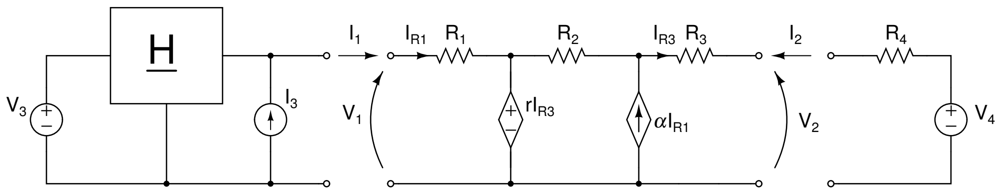
Esame di Teoria dei Circuiti – 3 Settembre 2010 (Soluzione)

Esercizio 1



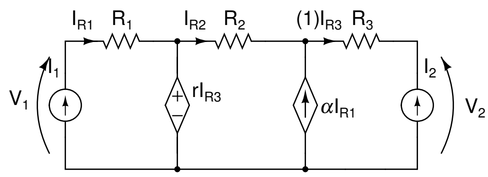
Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $r = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 3$, $V_3 = 1\,\mathrm{V}$, $I_3 = 2\,\mathrm{mA}$, $\underline{H} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{m\Omega^{-1}} & -1 \\ 2 & 5\,\mathrm{k\Omega} \end{pmatrix}$.

Calcolare:

- la descrizione del due porte evidenziato in figura tramite matrice delle resistenze $\underline{R}$;
- il circuito equivalente di Thevenin alla porta 2 del due porte calcolato al punto precedente, quando alla porta 1 vengono collegati il generatore ideale di tensione V_3, il generatore ideale di corrente I_3, ed il due porte $\underline{H}$, definito come $\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \underline{H} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$, come mostrato in figura;
- quale valore di tensione deve avere il generatore ideale V_4 affinché, collegando al due porte $\underline{R}$ calcolato in precedenza il circuito formato da V_3, I_3 e $\underline{H}$ alla porta 1 ed il circuito formato da R_4 e V_4 alla porta 2, la potenza dissipata da R_4 risulti nulla;
- la potenza $P_{\underline{H}}$ e $P_{\underline{R}}$ dissipata rispettivamente dai due porte $\underline{H}$ e $\underline{R}$ nelle stesse ipotesi del punto precedente.

Soluzione

Per trovare la matrice delle resistenze $\underline{R}$ si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di corrente I_1 e I_2, e quindi di calcolarne le tensioni V_1 e V_2 ai loro capi. Si definisca inoltre un verso arbitrario per la corrente I_{R2}.



Dal circuito in figura si ricava che $I_{R1} = I_1$ e $I_{R3} = -I_2$; inoltre

$$V_1 = R_1 I_{R1} + r I_{R3} = R_1 I_1 - r I_2$$

$$V_2 = -R_3 I_{R3} - R_2 I_{R2} + r I_{R3} = -\left(R_3 - r\right) I_{R3} - R_2 I_{R2} = -\left(R_3 - r\right) I_{R3} - R_2 I_{R2}$$

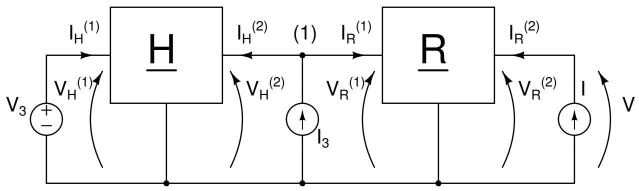
Dato che dal bilancio al nodo (1) si ha $I_{R2} = I_{R3} - \alpha I_{R1} = -I_2 - \alpha I_1$, si ha

$$V_2 = \left(R_3 - r\right) I_2 + R_2 \left(\alpha I_1 + I_2\right) = \alpha R_2 I_1 + \left(R_2 + R_3 - r\right) I_2$$

da cui è possibile ricavare la matrice $\underline{R}$:

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} R_1 & -r \\ \alpha R_2 & R_2 + R_3 - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,\mathrm{k}\Omega & -2\,\mathrm{k}\Omega \\ 3\,\mathrm{k}\Omega & 2\,\mathrm{k}\Omega \end{pmatrix}$$

Per il secondo punto dell'esercizio, si consideri il seguente circuito, dove per calcolare il circuito equivalente di Thevenin si è collegato alla porta 2 un generatore ideale di corrente I



Si indichino con $V_H^{(1)}$ e $I_H^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{H}$, con $V_H^{(1)} = V_3$, e con $V_H^{(2)}$ e $I_H^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2. Si indichi inoltre con $V_R^{(1)}$ e $I_r^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di $\underline{R}$, e con $V_R^{(2)}$ e $I_R^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2, con $I_R^{(2)} = I$, $V_R^{(2)} = V$.

