Equazioni differenziali ordinarie

Andrea Corli

1 settembre 2009

Indice

Le equazioni differenziali ordinarie sono equazioni in cui l'incognita è una funzione di una variabile reale, che compare nell'equazione attraverso le sue derivate. L'aggettivo *ordinarie* serve per distinguerle dalle *equazioni alle derivate parziali*, che coinvolgono invece funzioni di due o più variabili reali. Ci interesseremo qui solo alle prime e per brevità ci riferiremo spesso ad esse come *equazioni differenziali.* Non solo le principali leggi della fisica si scrivono come equazioni differenziali ordinarie, ma anche numerosissimi modelli matematici impiegati nelle scienze e nell'ingegneria ne fanno uso.

1 Definizioni

Definizione 1.1 *Un*'equazione differenziale ordinaria *nella funzione incognita $y = y(t)$ è una espressione del tipo*

$$F\big(t, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{1.1}$$

dove F è una funzione data.

L'equazione è detta di ordine n *se l'ordine massimo di derivazione della funzione y è n. L'equazione è detta* lineare *se la funzione F è lineare nelle variabili $y, y', \dots, y^{(n)}$.*

Una soluzione *dell'equazione è una funzione $y = y(t)$ definita in un intervallo I tale che*

$$F\big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\big) = 0 \qquad \textit{per ogni } t \in I\,. \tag{1.2}$$

*L'*integrale generale *dell'equazione è una espressione che, al variare di alcuni parametri, esprime tutte le soluzioni dell'equazione.*

Osservazione 1.1

- Si noti che in (1.1) si omette la variabile t della funzione y; essendo infatti y incognita (e così dunque il suo dominio) non si saprebbe dire per quali t l'espressione più precisa (1.2) sarebbe soddisfatta.
- Si sono usate le lettere t e y per indicare rispettivamente la variabile indipendente e la funzione incognita. Queste notazioni sono giustificate da un lato dal fatto che spesso t ha il ruolo di una variabile temporale, dall'altro lato che i grafici delle soluzioni sono rappresentati in un piano ty; la variabile y conserva dunque il ruolo di ordinata. Naturalmente altre notazioni sono possibili, ad esempio l'uso di x al posto di t quando la variabile indipendente ha un significato spaziale.

Esempio 1.1

- Le equazioni $y' - t^2y = 0$, $y' - ty^2 = 0$ sono del primo ordine, la prima lineare, la seconda non lineare.
- L'equazione $y'' - y^2 = 0$ è del secondo ordine, non lineare.
- L'equazione $u''' - xu' + u - \sin x = 0$ è del terzo ordine, lineare; la variabile è x, la funzione incognita $u = u(x)$.

Esempio 1.2

- Consideriamo il moto di un punto materiale di massa m lungo una linea retta, soggetto all'azione di una forza esterna F dipendente dal tempo e dalla posizione del punto. Il secondo principio della dinamica (o seconda legge di Newton) $F = ma$ si scrive allora come l'equazione differenziale
$$my'' = F(t, y) \tag{1.3}$$
dove t indica il tempo e $y = y(t)$ la posizione del punto.

2 Equazioni differenziali del primo ordine

In questa sezione studiamo le equazioni differenziali del primo ordine, dando il procedimento risolutivo per alcune classi di esse. Molti aspetti delle equazioni differenziali verranno presentati qui per la prima volta e generalizzati in seguito.

2.1 Generalità

L'espressione più generale di una equazione differenziale del primo ordine è, da (1.1),
$$F(t, y, y') = 0\,. \tag{2.4}$$
Vediamo ora su di un semplice esempio alcuni aspetti fondamentali delle equazioni differenziali.

Esempio 2.1 (Ricerca delle primitive) Sia f una funzione data e consideriamo l'equazione
$$y' = f(t)\,. \tag{2.5}$$
Ogni soluzione y sarà una primitiva di f. Se f è una funzione continua definita in un intervallo $[a, b]$ allora il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale assicura che
$$y(t) = \int_a^t f(s)\, ds$$
è una soluzione, derivabile nell'intervallo $[a, b]$. Tale soluzione non è unica: infatti tutte (e sole) le funzioni
$$y(t) = \int_a^t f(s)\, ds + c \tag{2.6}$$
sono soluzioni al variare di $c \in \mathbb{R}$. Pertanto (2.6) è l'integrale generale dell'equazione (2.5). Notiamo che i grafici di due soluzioni così trovate o sono coincidenti o non si intersecano in nessun punto.

Questo semplice esempio fa vedere che in generale un'equazione differenziale non ha un'unica soluzione. Inoltre per la risoluzione dell'equazione (2.4) servono opportune ipotesi sulla funzione F (la continuità di f nell'Esempio 2.1).

Vogliamo chiarire più in generale questi due aspetti. Premettiamo una definizione.

Definizione 2.1 *Una equazione differenziale del primo ordine è detta in* forma normale *se si presenta come*

$$y' = f(t, y) \tag{2.7}$$

per una opportuna funzione f.

Esempio 2.2 L'equazione (2.5) è in forma normale. La forma normale dell'equazione $yy' - t = 0$ è $y' = \frac{t}{y}$. L'equazione $y'^2 - ty = 0$ non può essere ridotta a forma normale (la funzione $x \to x^2$ non è invertibile).

Nel seguito considereremo sempre equazioni rappresentabili in forma normale.

L'espressione (2.6) fa supporre che l'integrale generale di una equazione differenziale del primo ordine dipenda da *un* parametro (la c in (2.6)). La condizione aggiuntiva che la soluzione abbia un valore prefissato y_0 in corrispondenza di un dato t_0 dovrebbe pertanto avere un'unica soluzione.

Definizione 2.2 *Il* problema ai valori iniziali *o* problema di Cauchy *per l'equazione (2.7) è*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

dove t_0 e y_0 sono valori reali fissati, con (t_0, y_0) appartenente al dominio di f. Una soluzione del problema ai valori iniziali (2.8) è una funzione y di classe C^1 in un intervallo I, con $t_0 \in I$, che soddisfa l'equazione e il dato iniziale *$y(t_0) = y_0$.*

Il fatto che la soluzione sia richiesta di essere definita in un intervallo è chiarito nell'esempio seguente.

Esempio 2.3 Consideriamo il seguente problema ai valori iniziali per l'equazione (2.5):

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{t^2} \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

Si verifica subito che la funzione $y(t) = 1 - \frac{1}{t}$ soddisfa sia l'equazione che il dato iniziale. Essa non è tuttavia l'unica funzione a soddisfare entrambe le condizioni: questo vale anche per le funzioni

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t} & \text{se } t > 0 \\ c - \frac{1}{t} & \text{se } t < 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

dove c è una costante arbitraria. Il fatto è che le primitive di una funzione differiscono per una costante *in ogni intervallo in cui sono definite.* Questo non è più vero se esse sono definite in una *unione di intervalli.* Poiché la Definizione 2.2 richiede che il dominio sia un intervallo, la soluzione (unica) del problema ai valori iniziali (2.9) è $y(t) = 1 - \frac{1}{t}$, definita in $(0, +\infty)$.

