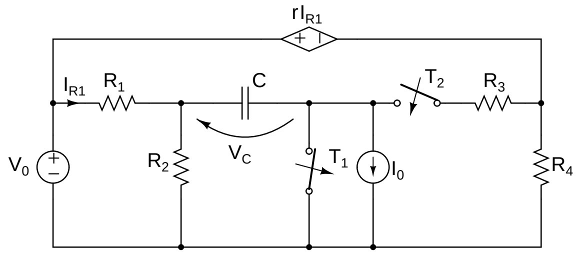
Esame di Teoria dei Circuiti - 6 luglio 2009 (Soluzione)

Esercizio 1

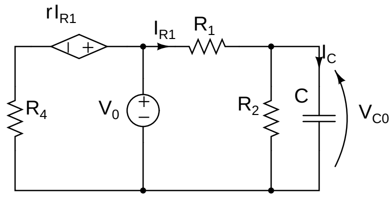


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = r = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}$, $V_0 = 4\,\mathrm{V}$, $I_0 = 2\,\mathrm{mA}$.

Per $t < t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T_1 è chiuso, l'interruttore T_2 è aperto ed il circuito è a regime. All'istante $t = t_0$ l'interruttore T_1 si apre, mentre all'istante $t = t_1 = 1\,\mathrm{msec} = 10^{-3}\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T_2 si chiude. Determinare l'andamento della tensione $V_C(t)$.

Soluzione

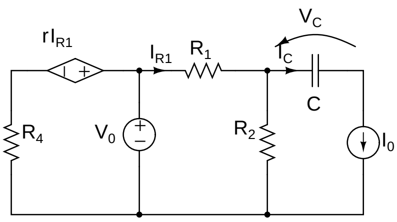
Per $t < 0$ l'interruttore T_1 è chiuso e T_2 è aperto. In questa configurazione si calcoli la tensione V_{C0} ai capi della capacità all'istante $t = 0$. Il circuito si semplifica come segue:



Per via dell'ipotesi che il circuito sia a regime, $I_C = 0$ e la tensione V_{C0} è data da

$$V_{C0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 = 2\,\mathrm{V}$$

All'istante $t = t_0 = 0\,\mathrm{sec}$ l'interruttore T_1 si apre. Il circuito da esaminare diventa il seguente:



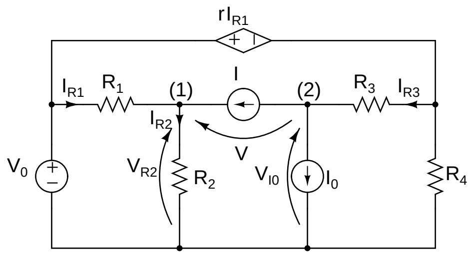
dove $I_C = I_0$. Si tratta quindi di una carica a corrente costante, in cui la tensione ai capi della capacità vale

$$V_C(t) = V_{C0} + \frac{1}{C}\int_0^t I_0 d\tau = V_{C0} + \frac{I_0}{C} t$$

All'istante $t = t_1 = 1\,\mathrm{msec}$ l'interruttore T_1 si chiude. In questo istante comincia un secondo transitorio, il cui valore iniziale della tensione della capacità è dato dal valore raggiunto in t_1

$$V'_{C0} = V_C(t_1) = V_{C0} + \frac{I_0}{C} t_1 = 4\,\mathrm{V}$$

Per calcolare il transitorio di carica, si ricorra all'equivalente di Thevenin del circuito conneso alla capacità. Si supponga quindi di sostituire alla capacità stessa un generatore ideale di corrente I e di calcolare la tensione V ai suoi capi.