Considerando $V_H^{(2)} = V_R^{(1)}$ assieme all'equazione di bilancio delle correnti al nodo (1) (da cui $I_3 = I_H^{(2)} + I_R^{(1)}$) è possibile determinare $I_R^{(1)}$

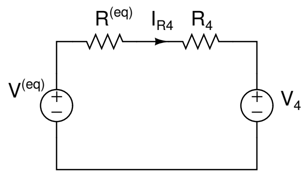
$$V_H^{(2)} = H_{21}V_H^{(1)} + H_{22}I_H^{(2)} = H_{21}V_H^{(1)} + H_{22}\left(I_3 - I_R^{(1)}\right) = R_{11}I_H^{(1)} + R_{12}I_R^{(2)} = V_R^{(1)}$$

$$I_R^{(1)} = \frac{H_{21}V_3 + H_{22}I_3 - R_{12}I}{H_{22} + R_{11}}$$

da cui si ha

$$V = R_{21}I_R^{(1)} + R_{22}I \;\;=\;\; \underbrace{R_{21}\frac{H_{21}V_3 + H_{22}I_3}{H_{22} + R_{11}}}_{V^{(eq)} = 6\,\mathrm{V}} + \Bigg(\underbrace{R_{22} - \frac{R_{12}R_{21}}{H_{22} + R_{11}}}_{R^{(eq)} = 3\,\mathrm{k}\Omega}\Bigg) I$$

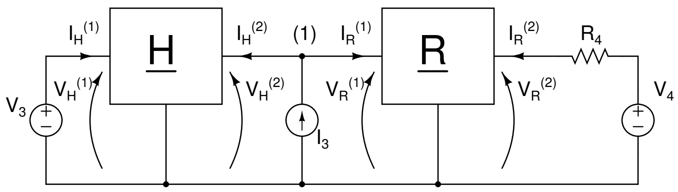
Il metodo più semplice per risolvere il punto successivo dell'esercizio è di collegare il generatore V_4 e la resistenza R_4 al circuito equivalente di Thevenin appena calcolato:



Per annullare la potenza dissipata su R_4 è necessario che $I_{R4} = 0$. È intuitivo che la soluzione cercata è

$$V_4 = V^{(eq)} = 6\,\mathrm{V}$$

Per risolvere l'ultimo punto dell'esercizio, si consideri il seguente circuito



Si chiede di calcolare la potenza dissipata da $\underline{H}$ e $\underline{R}$. Queste due potenze sono definite come

$$P_{\underline{H}} = V_H^{(1)} I_H^{(1)} + V_H^{(2)} I_H^{(2)}$$
$$P_{\underline{R}} = V_R^{(1)} I_R^{(1)} + V_R^{(2)} I_R^{(2)}$$

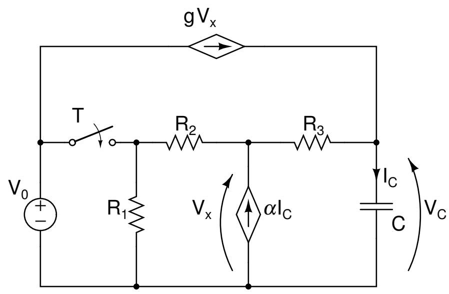
Dal punto precedente, sappiamo che $I_R^{(2)} = 0$. Più sopra si è anche calcolato $I_R^{(1)}$; modificando l'espressione trovata in modo da considerare $I_R^{(2)} = 0$, si ha

$$I_R^{(1)} = \frac{H_{21}V_3 + H_{22}I_3}{H_{22} + R_{11}} = 2\,\mathrm{mA}$$

da cui, dal bilancio delle correnti al nodo (1), si ha $I_H^{(2)} = I_3 - I_R^{(1)} = 0\,\mathrm{mA}$. Semplificando tutti i termini nulli, le potenze richieste valgono

$$P_{\underline{H}} = V_H^{(1)} I_H^{(1)} = H_{11} V_3^2 = 4\,\mathrm{mW}$$
$$P_{\underline{R}} = V_R^{(1)} I_R^{(1)} = R_{11} \left(I_R^{(1)}\right)^2 = 4\,\mathrm{mW}$$

