}\ \frac{R_3}{R_2}$$

$$I_{R3} = -I_2 \frac{1}{1 + \alpha\beta\dfrac{R_3}{R_2}}$$

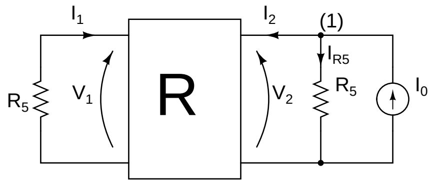
Quindi

$$V_1 = \underbrace{R_1}_{R_{11}}\ I_1 + \underbrace{\frac{\beta R_3}{1 + \alpha\beta\dfrac{R_3}{R_2}}}_{R_{12}}\ I_2, \quad V_2 = \underbrace{\left(R_4 + (1+\beta)\frac{\beta R_3}{1 + \alpha\beta\dfrac{R_3}{R_2}} \right)}_{R_{22}}\ I_2$$

Numericamente

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot 10^3\ \ \Omega$$

Per il secondo punto dell'esercizio, il circuito da considerare è il seguente:



Date le equazione del due porte:

$$\begin{cases} V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 \\ V_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \end{cases}$$

ed osservando che $V_1 = -R_5 I_1$, dalla prima equazione è possibile ricavare I_1 in funzione di I_2:

$$-R_5 I_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2, \quad I_1 = -\frac{R_{12}}{R_5 + R_{11}} I_2$$

Inoltre, dal bilancio delle correnti al nodo (1) è possibile ricavare I_2:

$$I_2 = I_0 - \frac{V_2}{R_6}$$

Sostituendo questa due epressioni nella seconda equazione del due porte, è possibile ricavare la tensione V_2:

$$V_2 = \left(R_{22} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_5 + R_{11}}\right) I_2 = \left(R_{22} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_5 + R_{11}}\right)\left(I_0 - \frac{V_2}{R_6}\right)$$

$$V_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{R_6}\left(R_{22} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_5 + R_{11}}\right)} \left(R_{22} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_5 + R_{11}}\right) I_0 = 6 \text{ V}$$

$$P_{R6} = \frac{{V_2}^2}{R_6} = 12 \text{ mW}$$

Nota

Osservando che $R_{12} = 0$, si poteva semplificare direttamente la seconda equazione del due porte in

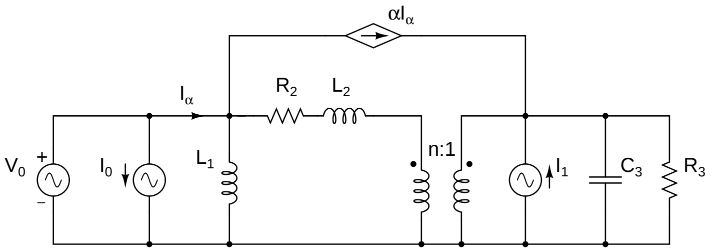
$$V_2 = R_{22} I_2$$

ed usando il bilancio delle correnti al nodo (1)

$$V_2 = R_{22}I_0 - V_2 \frac{R_{22}}{R_6}, \quad V_2 = \frac{R_{22}I_0}{1 + \frac{R_{22}}{R_6}} = 6 \text{ V}$$

da cui si ricava immediatamente la soluzione cercata.

Esercizio 3

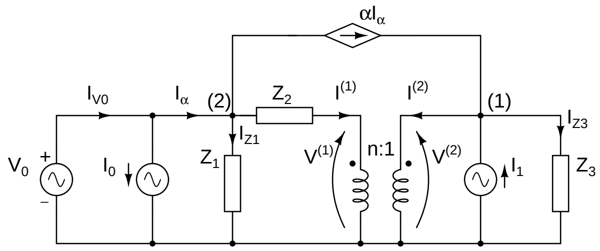


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$\omega = 50$ rad/s, $L_1 = 0.8$ H, $R_2 = 20\ \Omega$, $L_2 = 0.8$ H, $R_3 = 20\ \Omega$, $C_3 = 1$ mF $= 10^{-3}$ F, $\alpha = 3/2$, $n = 2$, $V_0 = 6 \cdot 10^{-1} \cos(\omega t)$ V, $I_0 = 10^{-1} \cos(\omega t - \pi/2)$ A, $I_1 = 3 \cdot 10^{-2} \cos(\omega t + \pi/2)$ A.