Questo esempio chiarisce perché nella Definizione 2.2 la soluzione è definita in un *intervallo*: in caso contrario l'unicità della soluzione del problema ai valori iniziali è subito persa. Nel caso di soluzioni dell'equazione e soddisfacenti alla condizione iniziale che siano definite in unione di intervalli, ad esempio, sceglieremo come dominio della soluzione del problema ai valori iniziali quell'intervallo che contiene il punto t_0. L'integrale generale di una equazione differenziale del primo ordine risulta allora dipendente da *un* parametro, e si scrive $y(t; c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Enunciamo un risultato che stabilisce alcune ipotesi sulla funzione f in modo che il problema (2.8) abbia una unica soluzione.

Teorema 2.1 (Cauchy) *Siano I, J due intervalli, $t_0 \in I$, $y_0 \in J$; sia $f : I \times J \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che*

(i) f sia continua in $I \times J$;

(ii) f sia derivabile con continuità rispetto alla variabile y nell'intervallo J.

Allora il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.10}$$

ammette un'unica soluzione definita in un intorno di t_0.

Osservazione 2.1

1. La funzione f è una funzione di due variabili, t e y; la definizione di continuità sarà data in seguito, ma è del tutto analoga a quella realtiva a funzioni di una variabile reale. In particolare si proverà che ogni funzione polinomiale in due variabili è continua, così come ogni prodotto $g(t)h(y)$ di due funzioni continue di una variabile reale.

2. La condizione (*ii*) significa che per ogni $t \in I$ la funzione $y \to f(t,y)$ è di classe C^1 nell'intervallo J. Ad esempio soddisfa questa condizione la funzione $f(t,y) = |t|y$ ma non la funzione $f(t,y) = t|y|$.

3. Il Teorema 2.1 dà un risultato di *esistenza locale*: la soluzione esiste in un intorno di t_0, e non necessariamente in tutto l'intervallo I.

4. Il risultato precedente stabilisce che i grafici di due soluzioni di una equazione differenziale (soddisfacente le ipotesi del Teorema 2.1) sono coincidenti o non possono mai intersecarsi: se accadesse così nel punto (t_0, y_0) il relativo problema ai valori iniziali avrebbe due soluzioni distinte. Pertanto è generale quando osservato nell'Esempio 2.1, anche se i grafici non saranno necessariamente paralleli tra loro.

Osservazione 2.2 Se f è di classe C^n in $I \times J$, con $n \geq 1$, allora la soluzione y di (2.10) è di classe C^{n+1} in un intorno di t_0. Consideriamo ad esempio il caso $n = 1$: si ha $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ per ogni t in un intorno di t_0, e la funzione $t \to f\big(t, y(t)\big)$ è di classe C^1; dunque y è di classe C^2.

In particolare se f è di classe C^∞ in $I \times J$ allora anche y lo è (in un intorno di t_0).

2.2 Equazioni a variabili separabili

Le *equazioni a variabili separabili* sono equazioni differenziali del primo ordine che, in forma normale, si scrivono come

$$y' = a(t)b(y)\,. \tag{2.11}$$

In riferimento alla notazione (2.7) abbiamo dunque $f(t,y) = a(t)b(y)$. Supporremo che $a \in C(I)$, $b \in C^1(J)$, con I e J intervalli, in modo che il Teorema 2.1 garantisca l'esistenza di soluzioni.

Per queste equazioni si ha un algoritmo risolutivo che consta di due passi.

1. Si cercano dapprima gli zeri della funzione b, cioè quei valori $\bar{y} \in J$ tali che $b(\bar{y}) = 0$. Ognuno di tali valori dà luogo alla soluzione costante $y(t) = \bar{y}$ di (2.11); infatti in tal caso $y'(t) = 0 = a(t)b(\bar{y})$.

   Ogni altra soluzione $y(t)$ dell'equazione non potrà mai annullare b, ovvero risulterà $b\big(y(t)\big) \neq 0$. Se infatti ciò accadesse nel punto t_0 allora $y(t_0) = \bar{y}$ dove $\bar{y}$ è uno degli zeri di b; poiché la funzione costante $\bar{y}$ è soluzione dell'equazione si verrebbe a contraddire il Teorema di Cauchy.

2. Dal passo precedente possiamo pertanto dividere entrambi i membri di (2.11) per $b(y)$:

   $$\frac{y'}{b(y)} = a(t)\,. \tag{2.12}$$

   Integrando entrambi i membri rispetto alla variabile t otteniamo

   $$\int \frac{y'(t)}{b\big(y(t)\big)}\,dt = \int a(t)\,dt + c$$

   con $c \in \mathbb{R}$. Facciamo il cambiamento di variabili $u = y(t)$ nel primo integrale; dunque $du = y'(t)dt$ e

   $$\int \frac{du}{b(u)}\,dt = \int a(t)\,dt\,.$$

Se B è una primitiva di $1/b$ e A di a allora $B(u) = A(t) + c$, ovvero $B\big(y(t)\big) = A(t) + c$ e, se B è invertibile,

$$y(t) = B^{-1}\left(A(t) + c\right) . \tag{2.13}$$

L'integrale generale dell'equazione è dunque dato dall'espressione (2.13) più le soluzioni costanti trovate nel primo passo.

Osservazione 2.3 Il procedimento rigoroso effettuato nel secondo passo si può ricapitolare nel seguente modo. Scritto $\frac{y'}{b(y)} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{b(y)}$ da (2.12) segue *formalmente*

$$\frac{dy}{b(y)} = a(t)dt$$

da cui il nome di equazioni a variabili separabili. Integrando l'espressione precedente rispetto a y a sinistra e rispetto a t a destra si trova (2.13).

Esempio 2.4 Consideriamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y' = \frac{2t}{y} \\ y(0) = 1 \, . \end{cases}$$

Si tratta di una equazione a variabili separabili, non lineare; con le notazioni di (2.11) si ha $a(t) = 2t$, $b(y) = 1/y$.

La funzione b non si annulla mai; si considera perciò il secondo passo dello schema risolutivo. L'equazione si scrive $yy' = 2t$ da cui, procedendo come sopra, $y^2/2 = t^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Pertanto l'integrale generale è

$$y(t; c) = \pm\sqrt{2t^2 + c}\,.$$

La condizione iniziale dà $1 = \pm\sqrt{c}$, dunque si sceglie il segno $+$ e $c = 1$. In conclusione la soluzione del problema ai valori iniziali è $y(t) = \sqrt{2t^2 + 1}$, definita in $\mathbb{R}$.

Esempio 2.5 Discutiamo al variare di $a \in \mathbb{R}$ le soluzioni del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = a \, . \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili, non lineare; in riferimento a (2.11) si ha $a(t) = 1$, $b(y) = y^2$, $I = J = \mathbb{R}$.

La funzione b si annulla se $y = 0$, da cui la soluzione costante $y(t) = 0$.

