Prove d'esame a.a. 2010–2011

Andrea Corli*

7 dicembre 2011

Sono qui raccolti i testi delle prove d'esame assegnati nell'a.a. 2010–11, relativi al Corso di Complementi di Analisi Matematica, Laurea Magistrale in Ingegneria Civile e Ingegneria Ambientale, comune a Istituzioni di Analisi Matematica, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica e Ingegneria dei Materiali, tenuto da me presso l'Università degli Studi di Ferrara.

7-12-2010

1. Sia $f_n(x) = \dfrac{(n-1)x}{(1+x^2)^n}$. Studiare la convergenza puntuale della serie $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$; sia f la funzione somma. Provare che vi è convergenza totale nell'intervallo $[1,2]$ e dedurne $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.
2. Siano $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$. Si consideri il moto di equazione $y'' + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) y = A\sin(\omega_1 t) + B\sin(\omega_2 t)$. Classificare il moto e risolvere il problema ai valori iniziali $y(0) = y'(0) = 0$. Dare una maggiorazione dell'ampiezza della soluzione. Cosa succede se $\omega_2 \to 0$? Commentare.
3. Si consideri l'equazione alle derivate parziali $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. Provare che $u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct)$ è una soluzione dell'equazione, per qualsiasi coppia di funzioni f e g. Come si possono scegliee f e g in modo che $u(0,x) = e^x$ e $u_t(0,x) = 1$?
4. Si consideri l'equazione $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ con dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Calcolare il polinomio di MacLaurin di grado 3 della soluzione. Commentare.
5. Siano $a > 0$, $b > 0$ e f la funzione, nulla fuori dall'intervallo $[-a,b]$, il cui grafico nell'intervallo $[-a,b]$ è ottenuto congiungendo con un segmento i punti $(-a,0)$ con $(0,1)$ e $(0,1)$ con $(b,0)$. Disegnare il grafico di f. Calcolare la trasformata di Fourier di f. Verificare che, nel caso $a = b = T$, il risultato ottenuto è $T\,\mathrm{sinc}^2(T\nu)$, trasformata di Fourier della funzione impulso triangolare q_T.

16-12-2010 - A

1. Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = x^n\left(x - \frac{1}{n}\right)^2$, definite in $[0,+\infty)$. Disegnare un grafico approssimativo di una generica f_n; si studi il $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$; si studi la convergenza puntuale e totale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
2. Sia f la funzione definita da $f(x) = 1$ in $[0,1)$, $f(x) = -1$ in $[-1,0)$ ed estesa per periodicità. Si calcoli la serie di Fourier di f, specificandone la convergenza. Scrivere la formula di Parseval relativa.
3. Si consideri il moto di equazione $y'' + 3y' + 2y = 0$. Classificare il moto e risolvere il problema ai valori iniziali con $y(0) = 1$, $y'(0) = v_0$. Per quali valori di $v_0 < 0$ la soluzione $y(t)$ non raggiunge mai il valore 0?
4. Risolvere $u_{tt} - u_{xx} = e^{-x}$ con dati iniziali $u(0,x) = e^{-x}$, $u_t(0,x) = 0$.

*Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

5. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ definita da $f(x) = \sin^2 x$ in $[-\pi, \pi]$ e nulla altrove, semplificando il piu' possibile i calcoli. Disegnare il grafico di f. Si ricordi che $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ e $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$.

16-12-2010 - B

1. Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = x^n (x-n)^2$, definite in $[0, +\infty)$. Disegnare un grafico approssimativo di una generica f_n; si studi il $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$; si studi la convergenza puntuale e totale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
2. Sia f la funzione definita da $f(x) = -1$ in $[0, 1)$, $f(x) = 1$ in $[-1, 0)$ ed estesa per periodicità. Si calcoli la serie di Fourier di f, specificandone la convergenza. Scrivere la formula di Parseval relativa.
3. Si consideri il moto di equazione $y'' + 4y' + 3y = 0$. Classificare il moto e risolvere il problema ai valori iniziali con $y(0) = 1$, $y'(0) = v_0$. Per quali valori di $v_0 < 0$ la soluzione $y(t)$ non raggiunge mai il valore 0?
4. Risolvere $u_{tt} - 2x^2 u_{xx} = tx^2$ con dati iniziali $u(0, x) = x^2$, $u_t(0, x) = 0$.
5. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ definita da $f(x) = \cos^2 x$ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e nulla altrove, semplificando il piu' possibile i calcoli. Disegnare il grafico di f. Si ricordi che $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ e $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$.