Il bilancio delle correnti al nodo (1)

$$I_{R1} + I = I_{R2}$$

assieme al bilancio delle tensioni alla maglia formata da V_0, R_1 e R_2 permette di calcolare I_{R1} e quindi V_{R2}

$$V_0 = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} = R_1 I_{R1} + R_2 I_{R1} + R_2 I$$

$$I_{R1} = \frac{V_0 - R_2 I}{R_1 + R_2}$$

$$V_{R2} = R_2 \left(I_{R1} + I\right) = R_2 \frac{V_0 - R_2 I}{R_1 + R_2} + R_2 I_0 = \frac{R_1 R_2 I + R_2 V_0}{R_1 + R_2}$$

Analogamente, dal bilancio delle correnti al nodo (2)

$$I_{R3} = I + I_0$$

e dal bilancio delle tensioni alla magila formata da V_0, rI_{R1} , R_3 e I_0 si ha

$$V_0 = rI_{R1} + R_3 I_{R3} + V_{I0} = r\frac{V_0 - R_2 I}{R_1 + R_2} + R_3 \left(I + I_0\right) + V_{I0}$$

$$V_{I0} = V_0 - r\frac{V_0 - R_2 I}{R_1 + R_2} - R_3 \left(I + I_0\right)$$

$$V = V_{R2} - V_{I0} = \frac{R_1 R_2 I + R_2 V_0}{R_1 + R_2} - V_0 + r\frac{V_0 - R_2 I}{R_1 + R_2} + R_3 \left(I + I_0\right) =$$

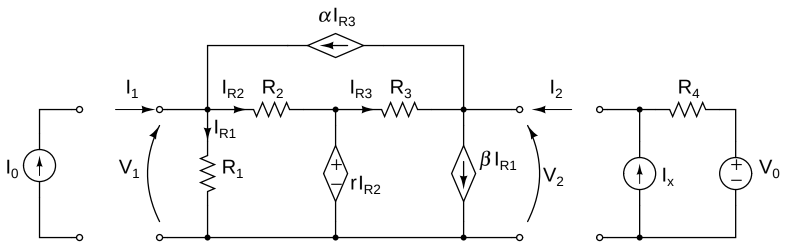
$$= \underbrace{\frac{R_2 V_0}{R_1 + R_2} - V_0 + r\frac{V_0}{R_1 + R_2} + R_3 I_0}_{V^{(eq)} = 2\,\mathrm{V}} + \left(\underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - \frac{rR_2}{R_1 + R_2} + R_3}_{R^{(eq)} = 1\,\mathrm{k\Omega}}\right) I$$

Per $t > t_1$ la tensione $V_C(t)$ è data quindi da

$$V_C(t) = V^{(eq)} + \left(V'_{C0} - V^{(eq)}\right) e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

con $\tau = R^{(eq)} C = 1\,\mathrm{msec}$.

Esercizio 2

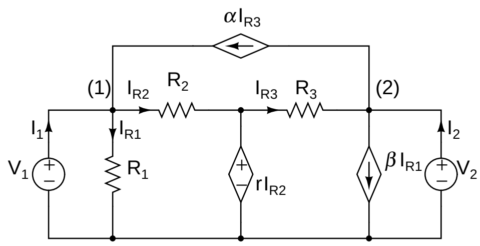


Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $\alpha = 2$, $\beta = \dfrac{7}{8}$, $r = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $V_0 = 2\,\mathrm{V}$, $I_0 = 5\,\mathrm{mA}$.
Calcolare:

- la descrizione del due porte tramite matrice delle conduttanze G
- quale valore della corrente del generatore I_x rende nulla la potenza erogata (o dissipata) dal generatore di tensione V_0, qualora si supponga di collegare al due porte G calcolato al punto precedente il generatore I_0 alla porta 1, ed i generatori I_x, V_0 la resistenza R_4 alla porta 2, come mostrato in figura.

Soluzione

Per trovare la matrice delle conduttanze G si supponga di collegare al due porte i due generatori ideali di tensione V_1 e V_2 e di calcolarne le correnti I_1 e I_2.



Si noti che i tre generatori di tensione V_1, V_2 e rI_{R2} formano un albero; tramite essi è quindi possibile esprimere tutte le tensioni del circuito e quindi le correnti delle tre resistenze.

$$I_{R1} = \frac{V_1}{R_1}$$

$$I_{R2} = \frac{V_1 - rI_{R2}}{R_2} \quad \rightarrow \quad I_{R2} = \frac{V_1/R_2}{1 + r/R_2} = \frac{V_1}{R_2 + r}$$

$$I_{R3} = \frac{rI_{R2} - V_2}{R_3} = \frac{rV_1}{R_3\,(R_2 + r)} - \frac{V_2}{R_3}$$

Le correnti I_1 e I_2 sono date rispettivamente dal bilancio della correnti ai nodi (1) e (2).