Dividendo per y^2 otteniamo $y'/y^2 = 1$, da cui

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dt + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Perciò

$$y(t; c) = -\frac{1}{t + c}$$

che dà, assieme alla soluzione nulla, l'integrale generale dell'equazione.

Se $a = 0$ la soluzione è la soluzione nulla trovata in precedenza. Se $a \neq 0$ allora la condizione iniziale implica

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{a} - t}\,.$$

Poiché il dominio della soluzione è richiesto essere un intervallo contenente t_0 se segue che se $a > 0$ il dominio è $(-\infty, \frac{1}{a})$, se $a < 0$ è $(\frac{1}{a}, +\infty)$.

Si noti che benché le funzioni a e b siano definita in $\mathbb{R}$, la soluzione, ad eccezione del caso $a = 0$, non è definita in $\mathbb{R}$, ma in un suo sottointervallo. Questo chiarisce quanto commentato nell'Osservazione 2.1, punto 3, a proposito della località del Teorema di Cauchy.

Esempio 2.6 Consideriamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} ty' = y + y^2 \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

La forma normale dell'equazione è $y' = \frac{1}{t} \cdot (y + y^2)$: è una equazione a variabili separabili, non lineare. Nelle notazioni di (2.11) si ha $a(t) = 1/t$, $b(y) = y + y^2$.

La funzione b si annulla in 0 e -1; troviamo perciò le due soluzioni costanti $y(t) = 0$ e $y(t) = -1$.

Scriviamo quindi l'equazione nella forma $\frac{y'}{y+y^2} = \frac{1}{t}$ da cui

$$\int \frac{dy}{y + y^2} = \int \frac{dt}{t} + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Il primo integrale è risolto per decomposizione in fratti semplici; si trova $\frac{1}{y+y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}$, da cui

$$\log\left|\frac{y}{1+y}\right| = \log|t| + c\,.$$

Eliminando i logaritmi troviamo

$$\frac{y}{1+y} = ct$$

per una nuova costante $c \in \mathbb{R}$ (l'arbitrarietà di c tiene conto dell'eliminazione dei moduli). Infine $\frac{y}{1+y} = \frac{y+1-1}{1+y} = 1 - \frac{1}{1+y}$, dunque

$$y(t;c) = \frac{1}{1 - ct} - 1\,.$$

La condizione iniziale implica $c = 1/2$ da cui la soluzione

$$y(t) = \frac{t}{2 - t}$$

definita in $(-\infty, 2)$.

Osservazione 2.4 La soluzione $y(t) = \frac{t}{2-t}$ dell'Esempio 2.6 soddisfa $y(0) = 0$, benché y non coincida identicamente con la soluzione nulla. Questo non è in contraddizione con il Teorema di Cauchy, vedi Osservazione 2.1, punto 4, che dà delle condizioni *sufficienti* per la risoluzione del problema ai valori iniziali e si riferisce alla *forma normale* di una equazione. Nell'esempio le funzioni a e b sono definite rispettivamente in $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $J = \mathbb{R}$; il problema ai valori iniziali relativo al dato $y(t_0) = y_0$ ha senso solo se $t_0 \neq 0$. Tuttavia, sempre riferendoci alla forma normale e alla soluzione $y(t) = \frac{t}{2-t}$, nel secondo membro l'annullarsi di t in 0 è "bilanciato" dall'annullarsi nello stesso punto di $y + y^2$; è questo che permette alla soluzione di prolungarsi oltre il punto 0.

2.3 Equazioni differenziali lineari

Una *equazione differenziale lineare del primo ordine*, in forma normale, è del tipo

$$y' + a(t)y = f(t)\,. \tag{2.14}$$

L'equazione è detta *omogenea* se $f = 0$, *completa* altrimenti. Le ipotesi del Teorema di Cauchy sono soddisfatte se a e f sono continue in un intervallo I, ipotesi che faremo sempre nel seguito. Anche per queste equazioni vi è un algoritmo risolutivo.

Sia $A(t)$ una primitiva della funzione $a(t)$, che esiste per il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Moltiplichiamo entrambi i membri di (2.14) per $e^{A(t)}$ (detto fattore integrante) e otteniamo

$$e^{A(t)}y' + e^{A(t)}a(t)y = f(t)e^{A(t)}\,.$$

Si ha $e^{A(t)}y' + e^{A(t)}a(t)y = \left(e^{A(t)}y\right)'$; integrando si ottiene

$$e^{A(t)}y = \int f(t)e^{A(t)}\,dt + c$$

da cui l'integrale generale

$$y(t;c) = e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)}\,dt + ce^{-A(t)}\,. \tag{2.15}$$

Osservazione 2.5

1. E' semplice verificare che se al posto di A si considera un'altra primitiva $A(t) + C$, $C \in \mathbb{R}$, la formula (2.15) rimane invariata (a patto di sostituire c con un'altra costante).

2. Poiché sia f che $e^{A(t)}$ sono funzioni continue, ne segue che la formula (2.15) definisce una funzione y di classe C^1; di più, tale formula è valida per ogni $t \in I$. La soluzione è pertanto definita nello stesso intervallo in cui sono definiti i coefficienti dell'equazione. Questo fatto vale per ogni equazione differenziale *lineare*, di qualsiasi ordine; l'Esempio 2.5 mostra che questo non è il caso se l'equazione è non lineare.

Riassumiamo quanto provato nel seguente teorema.

Teorema 2.2 *Siano a e f due funzioni continue nell'intervallo I, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Allora il problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una unica soluzione di classe C^1 definita nell'intervallo I.

Esempio 2.7 Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione

$$y' - 2y = t^2 \,.$$

Si tratta di una equazione lineare, a variabili non separabili, a coefficienti continui in $\mathbb{R}$. Moltiplicando entrambi i membri per e^{-2t} si ottiene

$$e^{-2t}y' - e^{-2t}2y = t^2e^{-2t} \,.$$

Poiché il primo membro è $\left(e^{-2t}y\right)'$, integrando si ha

$$e^{-2t}y = \int t^2e^{-2t}\,dt + c \,.$$

Integrando due volte per parti si ricava (omettendo la costante di integrazione, che compare già sopra)

$$\int t^2e^{-2t}\,dt = -\frac{e^{-2t}}{4}\left(2t^2 + 2t + 1\right)$$

da cui l'integrale generale

$$y(t;c) = ce^{2t} - \frac{1}{4}\left(2t^2 + 2t + 1\right) \,.$$

Esempio 2.8 Risolviamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{t} = t \\ y(-1) = 2 \,. \end{cases}$$

L'equazione è lineare, a variabili non separabili. Una primitiva della funzione $1/t$ è $\log|t|$; secondo l'algoritmo si dovrebbe moltiplicare l'equazione per $|t|$. Poiché lo scopo del procedimento è di scrivere il primo membro come una derivata, raggiungiamo il nostro scopo moltiplicando semplicemente l'equazione per t:

$$ty' + y = t^2 \,.$$

Si ha dunque l'integrale generale

$$y(t;c) = \frac{t^2}{3} + \frac{c}{t} \,.$$

Come già noto a priori, ogni funzione dell'integrale generale è definita nell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ di definizione dei coefficienti. L'imposizione del dato iniziale dà la soluzione

$$y(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{5}{3t} \,.$$

Esercizio 2.1 Alcune equazioni sono sia lineari che a variabili separabili; è questo il caso, ad esempio, se l'equazione lineare è omogenea. Risolvere in entrambi i modi *l'equazione di Malthus*

$$y' = ky$$

che dà un modello molto semplificato di dinamica di una popolazione. Qui $y(t)$ dà il numero di individui di una popolazione al tempo t. Siano ν il tasso di natalità (numero di nati nell'unità di tempo) e μ il tasso di mortalità (numero di morti nell'unità di tempo); supponiamo che siano entrambi costanti nel tempo. La costante k, detta potenziale biologico, è definita da $k = \nu - \mu$. Discutere il problema ai valori iniziali per un dato $y(0) = a$, dove a rapprenta la popolazione al tempo 0.