10-01-2011 - A

1. Sia $f_n(x) = \sin^2(\frac{x}{n})$ definita in $\mathbf{R}$. Disegnare un grafico approssimativo di f_1, f_2. Studiare la convergenza della successione $\{f_n\}$. Studiare la convergenza (puntuale e totale) della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
2. Studiare la convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)(x+2)^n$.
3. Si considerino i due moti oscillatori $f_1(t) = \sin(10\pi t)$ e $f_2(t) = \sin(12\pi t)$. Stabilire il periodo di entrambi e il periodo del moto $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Rappresentare f in termini di onda lunga e corta; di entrambe stabilire il periodo e disegnare un grafico approssimativo di f.
4. Si consideri un moto vibratorio smorzato non forzato con pulsazione caratteristica $\omega_0 = 12$. Cercare lo smorzamento δ in modo che il decremento logaritmico sia pari a $1/20$.
5. Si può fare la trasformata di Fourier della funzione f definita in $\mathbf{R}$ da $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x^2}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$? Spiegare.
6. Calcolare la soluzione del problema ai valori iniziali $\partial_t u - (1 - \sin t) \cdot \partial_x^2 u = 0$, $u(0, x) = \sin(\frac{\pi}{L} x)$ per $x \in [0, L]$. Quale potrebbe essere un modello fisico per questo problema? Cosa accade alla soluzione se $t \to +\infty$?

10-01-2011 - B

1. Sia $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n^2})$ definita in $\mathbf{R}$. Disegnare un grafico approssimativo di f_1, f_2. Studiare la convergenza della successione $\{f_n\}$. Studiare la convergenza (puntuale e totale) della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
2. Studiare la convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-1/n}\right)(x-1)^n$.

3. Si considerino i due moti oscillatori $f_1(t) = \sin(10\pi t)$ e $f_2(t) = \sin(18\pi t)$. Stabilire il periodo di entrambi e il periodo del moto $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Rappresentare f in termini di onda lunga e corta; di entrambe stabilire il periodo e disegnare un grafico approssimativo di f.

4. Si consideri un moto vibratorio smorzato non forzato con pulsazione caratteristica $\omega_0 = 15$. Cercare lo smorzamento δ in modo che il decremento logaritmico sia pari a $1/10$.

5. Si può fare la trasformata di Fourier della funzione f definita in $\mathbf{R}$ da $f(x) = \dfrac{\sin x^3}{x^2}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 1$? Spiegare.

6. Calcolare la soluzione del problema ai valori iniziali $\partial_t u - \frac{1}{1+t^2} \cdot \partial_x^2 u = 0$, $u(0,x) = \sin(\frac{\pi}{L}x)$ per $x \in [0, L]$. Quale potrebbe essere un modello fisico per questo problema? Cosa accade alla soluzione se $t \to +\infty$?

21-1-2011

1. Sia $f_n(x) = n^{-x}$ definita in $\mathbf{R}$. Disegnare i grafici di alcune f_n, studiare la convergenza della successione f_n, studiare la convergenza puntuale e totale (in opportuni insiemi) della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

2. Sia $0 < T < 2$. Sia f la funzione definita in $[-1, 1)$ da $f(x) = 1/T$ se $x \in [-T/2, T/2]$ e nulla altrimenti, estesa poi per periodicità a tutto $\mathbf{R}$. Disegnare il grafico di f, scriverne la serie di Fourier utilizzando la funzione sinc, scrivere la formula di Parseval deducendo la somma della serie relativa.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y'' + e^{-x^2} y = 0$ con dati iniziali $y(0) = y'(0) = 1$. Scrivere il polinomio di MacLaurin di grado 4 della soluzione.

4. Risolvere l'equazione alle derivate parziali $u_{tt} - 4a^2 u_{xx} = 0$ con dati iniziali $u(0,x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$, $u_t(0,x) = 0$, per $x \in [-1, 1]$ e $a > 0$. Disegnare alcuni grafici della soluzione in funzione di x, a t fisso. Dopo quale tempo la soluzione coincide col dato iniziale $\cos(\frac{\pi}{2}x)$?

5. Si consideri f il moto di equazione $f(t) = 2\sin(\frac{6}{5}t) + 3\cos(\frac{3}{2}t) - \sin(\frac{3}{7}t)$. Dire se f è periodico e, in caso affermativo, calcolarne il periodo.