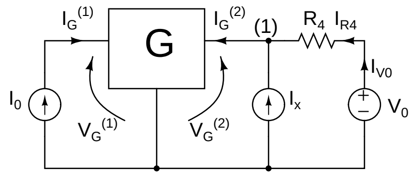
$$I_1 = I_{R1} + I_{R2} - \alpha I_{R3} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1}{R_2 + r} - \alpha\left(\frac{rV_1}{R_3\,(R_2 + r)} - \frac{V_2}{R_3}\right) =$$

$$= \left(\underbrace{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + r} - \frac{\alpha r}{R_3\,(R_2 + r)}}_{G_{11} = 1\,\mathrm{m\Omega^{-1}}}\right) V_1 + \underbrace{\frac{\alpha}{R_3}}_{G_{12} = 1\,\mathrm{m\Omega^{-1}}} V_2$$

$$I_2 = \alpha I_{R3} + \beta I_{R1} - I_{R3} = (\alpha - 1)\frac{rV_1}{R_3(R_2+r)} - (\alpha-1)\frac{V_2}{R_3} + \beta\frac{V_1}{R_1} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\beta}{R_1} + \frac{(\alpha-1)\,r}{R_3(R_2+r)}\right)}_{G_{21} = 1\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_1 - \underbrace{\frac{\alpha-1}{R_3}}_{G_{22} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{m}\Omega^{-1}} V_2$$

Per il secondo punto dell'esercizio, il circuito da considerare è il seguente, dove si è indicato con $V_G^{(1)}$ e $I_G^{(1)}$ la tensione e la corrente alla porta 1 di G, e con $V_G^{(2)}$ e $I_G^{(2)}$ tensione e corrente alla porta 2.



Dal bilancio delle correnti al nodo (1) si ottiene

$$I_G^{(2)} = I_{R4} + I_x$$

$$G_{21}V_G^{(1)} + G_{22}V_G^{(2)} = I_{V0} + I_x$$

La tensione $V_G^{(1)}$ si può ricavare dall'equazione costitutiva di G

$$I_0 = G_{11}V_G^{(1)} + G_{12}V_G^{(2)}$$

$$V_G^{(1)} = \frac{I_0}{G_{11}} - \frac{G_{12}}{G_{11}}V_G^{(2)}$$

mentre la tensione $V_G^{(2)}$ si può ricavare dal bilancio delle tensioni alla maglia costituita da V_0, R_4 e la porta 2 di G

$$V_G^{(2)} = V_0 - R_4 I_{R4} = V_0 - R_4 I_{V0}$$

Sostituendo queste due espressioni nel bilancio delle correnti al nodo (1) si ottiene I_{V0}

$$G_{21}\left(\frac{I_0}{G_{11}} - \frac{G_{12}}{G_{11}}(V_0 - R_4 I_{V0})\right) + G_{22}(V_0 - R_4 I_{V0}) = I_{V0} + I_x$$

$$\frac{G_{21}}{G_{11}}I_0 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}}V_0 + \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}}R_4 I_{V0} + G_{22}V_0 - G_{22}R_4 I_{V0} = I_{V0} + I_x$$

$$I_{V0} = \frac{-I_x + \frac{G_{21}}{G_{11}}I_0 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}}V_0 + G_{22}V_0}{1 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}}R_4 + G_{22}R_4}$$