3 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

In questa sezione studiamo le equazioni differenziali del secondo ordine, limitandoci essenzialmente a quelle *lineari*.

3.1 Generalità

Una *equazione differenziale lineare del secondo ordine* è del tipo

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)\,. \tag{3.16}$$

Come nel caso delle equazioni lineari del primo ordine l'equazione (3.16) è ancora detta *omogenea* se $f = 0$ e *completa* altrimenti; è detta a coefficienti costanti se le funzioni a e b sono costanti. Supporremo sempre nel seguito che le funzioni a, b e f siano continue in un intervallo I.

Esempio 3.1 Consideriamo l'equazione $y'' = f(t)$, con f una funzione continua in I. Integrando una prima volta si ottiene $y' = F(t) + c_1$, dove F è una primitiva di f; una seconda integrazione dà l'integrale generale

$$y(t; c_1, c_2) = \int F(t)\,dt + c_1 t + c_2$$

dove c_1 e c_2 sono costanti reali arbitrarie. L'integrale generale dipende dunque da *due* costanti.

Quanto visto nell'esempio precedente si generalizza: l'integrale generale di una equazione differenziale del secondo ordine è del tipo $y(t; c_1, c_2)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Pertanto il problema ai valori iniziali per una equazione del secondo ordine deve contenere *due* condizioni iniziali. Esse sono del tipo $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$; si noti che le condizioni sono imposte allo *stesso* t_0. Tali condizioni sono naturali da un punto di vista fisico: si pensi all'equazione (1.3), in cui tali dati corrispondono ad assegnare la posizione e la velocità del punto al tempo t_0. Esse sono giustificate anche dal punto di vista matematico, perché per le equazioni lineari del secondo ordine vale il seguente risultato, analogo al Teorema 2.2, ma di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 3.1 *Siano a, b e f funzioni continue nell'intervallo I, $t_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Allora il problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases} \tag{3.17}$$

ha una unica soluzione di classe C^2 definita nell'intervallo I.

Un risultato analogo a quello dell'Osservazione 2.2 vale ancora; in particolare se a, b, f sono funzioni di classe C^∞ in I allora anche la soluzione di (3.17) è di classe C^∞ (in I).

Per vaste classi di equazioni del secondo ordine *non lineari* vale un risultato simile a quello del Teorema 3.1, anche se in versione *locale*: la soluzione è definita, in generale, solo in un intorno di t_0.

Mentre per le equazioni lineari del primo ordine esiste un algoritmo risolutivo, questo non è più vero, in generale, per le equazioni lineari del secondo ordine. La linearità dell'equazione permette però di ricavare importanti informazioni sulla struttura delle soluzioni.

Proposizione 3.1 *Siano a, b, f funzioni continue nell'intervallo I e consideriamo le due equazioni*

$$\begin{aligned} y'' + a(t)y' + b(t)y &= f(t) \qquad \textit{(completa)} \\ y'' + a(t)y' + b(t)y &= 0 \qquad\;\;\; \textit{(omogenea)}\,. \end{aligned}$$

Si ha che:

(i) se y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione completa allora $y_1 - y_2$ è soluzione dell'omogenea;

(ii) se y_0 è soluzione dell'equazione omogenea e $\bar{y}$ della completa allora $y_0 + \bar{y}$ è soluzione dell'equazione completa;

(iii) l'integrale generale dell'equazione completa è dato dalla somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea con una soluzione (particolare) della completa, in simboli

$$y_C(t; c_1, c_2) = y_H(t; c_1, c_2) + \bar{y}(t)\,. \tag{3.18}$$

Dimostrazione. I primi due punti seguono sottraendo o addizionando membro a membro le rispettive uguaglianze. Per provare il terzo punto osserviamo che $y_H(t; c_1, c_2) + \bar{y}(t)$ è soluzione dell'equazione completa per il punto *(ii)*. Viceversa, sia y una soluzione della completa; allora $y - \bar{y}$ è soluzione dell'omogenea per il punto *(i)*, dunque esistono c_1 e c_2 per cui $y(t) - \bar{y}(t) = y_H(t; c_1, c_2)$; perciò y si scrive come in (3.18). □

Osservazione 3.1 La Proposizione 3.1 si estende ad ogni equazione lineare di ordine maggiore di due. Vale inoltre nel caso delle equazioni lineari del primo ordine, anche se l'esistenza di un procedimento risolutivo ne riduce la portata. Infatti nell'integrale generale (2.15) riconosciamo l'integrale generale dell'omogenea, $ce^{-A(t)}$, e una soluzione particolare dell'equazione completa, $e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)}\,dt$.

Il problema della ricerca dell'integrale generale dell'equazione (3.16) si scinde pertanto in:

- ricerca dell'integrale *generale* dell'equazione omogenea;
- ricerca di soluzioni *particolari* dell'equazione completa.

3.2 L'equazione omogenea

Consideriamo in questa sezione l'equazione

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{3.19}$$

per a, b funzioni continue nell'intervallo I.

Proposizione 3.2 *Se y_1 e y_2 sono soluzioni di (3.19) allora anche $y_1 + y_2$ e cy_1 sono soluzioni di (3.19), per ogni $c \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata e analoga a quella della Proposizione 3.1. □

La proposizione precedente si può enunciare dicendo che l'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale lineare è uno *spazio vettoriale*, che indicheremo con $\mathcal{S}$. E' allora naturale porsi la questione se questo spazio abbia dimensione finita, cioè se esistono un numero finito di soluzioni che per combinazioni lineari descrivono tutto lo spazio.

Definizione 3.1 *Due funzioni y_1 e y_2 definite in un intervallo I sono dette* linearmente indipendenti *se non esistono delle costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, non entrambe nulle, tali che $c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = 0$ per ogni $t \in I$. In caso contrario sono dette* linearmente dipendenti.

Se y_1 e y_2 sono linearmente dipendenti allora esistono c_1, c_2, con, ad esempio, $c_2 \neq 0$, tali che $c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = 0$ per ogni $t \in I$. Se $c_1 = 0$ allora y_2 è identicamente nulla; se $c_1 \neq 0$ allora $y_2(t) = -\frac{c_1}{c_2}y_1(t) = ky_1(t)$ per una qualche costante $k \neq 0$. Pertanto due funzioni non identicamente nulle sono linearmente dipendenti se e solo se una è multipla non nulla dell'altra.