6. Calcolare formalmente $\widehat{x^2 f''(x)}$. Dire se si può fare effettivamente la trasformata di Fourier di sopra nel caso $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

7-3-2011

1. Sia $f_n(x)$ la funzione definita da $f_n(x) = \dfrac{x(n-x)}{n^3}$ se $0 \leq x \leq n$ e nulla altrove, per $n = 1, 2, \ldots$. Disegnare il grafico di qualche f_n, calcolare $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, studiare la convergenza puntuale e totale in $\mathbf{R}$ della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2. Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 3 della soluzione dell'equazione $y'' - e^x y' + (\sin x) y = \log(1+x)$, con dati $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

3. Risolvere col metodo di somiglianza l'equazione alle derivate parziali $2\partial_t^2 u + 2x\partial_{tx}^2 u + x^2 \partial_x^2 u = 4x^2 e^t$, $u(0,x) = x^2$, $\partial_t(0,x) = 0$.

4. Si consideri il moto di equazione $y'' + 4y = \sin t + a\cos(2t)$, con dati iniziali $y(0) = y'(0) = 0$, dove $a > 0$. Calcolare la soluzione. Dire per quali valori di a si è sicuri che $|y(t)| \leq 10$ per $t \in [0, 100]$.

5. Si consideri la funzione f definita da $f(x) = a^2 - x^2$ se $|x| \leq a$ e nulla altrove. Disegnare il grafico di f e se ne calcoli la trasformata di Fourier, facendo comparire la funzione sinc. Dire per quali valori di a si ha che $|\hat{f}(\nu)| \leq \frac{1}{100}$ se $\nu \geq 10$.

28-3-2011

1. Sia $f_n(x) = \frac{n}{2}e^{-n|x|}$. Si disegnino i grafici di f_1, f_2, f_3. Si calcoli il $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, si calcoli $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$ e si commentino i risultati ottenuti. Studiare la convergenza (puntuale e totale) della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ e, nei punti in cui essa converge, se ne calcoli la somma.

2. Studiare la convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$.

3. Risolvere col metodo di somiglianza l'equazione alle derivate parziali $u_{tt} - x(1-x)u_{xx} = 0$, $u(0,x) = x(1-x)$, $u_t(0,x) = 0$ per $t > 0$ e $x \in [0,1]$. Quale ipotetico modello fisico potrebbe rappresentare l'equazione? Disegnare i grafici della soluzione u (in funzione di x) ai tempi $t = 1, 2, 3$.

4. Si consideri il moto di equazione $y'' + \omega^2 y = e^{-\epsilon t}\sin(\omega t)$, con $\epsilon > 0$ e $\omega > 0$. Specificare con precisione di che tipo di moto si tratta. Calcolare l'integrale generale dell'equazione e commentare il risultato ottenuto.

5. Si consideri la funzione f definita in $[0,+\infty)$ da $f(x) = 1$ se $x \in [0,1)$, $f(x) = \frac{1}{2^2}$ se $x \in [1,2)$, $f(x) = \frac{1}{3^2}$ se $x \in [2,3)$ e così via, estesa poi a tutto $\mathbf{R}$ in modo pari. Disegnare il grafico di f e provare che f è assolutamente integrabile; calcolare la trasformata di Fourier di f sotto forma di serie, provando esplicitamente che tale serie converge. Si ricordi che $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

13-6-2011

1. Sia $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, definita in $[0,+\infty)$, con $n = 1, 2, \ldots$. Disegnare i grafici approssimativi di f_1, f_2, f_3, studiare la convergenza della successione $\{f_n\}$ e la la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2. Calcolare la serie di Fourier della funzione f definita nell'intervallo $[-1,1)$ da $f(x) = 1 + x$ e prolungata quindi per periodicità a tutto $\mathbf{R}$. Specificare la convergenza e scrivere la formula di Parseval.

3. Si consideri il problema ai valori iniziali $y'' + \dfrac{1}{1+x}y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Dire come si applica il Primo Teorema di Fuchs. Calcolare quindi il polinomio di MacLaurin di grado 4 della soluzione.

4. Si consideri il moto vibratorio di equazione $y'' + 4y' + 3y = 0$ con dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = v$. Classificare il moto, risolvere il problema e dire per quali valori di v la soluzione assume anche valori negativi. Commentare.