Esercizio 2

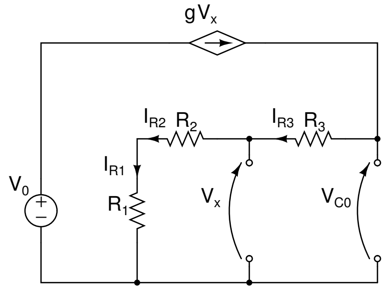


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $R_3 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $g = 1\,\mathrm{m}\Omega^{-1}$, $C = 3.3\,\mu\mathrm{F}$, $\alpha = 3/2$, $V_0 = 3\,\mathrm{V}$.

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{s}$ l'interruttore T è aperto ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore T si chiude. Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$.

Soluzione

Per $t < 0$ l'interruttore T è chiuso ed il circuito a regime, ovvero $I_C = 0$. Dunque anche il generatore di corrente controllato αI_C si può sostituire con un circuito aperto. Il circuito si semplifica come segue:



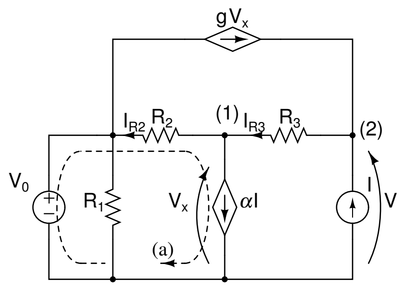
Si nota subito che $I_{R1} = I_{R2} = I_{R3} = gV_x$, con $V_x = (R_1 + R_2)\, gV_x$ e $V_{C0} = (R_1 + R_2 + R_3)\, gV_x$. Dalla prima equazione, l'unico valore di V_x possibile è

$$V_x = 0\,\mathrm{V}$$

da cui

$$V_{C0} = 0\,\mathrm{V}$$

All'istante $t = t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T si chiude e comincia il transitorio di carica/scarica di C. Per il calcolo di tale transitorio, si ricorra all'equivalente di Thevenin del circuito connesso alla capacità. Si supponga quindi di sostituire alla capacità stessa un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi. Il circuito da esaminare diventa il seguente:



dove, poiché $I_C = -I$, il generatore di corrente controllato αI_C è stato sostituito dal generatore di corrente controllato αI con verso opposto.

Dal bilancio delle correnti ai nodi (1) e (2) è possibile ricavare I_{R2} e I_{R3}

$$(2): \quad I_{R3} = gV_x + I$$

$$(1): \quad I_{R2} = I_{R3} - \alpha I = gV_x - (\alpha - 1)I$$

mentre dal bilancio delle tensioni alla maglia (a) è possibile ricavare il valore di V_x

$$(a): \quad V_0 + R_2 I_{R2} = V_x$$

$$V_0 + gR_2 V_x - R_2(\alpha - 1)I = V_x$$

$$V_x = \frac{V_0 - R_2(\alpha - 1)I}{1 - gR_2}$$

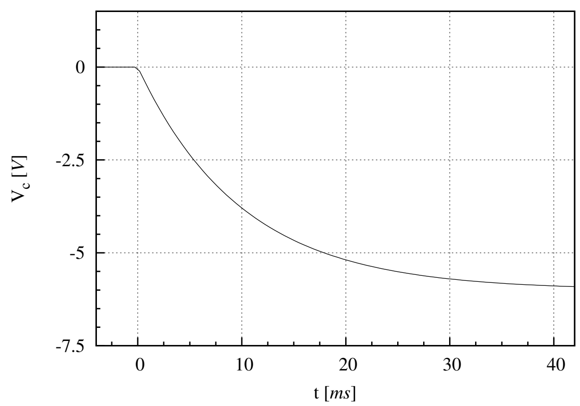
da cui è possibile ricavare V

$$V = V_x + R_3 I_{R3} = (1 + gR_3)\, V_x + R_3 I = \underbrace{\frac{1 + gR_3}{1 - gR_2}\, V_0}_{V^{(eq)} = -6\,\mathrm{V}} + \left(\underbrace{R_2\,(1 - \alpha)\, \frac{1 + gR_3}{1 - gR_2} + R_3}_{R^{(eq)} = 3\,\mathrm{k\Omega}}\right) I$$