Esempio 3.2

- Le funzioni 1 e t, t e t^2, 1 e t^2 sono linearmente indipendenti.
- Le funzioni $e^{\alpha t}$ e $te^{\alpha t}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, sono linearmente indipendenti. Da $te^{\alpha t} = ke^{\alpha t}$ seguirebbe $t = k$.
- Le funzioni $e^{\alpha t}$ e $e^{\beta t}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sono linearmente indipendenti se $\alpha \neq \beta$. Se infatti fosse $e^{\alpha t} = ke^{\beta t}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ allora se $t = 0$ si avrebbe $k = 1$, e allora $\alpha = \beta$.
- Le funzioni $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$, con $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sono linearmente indipendenti. Se fosse $\sin(\omega t) = k\cos(\omega t)$ allora calcolando in $t = 0$ si avrebbe $k = 0$, da cui $\omega = 0$. Ovviamente se $\omega = 0$ le funzioni si riducono a 0 e 1, che sono linearmente dipendenti.
- Le funzioni $e^{\alpha t}\sin(\omega t)$ e $e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ sono linearmente indipendenti.
- Le funzioni t e $2t$ sono linearmente dipendenti; così pure $\log t$ e $\log t^2$.

Teorema 3.2 *Se y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (3.19), allora ogni altra soluzione è combinazione lineare di queste, ovvero*

$$y_H(t; c_1, c_2) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\,.$$

In altre parole la dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{S}$ delle soluzioni dell'equazione omogenea (3.19) è *due*.

Le Proposizioni 3.1, 3.2 e il Teorema 3.2 permettono un'analogia tra lo spazio $\mathcal{S}$ e gli spazi vettoriali euclidei, in particolare con $\mathbb{R}^2$:

- allo spazio $\mathbb{R}^2$ corrisponde lo spazio S delle soluzioni di (3.19), a vettori $v \in \mathbb{R}^2$ corrispondono soluzioni y di (3.19);
- ad una base di $\mathbb{R}^2$ (coppia di vettori v_1,v_2 linearmente indipendenti) corrisponde una base di S (coppia di funzioni y_1, y_2 linearmente indipendenti);
- un piano Π in $\mathbb{R}^3$ non passante per l'origine non è uno spazio vettoriale, così come l'insieme delle soluzioni dell'equazione completa non è uno spazio vettoriale;
- sia Π_0 il parallelo a Π e passante per l'origine, dunque un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$; ogni elemento di Π è ottenuto sommando gli elementi di Π_0 con un qualsiasi elemento di Π così come ogni soluzione della completa è ottenuta sommando le soluzioni dell'omogenea (che formano uno spazio vettoriale) con una qualsiasi soluzione particolare della completa.

3.3 Equazioni omogenee a coefficienti costanti

Le equazioni differenziali lineari omogenee sono ancora troppo generali per la determinazione di un algoritmo risolutivo; questo esiste invece per le equazioni a coefficienti costanti. Esse sono del tipo

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{3.20}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Per motivare l'analisi seguente enunciamo il seguente lemma.

Lemma 3.1 *La funzione $y(t) = e^{rt}$, con $r \in \mathbb{R}$, è soluzione di (3.20) se e soltanto se $r^2+ar+b = 0$.*

Dimostrazione. Basta sostituire $y(t) = e^{rt}$ nell'equazione. □

Pertanto e^{rt} risolve l'equazione (3.20) se e soltanto se r è radice del *polinomio caratteristico*

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b\,. \tag{3.21}$$

Il polinomio $P(\lambda)$ è ottenuto dal primo membro dell'equazione (3.20) rimpiazzando le derivate $y^{(k)}$ con λ^k, $k = 0, 1, 2$.

Sia $\Delta = a^2 - 4b$ il discriminante del polinomio caratteristico (3.21). Abbiamo tre casi.

- $\Delta > 0$. Il polinomio caratteristico ha due radici reali e distinte r_1, r_2, che danno luogo alle due soluzioni $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$. Esse sono linearmente indipendenti poiché $r_1 \neq r_2$, dunque per il Teorema 3.2 l'integrale generale di (3.20) è

$$y(t; c_1, c_2) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}\,.$$

- $\Delta = 0$. Il polinomio caratteristico ha la radice reale (di molteplicità due) $r = -\frac{a}{2}$, che dà luogo alla soluzione e^{rt}. Si verifica facilmente che in questo caso anche te^{rt} è soluzione; inoltre le funzioni e^{rt} e te^{rt} sono linearmente indipendenti. Per il Teorema 3.2 l'integrale generale di (3.20) è

$$y(t; c_1, c_2) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}\,.$$

- $\Delta < 0$. Il polinomio caratteristico ha le due radici complesse e coniugate $\alpha \pm i\beta$; *formalmente* esse danno luogo alle due soluzioni $y_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$, $y_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$. Le formule di Eulero e la Proposizione 3.2 darebbero allora le soluzioni

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha t}\sin\beta t\,.$$

  Questo procedimento formale ha condotto alle funzioni reali $e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}\sin\beta t$; si verifica facilmente che esse sono soluzioni di (3.20) e che sono linearmente indipendenti. Sempre dal Teorema 3.2 segue che l'integrale generale di (3.20) è

$$y(t; c_1, c_2) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,.$$

Abbiamo perciò trovato l'integrale generale di (3.20) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Notiamo come un problema *differenziale*, il calcolo delle soluzioni di una equazione differenziale, sia ricondotto ad un problema *algebrico*, il calcolo delle radici del relativo polinomio caratteristico.

Esempio 3.3

- L'integrale generale dell'equazione $y'' + y' - 2y = 0$ è $y(t; c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$. Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

  ha soluzione $y(t) = \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t}$.

- L'integrale generale dell'equazione $y'' - 4y' + 4y = 0$ è $y(t; c_1, c_2) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$. Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

  ha soluzione $y(t) = 2te^{2t}$.

- L'integrale generale dell'equazione $y'' - 2y' + 10y = 0$ è $y(t; c_1, c_2) = e^t\big(c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)\big)$. Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 10y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

  ha soluzione $y(t) = e^t\big(\cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t)\big)$.

3.4 Soluzioni particolari dell'equazione completa

Nelle sezioni precedenti abbiamo risolto, almeno per le equazioni lineari a coefficienti costanti, il problema della determinazione dell'integrale generale dell'equazione omogenea. Per trovare l'integrale generale dell'equazione completa ci occupiamo ora della ricerca di *soluzioni particolari* di tale equazione. Poiché l'integrale generale è stato determinato solo per le equazioni a coefficienti costanti, analizzeremo soluzioni particolari di equazioni del tipo

$$y'' + ay' + by = f(t) \tag{3.22}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e f una funzione continua nell'intervallo I. La determinazione di soluzioni particolari avviene con il *metodo di similitudine*: si cerca cioè una soluzione $\bar{y}$ di (3.22) di forma *simile* a quella di f. La motivazione sta nel fatto che le derivate di funzioni esponenziali, funzioni seno e coseno, polinomi, sono ancora funzioni dello stesso tipo. Indicheremo come prima con $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ il polinomio caratteristico di (3.22).