Calcolare la potenza attiva e reattiva erogata dal generatore ideale di tensione V_0.

Soluzione

Nel dominio dei fasori il circuito può essere ridisegnato come



con $Z_1 = 40j\ \Omega$, $Z_2 = 20 + 40j\ \Omega$, $Z_3 = 10 - 10j\ \Omega$, $V_0 = 6 \cdot 10^{-1}$ V, $I_0 = 10^{-1} e^{-j\pi/2} = -j \cdot 10^{-1}$ A, $I_1 = 3 \cdot 10^{-2} e^{j\pi/2} = 3j \cdot 10^{-2}$ A.

Per via della topologia circuitale, non è possibile semplificare il circuito sostituendo con il suo equivalente di Thevenine la parte di circuito che comprende il trasformatore e il sottocircuito collegato alla sua porta 2. Pertanto è necessario procedere con l'analisi circuitale classica, considerando tra le varie equazioni del circuito anche quella del trasformatore:

$$\begin{cases} V^{(1)} = nV^{(2)} \\ I^{(2)} = -nI^{(1)} \end{cases}$$

Dal bilancio delle correnti al nodo (1)

$$I_{Z_3} + I^{(2)} = I_1 + \alpha I_\alpha$$

e dato che $V^{(2)} = Z_3 I_{Z_3}$ è possibile ricavare $V^{(2)}$ e di conseguenza $V^{(1)}$ sfruttando le equazioni del trasformatore:

$$V^{(2)} = Z_3 \left(I_1 - I^{(2)} + \alpha I_\alpha \right)$$

$$V^{(1)} = nZ_3 \left(I_1 + nI^{(1)} + \alpha I_\alpha \right)$$

Inoltre

$$I^{(1)} = \frac{V_0 - V^{(1)}}{Z_2} = \frac{V_0}{Z_2} - n\frac{Z_3}{Z_2} I_1 - n^2 \frac{Z_3}{Z_2} I^{(1)} - n\frac{Z_3}{Z_2}\alpha I_\alpha$$

da cui segue che

$$I^{(1)} = \frac{V_0 - nZ_3 I_1 - nZ_3 \alpha I_\alpha}{Z_2 + n^2 Z_3}$$

Dal bilancio delle correnti al nodo (2) è ora possibile trovare I_α:

$$I_\alpha = I_{Z1} + \alpha I_\alpha + I^{(1)}$$

$$I_\alpha = \frac{V_0}{Z_1} + \alpha I_\alpha + \frac{V_0 - nZ_3 I_1}{Z_2 + n^2 Z_3} - \frac{nZ_3\alpha}{Z_2 + n^2 Z_3} I_\alpha$$

$$I_\alpha = \frac{\dfrac{V_0}{Z_1} + \dfrac{V_0 - nZ_3 I_1}{Z_2 + n^2 Z_3}}{1 - \alpha + \dfrac{nZ_3\alpha}{Z_2 + n^2 Z_3}} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{A}$$

La potenza complessa erogata dal generatore V_0 è definita come

$$N = P + iQ = \frac{1}{2} V_0 I_{V0}^*$$

dove I_{V0}^* il complesso coniugato di $I_{V0} = I_0 + I_\alpha = (5 - 10j) \cdot 10^{-2}$ A. Ne segue che

$$N = (1.5 + 3) \cdot 10^{-2}$$

con $P = 1.5 \cdot 10^{-2}$, $Q = 3 \cdot 10^{-2}$.