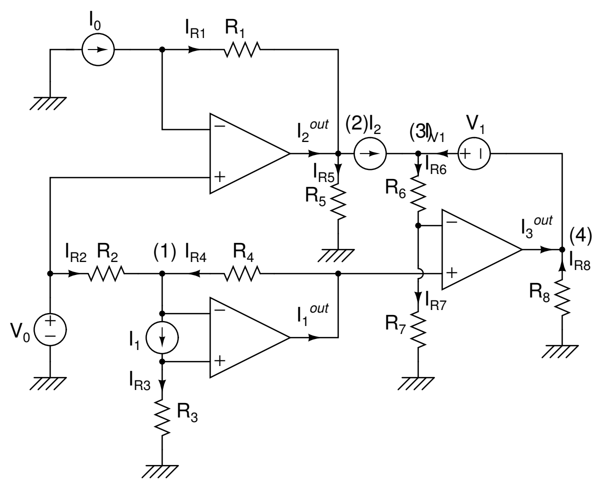
Per $t > t_0 = 0\,\text{sec}$ la tensione $V_C(t)$ è data quindi da

$$V_C(t) = V^{(eq)} + \left(V_{C0} - V^{(eq)}\right) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = -6 + 6e^{-\frac{t}{\tau}}\,\text{V}$$

con $\tau = R^{(eq)}C \simeq 10\,\text{msec}$. L'andamento della tensione nel tempo è quello dato dalla figura seguente.



Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori: $R_1 = R_2 = \ldots = R_8 = 1\,\text{k}\Omega$, $I_0 = I_1 = 3\,\text{mA}$, $I_2 = 2\,\text{mA}$, $V_0 = 5\,\text{V}$, $V_1 = 9\,\text{V}$. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno.

Calcolare le correnti di uscita I_1^{out}, I_2^{out} e I_3^{out} degli amplificatori operazionali.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti come indicati in figura. Si consideri per tutti gli amplificatori operazionale che la corrente sugli ingressi sia nulla.

Per il corto circuito virtuale agli ingressi dell'operazionale 1, si ha

$$V_1^- = V_1^+ = R_3 I_1$$

da cui

$$I_{R2} = \frac{V_0 - V_1^-}{R_2} = \frac{V_0 - R_3 I_1}{R_2}$$

e, grazie al bilancio delle correnti al nodo (1),

$$I_1^{out} = I_{R4} = I_1 - I_{R2} = I_1 - \frac{V_0 - R_3 I_1}{R_2} = 1\,\mathrm{mA}$$

Si noti inoltre che $V_1^{out} = R_3 I_1 + R_4 I_{R4} = 4\,\mathrm{V}$.

Per quanto riguarda l'amplificatore operazionale 2, si ha

$$V_2^- = V_2^+ = V_0$$

$$V_2^{out} = V_2^- - R_1 I_{R1} = V_0 - R_1 I_0 = 2\,\mathrm{V}$$

La corrente I_2^{out} si ricava dal bilancio delle correnti al nodo indicato con (2):

$$I_2^{out} = I_2 + I_{R5} - I_{R1} = I_2 + \frac{V_2^{out}}{R_5} - I_0 = 1\,\mathrm{mA}$$

Per l'operazionale 3 si ha invece

$$V_3^- = V_3^+ = V_1^{out}$$

da cui $I_{R6} = I_{R7} = \frac{V_1^{out}}{R_7}$. Si determini prima V_3^{out} come

$$V_3^{out} = V_3^- + R_6 I_{R6} - V_1 = V_1^{out}\left(1 + \frac{R_6}{R_7}\right) - V_1 = 1\,\mathrm{V}$$

Per determinare I_3^{out} è necessario considerare entrambe le equazioni di bilancio delle correnti ai nodi (3) e (4)

$$(3): \quad I_{V1} = I_{R_6} - I_2 = \frac{V_1^{out}}{R_7} - I_2$$

$$(4): \quad I_3^{out} = I_{V1} - I_{R8} = \frac{V_1^{out}}{R_7} - I_2 - \frac{V_3^{out}}{R8} = 1\,\mathrm{mA}$$