1. Caso $f(t) = Ae^{\alpha t}$, con $A, \alpha \in \mathbb{R}$. Si cerca una soluzione particolare di (3.22) sotto la forma

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} ce^{\alpha t} & \text{se } \alpha \text{ non è radice di } P \\ cte^{\alpha t} & \text{se } \alpha \text{ è radice semplice di } P \\ ct^2e^{\alpha t} & \text{se } \alpha \text{ è radice doppia di } P \end{cases}$$

con c una costante reale da determinare. Supponiamo infatti che α non sia radice di P; sostituendo l'espressione $ce^{\alpha t}$ in (3.22) al posto di y si ottiene

$$c\alpha^2 + ca\alpha + cb = A$$

da cui si determina $c = \frac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b}$ poiché $P(\alpha) \neq 0$. Gli altri casi si provano in maniera analoga.

Esempio 3.4

- Consideriamo l'equazione $y'' - 4y = 3e^{-t}$. L'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_H(t; c_1, c_2) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$. Poiché -1 non è radice del polinomio caratteristico si cerca $\bar{y}(t) = ce^{-t}$, da cui $c = -1$. L'integrale generale è dunque
$$y(t; c_1, c_2) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - e^{-t}\,.$$
- Consideriamo l'equazione $y'' + y = e^{rt}$, con $r \in \mathbb{R}$. Le radici del polinomio caratteristico sono complesse coniugate, dunque r non è radice. L'integrale generale dell'omogenea è $y_H(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Si cerca $\bar{y}(t) = ce^{rt}$, da cui $c = \frac{1}{1+r^2}$. L'integrale generale è dunque
$$y(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{1 + r^2}e^{rt}\,.$$
- Consideriamo l'equazione $y'' - 2y' + y = -e^t$. Si ha $y_H(t; c_1, c_2) = c_1e^t + c_2te^t$. Poiché 1 è radice doppia del polinomio caratteristico si cerca $\bar{y}(t) = ct^2e^t$. Sostituendo questa espressione nell'equazione si trova che tutti i termini di primo e secondo grado in t si annullano; questo è conseguenza dell'essere 1 radice doppia. Si trova poi $c = -1/2$. L'integrale generale è dunque
$$y(t; c_1, c_2) = c_1e^t + c_2te^t - \frac{1}{2}e^t\,.$$

2. Caso $f(t) = Ae^{\alpha t} \cos(\omega t)$ o $f(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t)$ con $A, \alpha, \omega \in \mathbb{R}$. Si cerca una soluzione particolare di (3.22) sotto la forma

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) & \text{se } \alpha + i\omega \text{ non è radice di } P \\ te^{\alpha t}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) & \text{se } \alpha + i\omega \text{ è radice di } P \end{cases}$$

con c_1, c_2 due costanti reali da determinare. Il fatto che in entrambi i casi si riescano a determinare le costanti c_1, c_2 si prova per sostituzione come nel caso precedente.

Questo caso comprende solo due eventualità: se infatti $\alpha + i\omega$ è radice di P allora anche $\alpha - i\omega$ lo è, e queste sono tutte le radici di P. Se vi fosse una radice doppia complessa allora il polinomio dovrebbe avere grado almeno quattro.

Si ha che $Ae^{\alpha t}\cos(\omega t) = \Re\big(Ae^{(\alpha+i\omega)t}\big)$ o $Ae^{\alpha t}\sin(\omega t) = \Im\big(Ae^{(\alpha+i\omega)t}\big)$. Pertanto la scelta del tipo di soluzione particolare cercata segue criteri analoghi a quelli del caso precedente.

La soluzione va *sempre* cercata nella forma $e^{\alpha t}\big(c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\big)$ o $te^{\alpha t}\big(c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\big)$ anche se nella f compare solo il coseno o il seno. La ragione sta nel fatto che la derivata prima della funzione coseno (seno) non è, a meno di una costante, la funzione coseno (rispettivamente, seno).

Esempio 3.5

- Consideriamo l'equazione $y'' - 2y' + 5y = 2\sin t$. Le radici del polinomio caratteristico sono $1 \pm 2i$, dunque $y_H(t; c_1, c_2) = e^t\big(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)\big)$. Poiché $0 + i = i$ non è radice del polinomio caratteristico si cerca $\bar{y}(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$. Si noti che usiamo per queste costanti la stessa notazione di quelle impiegate per l'integrale generale dell'omogenea; ciò non darà luogo ad ambiguità. Sostituendo nell'equazione si trova

  $$(4c_1 - 2c_2)\cos t + (4c_2 + 2c_1)\sin t = 2\sin t\,.$$

  Poiché le funzioni seno e coseno sono linearmente indipendenti, questa relazione implica

  $$\begin{cases} 4c_1 - 2c_2 = 0 \\ 4c_2 + 2c_1 = 2 \end{cases}$$

  da cui $c_1 = 1/5$, $c_2 = 2/5$. Una soluzione particolare dell'equazione completa è dunque $\frac{1}{5}\big(\cos t + \frac{1}{5}\sin t\big)$; si noti che benché il termine di destra dell'equazione completa contenga solo la funzione seno, la soluzione particolare trovata contiene *anche* la funzione coseno. L'integrale generale è

  $$y(t; c_1, c_2) = e^t\big(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{1}{5}\left(\cos t + \frac{1}{5}\sin t\right)\,.$$

- Consideriamo ora l'equazione $y'' - 2y' + 5y = e^t\cos(2t)$, la cui parte omogenea è quella dell'esercizio precedente. Ora però $1 + 2i$ è radice del polinomio caratteristico e si cerca allora $\bar{y}(t) = te^t\big(c_1\cos(t) + c_2\sin t\big)$. Il calcolo delle derivate di $\bar{y}$ è un po' semplificato se si pone

  $$F(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$$

  da cui $\bar{y}(t) = te^tF(t)$. Pertanto, notando che $F'' = -4F$, si ha

  $$\begin{aligned} \bar{y}' &= e^t(F + tF + tF') \\ \bar{y}'' &= e^t\big(t(2F' - 3F) + 2(F' + F)\big)\,. \end{aligned}$$

  Inserendo queste espressioni nell'equazione e dividendo per e^t si nota che i termini che si fattorizzano con t si semplificano (questo è generale e dipende dal fatto che $1 + 2i$ è radice del polinomio caratteristico); in conclusione resta $2F' = \cos(2t)$, da cui $c_1 = 0$ e $c_2 = 1/2$. L'integrale generale è perciò

  $$y(t; c_1, c_2) = e^t\big(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)\big) + \frac{1}{2}te^t\sin(2t)\,.$$

3. Caso $f(t) = p_n(t)$ dove p_n è un polinomio di grado n. Si cerca una soluzione particolare di (3.22) sotto la forma

   $$\bar{y}(t) = \begin{cases} q_n(t) & \text{se 0 non è radice di } P \\ tq_n(t) & \text{se 0 è radice semplice di } P \\ t^2q_n(t) & \text{se 0 è radice doppia di } P \end{cases}$$

   con q_n un polinomio di grado n da determinare. Si noti che $p_n(t) = p_n(t)e^{0t}$, che dà una motivazione formale alla suddivisione nei tre sottocasi; se $n = 0$ si ritrova il primo caso considerato.