5. Si consideri la funzione f definita da $f(x) = e^{-x^2}$ se $x \geq 0$ e $f(x) = -e^{-x^2}$ se $x < 0$. Disegnare un grafico di f. Calcolare la trasformata di Fourier di f.

11-7-2011

1. Studiare la convergenza e la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{nx^n}$.

2. Dire se il primo Teorema di Fuchs si applica all'equazione $y'' - (\tan x)y' = 0$ con dati iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Calcolare quindi il polinomio di MacLaurin di grado 4 della soluzione. Tracciare quindi un grafico approssimativo della soluzione approssimata ottenuta.

3. Si consideri il moto vibratorio espresso da $y'' + 4y = \sin(3t) + \cos(4t)$ con dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Classificare il moto. Calcolare la soluzione, dire se è periodica o meno; nel caso affermativo, calcolarne il periodo.

4. Semplificare $\mathcal{F}\left(x^2 f'''(x)\right)$ e $\mathcal{F}\left(2f\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right)$.

5. Risolvere con il metodo di somiglianza il problema $u_t - Du_{xx} = 0$, $u(x,0) = e^{-x}$, per $x \in \mathbf{R}$ e $t > 0$, dove $D > 0$. Disegnare alcuni grafici della soluzione, in funzione di x, per diversi valori di t. Commentare. Discutere il caso $u(x,0) = e^{x}$.

5-9-2011

1. Studiare l'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{an}}$ al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$.

2. (a) Può la serie di Fourier di una funzione periodica, regolare a tratti, essere composta da un numero finito di addendi?

   (b)Può $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{2n}\sin(nx)$ essere la serie di Fourier di una funzione 2π-periodica e regolare a tratti?

   (c) Dare un esempio di una funzione alla quale il teorema di Dirichlet di convergenza delle serie di Fourier non si applica.

3. Si consideri l'equazione di Bessel $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y = 0$ con $p = 1/2$. Ricordando il secondo teorema di Fuchs, discutere la scelta del parametro α basandosi sui primi due coefficienti della serie.

4. Si consideri il moto vibratorio rappresentato dal problema $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = A$, $y'(0) = 1$. Classificare il moto. Scrivere la soluzione del problema. Esiste un valore di $A > 0$ tale che la soluzione non assuma mai il valore 0? Discutere il relativo problema fisico.

5. Si consideri la funzione f definita da $f(x) = \cos(2\pi mx)$ in $[-1/m, 1/m]$ e nulla altrove. Disegnarne il grafico. Calcolare la sua trasformata di Fourier, specificandone il periodo della parte oscillante. $[\cos\alpha\cos\beta = 1/2(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))]$.

15-9-2011

1. Studiare l'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n^{\frac{1}{n}}}$.

2. Sia f la funzione definita da $f(x) = x$ per $x \in [0,1)$, $f(x) = 0$ per $x \in [-1,0]$ e prolungata quindi per periodicità a $\mathbf{R}$. Disegnare il grafico di f. Calcolare la serie di Fourier di f e specificarne la convergenza. Scrivere la formula di Parseval provando direttamente che la serie numerica di tale formula è convergente.

3. Si consideri per $t > 0$ e $x \in [0, L]$ l'equazione $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$ per $c > 0$, con dati $u(0,x) = \sin(\omega x)$, $u_t(0,x) = \sin(\omega x)$, dove $\omega = 2\pi/L$. Spiegare il problema fisico che rappresenta. Trovare la soluzione. Considerare il caso in cui i dati sono $u(0,x) = \sin(\omega x)$, $u_t(0,x) = -\sin(\omega x)$. A quale problema fisico si riferisce? Trovare la soluzione. In cosa differiscono le due soluzioni trovate?

4. Si consideri il moto vibratorio rappresentato dal problema $y'' + \omega^2 y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$, dove f è definita da $f(t) = B\sin(\omega t)$ se $t \in [0, t_0]$ e nulla altrove; qui $t_0 = 2\pi n/\omega$. Disegnare un grafico di f. Classificare il moto e commentare il problema fisico. Trovare la soluzione del problema nel modo seguente: 1) risolvere dapprima in $[0, t_0]$; usare i valori $y(t_0)$ e $y'(t_0)$ dedotti dalla soluzione trovata come valori iniziali relativi ad un nuovo problema in cui $f = 0$. Disegnare un grafico approssimativo della soluzione. Commentare.