Imporre che V_0 abbia potenza nulla significa imporre che

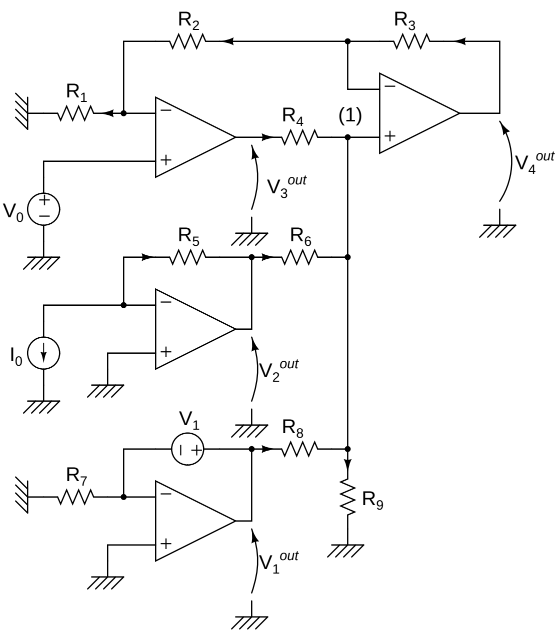
$$P_{V0} = V_0 I_{V0} = 0$$

ovvero che

$$-I_x + \frac{G_{21}}{G_{11}}I_0 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}}V_0 + G_{22}V_0 = 0$$

$$I_x = \frac{G_{21}}{G_{11}} I_0 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}} V_0 + G_{22}V_0 = 2\,\text{mA}$$

Esercizio 3



Con riferimento al circuito di figura si assumano i seguenti valori:
$R_1 = R_2 = \ldots = R_9 = 1\,\text{k}\Omega$, $V_0 = 4\,\text{V}$, $V_1 = 12\,\text{V}$, $I_0 = 6\,\text{mA}$. Si supponga inoltre che gli amplificatori operazionali siano ideali e che lavorino sempre nella zona ad alto guadagno. Calcolare le tensioni di uscita degli operazionali V_1^{out}, V_2^{out}, V_3^{out} e V_4^{out}.

Soluzione

Si considerino i versi delle correnti come indicato in figura. Inoltre, si esamini l'operazionale 1. Per via del corto circuito virtuale ai suoi ingressi, si ha $V_1^+ = 0 = V_1^-$. Ne segue che

$$V_1^{out} = V_1^- + V_1 = V_1 = 12\,\text{V}$$

Anche per l'operazionale 2 si ha $V_2^+ = 0 = V_2^-$. Inoltre, poiché gli ingressi dell'operazionale non assorbono corrente, si ha $I_{R5} = -I_0$. Ne segue che

$$V_2^{out} = V_2^- - R_5 I_{R5} = R_5 I_0 = 6\,\text{V}$$

La condizione di corto circuito virtuale per gli ingressi dell'operazionale 3 determina V_4^{out}:

$$V_3^+ = V_0 = V_3^-$$

$$I_{R1} = \frac{V_3^-}{R_1} = \frac{V_0}{R_1} = I_{R2} = I_{R3}$$

$$V_4^{out} = V_3^- + R_2 I_{R2} + R_3 I_{R3} = V_0\left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_1}\right) = 12\,\text{V}$$

A determinare V_3^{out} è invece la condizione di corto circuito virtuale per gli ingressi dell'operazionale 4

$$V_4^- = V_3^- + R_2 I_{R2} = V_0\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = V_4^+$$

unita al bilancio delle correnti al nodo (1)

$$I_{R4} + I_{R6} + I_{R8} = I_{R9}$$

$$\frac{V_3^{out} - V_4^+}{R_4} + \frac{V_2^{out} - V_4^+}{R_6} + \frac{V_1^{out} - V_4^+}{R_8} = \frac{V_4^+}{R_9}$$

$$V_3^{out} = \left(1 + \frac{R_4}{R_6} + \frac{R_4}{R_8} + \frac{R_4}{R_9}\right) V_4^- - \frac{R_4}{R_8} V_1^{out} - \frac{R_4}{R_6} V_2^{out} =$$

$$= \left(1 + \frac{R_4}{R_6} + \frac{R_4}{R_8} + \frac{R_4}{R_9}\right) \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_0 - \frac{R_4}{R_8} V_1^{out} - \frac{R_4}{R_6} V_2^{out} = 14\,\mathrm{V}$$