Esempio 3.6

- Consideriamo l'equazione $y'' - 4y' + 3y = t$. Le radici del polinomio caratteristico sono $1, 3$, dunque una soluzione particolare va cercata nella forma $\bar{y}(t) = c_1 t + c_0$. Inserendo nell'equazione si trova la relazione $3c_1 t + 3c_0 - 4c_1 = t$; poiché le funzioni 1 e t sono linearmente indipendenti si ha
$$\begin{cases} 3c_1 = 1 \\ 3c_0 - 4c_1 = 0 \end{cases}$$
da cui $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{4}{9}$. L'integrale generale è
$$y(t; c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + \frac{1}{3}\left(t + \frac{4}{3}\right).$$
La soluzione del problema ai valori iniziali di dati $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ è
$$y(t) = \frac{1}{3}\left(-e^t + t + \frac{4}{3}\right).$$

Osservazione 3.2

- Nel caso di una equazione completa la determinazione delle costanti c_1, c_2 per rendere soddisfatti eventuali dati iniziali va fatta evidentemente sull'integrale generale dell'equazione *completa*, non su quello dell'equazione omogenea, come si è visto nell'Esempio 3.6.
- La soluzione particolare di una equazione del tipo $y'' + ay' + by = f_1(t) + f_2(t)$ va cercata per linearità sotto la forma $\bar{y}(t) = \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t)$ dove le $\bar{y}_i$ sono soluzioni particolari delle equazioni $y'' + ay' + by = f_i(t)$, $i = 1, 2$.

3.5 Complementi

In questa sezione diamo, sotto forma di esempi, alcuni complementi alla teoria delle equazioni del secondo ordine.

Esempio 3.7 (Soluzioni complesse) Consideriamo l'equazione
$$y'' - 4y' + 5y = 5e^t \sin t\,. \tag{3.23}$$
L'integrale generale dell'omogenea è $y_H(t, c_1, c_2) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ e poiché $1 + i$ non è radice del polinomio caratteristico una soluzione particolare va cercata sotto la forma $\bar{y}(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$.

Questo procedimento dà luogo a calcoli piuttosto lunghi, che possono essere un po' semplificati dalla seguente osservazione. Si ha che $5e^t \sin t = \Im(5e^{(1+i)t})$; inoltre l'equazione è lineare, e dunque se $\bar{y}$ soddisfa
$$y'' - 4y' + 5y = 5e^{(1+i)t} \tag{3.24}$$
allora $\Im\bar{y}$ soddisfa l'equazione (3.23). Cerchiamo dunque una soluzione di (3.24) sotto la forma $\bar{y}(t) = ce^{(1+i)t}$, con $c \in \mathbb{C}$. Si trova facilmente $c = 1 + 2i$, da cui $\bar{y}(t) = (1 + 2i)e^{(1+i)t}$; dalle formule di Eulero la parte immaginaria di $\bar{y}(t)$ è $e^t(2\cos t + \sin t)$, che dà dunque la soluzione particolare cercata.

Esempio 3.8 (Sviluppi di Taylor di una soluzione) Consideriamo il problema ai valori iniziali
$$\begin{cases} y'' - ty = 0 \\ y(2) = 1 \\ y'(2) = -1\,. \end{cases}$$
Si tratta di una equazione *lineare* ma a coefficienti variabili: il metodo risolutivo esposto sopra non si applica. Dal Teorema 3.1 e dalle considerazioni che lo seguono sappiamo però che esiste una unica soluzione di classe C^∞ definita in tutto $\mathbb{R}$. Di tale soluzione conosciamo $y(2) = 1$ e $y'(2) = -1$. Dall'equazione deduciamo $y''(2) = 2y(2) = 2$. Pertanto al secondo ordine e per t vicino a 2
$$y(t) \sim 1 - (t - 2) + (t - 2)^2\,.$$
Derivando l'equazione si ottiene $y''' - y - ty' = 0$, da cui si può dedurre $y'''(2)$ e così via.

Esercizio 3.1 Calcolare lo sviluppo di McLaurin al secondo (terzo) ordine della soluzione di

$$\begin{cases} y'' + t^2 y' - ty = -e^{-t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1\,. \end{cases}$$

4 Applicazioni

Raccogliamo in questa sezione alcune applicazioni che completano quanto esposto sopra.

4.1 L'oscillatore armonico

L'equazione del pendolo di braccio l e massa m è $\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$, dove $\theta = \theta(t)$ è l'angolo di deviazione dalla verticale e g l'accelerazione di gravità. Se indichiamo $\frac{g}{l} = \omega_o^2$ otteniamo l'equazione

$$\theta'' + \omega_o^2 \sin\theta = 0\,.$$

Si tratta di una equazione del secondo ordine *non lineare*, dunque non risolubile con le tecniche introdotte sopra. Se si è unicamente interessati alle piccole oscillazioni del pendolo si può però considerare lo sviluppo di McLaurin al primo ordine $\sin\theta \sim \theta$ e ottenere l'*equazione linearizzata*

$$\theta'' + \omega_o^2\theta = 0 \tag{4.1}$$

detta anche *equazione dell'oscillatore armonico.* Questa equazione governa anche il moto di un punto materiale soggetto ad una forza elastica (vedi sotto). L'integrale generale è

$$\theta(t; c_1, c_2) = c_1\cos(\omega_o t) + c_2\sin(\omega_o t)\,. \tag{4.2}$$

L'integrale (4.2) può essere anche rapresentato come segue.

Lemma 4.1 *Dati c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli, esistono due uniche costanti $A > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi)$ tali che*

$$c_1\cos(\omega_o t) + c_2\sin(\omega_o t) = A\cos(\omega_o t + \phi)\,.$$

Dimostrazione. Si ha $A\cos(\omega_o t + \phi) = A\cos(\omega_o t)\cos\phi - A\sin(\omega_o t)\sin\phi = c_1\cos(\omega_o t) + c_2\sin(\omega_o t)$ se e soltanto se $A\cos\phi = c_1$, $-A\sin\phi = c_2$, per l'indipendenza lineare di seno e coseno. Dunque

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\,, \qquad \begin{cases} \cos\phi = \frac{c_1}{A} \\ \sin\phi = -\frac{c_2}{A}\,. \end{cases} \tag{4.3}$$

Il punto $(\frac{c_1}{A}, -\frac{c_2}{A})$ sta sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, dunque (4.3) identifica un solo valore $\phi \in [0, 2\pi)$. $\square$

Poiché $\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$, si ha anche $c_1\cos(\omega_o t) + c_2\sin(\omega_o t) = A\sin(\omega_o t + \psi)$, con $\psi = \phi + \frac{\pi}{2}$.

La costante A è l'*ampiezza* del moto, ω_o la *pulsazione caratteristica o naturale dell'oscillatore*, ϕ lo *spostamento di fase*. La funzione $A\cos(\omega_o t + \phi)$ è periodica di *periodo* $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ e *frequenza* $\frac{\omega_o}{2\pi}$. Il moto rappresentato dalla funzione è detto *armonico.* La differenza tra frequenza e pulsazione sta nel fatto che la frequenza è riferita alla funzione stessa o al moto (è l'inverso del periodo), mentre la pulsazione è riferita alla funzione coseno (o seno): una pulsazione ω_o significa che il coseno ha avuto ω_o cicli (pulsazioni) nel suo periodo 2π.

Esercizio 4.1 Consideriamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y' = 2t\sqrt{1+y}\,e^{-y} \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

Linearizzare l'equazione e risolvere il relativo problema ai valori iniziali.

Risposta. Poiché il dato iniziale assegna il valore 0 a $y(1)$ linearizziamo $\sqrt{1+y}\,e^{-y}$ in 0, ottenendo $\sqrt{1+y}\,e^{-y} \sim 1 - \frac{1}{2}y$. L'equazione $y' = 2t(1 - \frac{1}{2}y)$ con dato $y(1) = 0$ ha soluzione $y(t) = 2 - e^{\frac{t^2-1}{2}}$.

4.2 Travi

La teoria delle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti si generalizza in maniera diretta alle equazioni a coefficienti costanti di ordine superiore. Senza dare i dettagli di tale teoria facciamo vedere con un esempio come si applica.

Consideriamo una trave di sezione costante, omogenea, isotropa e linearmente elastica. Essa viene modellizzata in un piano xy tramite il suo asse baricentrico; se sulla trave non agiscono carichi si suppone che tale asse coincida con il segmento $[0, L]$ dell'asse x delle ascisse.

La trave è soggetta a deformazione se su di essa agisce un carico $q = q(x)$, $x \in [0, L]$; indichiamo con $y = y(x)$ la posizione assunta dall'asse baricentrico in seguito alla deformazione. Di solito l'asse y delle ordinate viene rivolto verso il basso, in modo che $y(x) \geq 0$ nella maggior parte dei casi applicativi. Si può provare [1], pag. 302, che la funzione $y(x)$ deve soddifare l'equazione differenziale

$$EJy''''(x) = q(x) \tag{4.4}$$

detta *equazione della linea elastica*. Qui E è il *modulo di Young*, J il *momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse baricentrico*; in questo modello entrambi sono costanti. Il prodotto $EJ =: B$ è detto *modulo di rigidezza a flessione*. L'equazione (4.4) è del quarto ordine. Se il carico q è costante allora l'integrale generale si ottiene direttamente per integrazione:

$$y(x; c_1, c_2, c_3, c_4) = \frac{q}{24B}x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4\,.$$

Consideriamo ora il caso di una trave appoggiata per tutta la sua lunghezza su un suolo elastico, avente reazione in ogni punto proporzionale all'abbassamento della trave (suolo alla Winkler). Il carico complessivo diventa allora $q(x)-by(x)$, dove $b > 0$ è un coefficiente della reazione. L'equazione della linea baricentrica y è soggetta allora all'equazione ([1], pag. 435)

$$EJy''''(x) + by = q(x)\,. \tag{4.5}$$

Posto $\alpha^4 = \frac{b}{B}$, $\alpha > 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata a (4.5) è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha^4$$

che ha radici complesse $\alpha(1\pm i)$, $\alpha(-1\pm i)$. Le prime due danno le soluzioni $e^{\alpha x}\cos(\alpha x)$ e $e^{\alpha x}\sin(\alpha x)$, le altre $e^{-\alpha x}\cos(\alpha x)$ e $e^{-\alpha x}\sin(\alpha x)$. Poichè queste quattro soluzioni sono linearmente indipendenti l'integrale generale dell'omogenea è

$$y_H(x; c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1e^{\alpha x}\cos(\alpha x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\alpha x) + c_3e^{-\alpha x}\cos(\alpha x) + c_4e^{-\alpha x}\sin(\alpha x)\,.$$

Se q è costante allora una soluzione particolare di (4.5) va cercata sotto la forma $\bar{y}(x) = c$, da cui $c = \frac{q}{b}$. L'integrale generale di (4.5) è allora

$$y_C(x; c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1e^{\alpha x}\cos(\alpha x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\alpha x) + c_3e^{-\alpha x}\cos(\alpha x) + c_4e^{-\alpha x}\sin(\alpha x) + \frac{q}{b}\,.$$

Va sottolineato che per questi modelli le costanti dell'integrale generale non vengono determinate tramite dati iniziali ma per opportune *condizioni al contorno*.

5 Sistemi di equazioni differenziali

Nello studio dei sistemi di equazioni differenziali (o *sistemi dinamici*) ci limitiamo ai *sistemi lineari, del primo ordine, a coefficienti costanti*. In forma normale essi sono del tipo

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t) \\ y' = cx + dy + g(t) \end{cases} \tag{5.6}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e f, g funzioni continue in un intervallo I; qui $x = x(t)$ e $y = y(t)$ sono le funzioni incognite. Il sistema può essere scritto in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Una soluzione di (5.6) è dunque una *coppia* $\big(x(t), y(t)\big)$ di funzioni che soddisfa il sistema per ogni t in un certo intervallo. Tale soluzione viene rappresentata nel piano xy; i punti del tipo $\big(x(t), y(t)\big)$ descrivono una curva nel piano al variare di t. L'*integrale generale* di (5.6) dipende da due parametri ed è del tipo $\big(x(t; c_1, c_2), y(t; c_1, c_2)\big)$ per $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Il problema ai valori iniziali per (5.6) è

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t) \\ y' = cx + dy + g(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{5.7}$$

con $t_0 \in I$ e $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Una soluzione di (5.7) descriverà perciò una curva passante per il punto (x_0, y_0) per $t = t_0$.

Come nel caso delle equazioni lineari del primo e del secondo ordine si può dimostrare il seguente risultato, che ci limitiamo ad enunciare.

Teorema 5.1 *Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, f, g funzioni continue in un intervallo I, $t_0 \in I$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Allora il problema ai valori iniziali (5.7) ha un'unica soluzione $(x(t), y(t))$ di classe C^1 nell'intervallo I.*

Per risolvere il sistema (5.6) vi è un algoritmo risolutivo, che richiede tuttavia che le funzioni f e g siano di classe C^1 in I. Supporremo $b \neq 0$; altrimenti, se $b = 0$, la prima equazione si risolve subito e dà x che, sostituita nella seconda equazione, permette di trovare y.

1. Si deriva la prima equazione si ottiene
$$x'' = ax' + by' + f'(t)\,.$$
2. Dalla seconda equazione si ricava y' che, inserita nella espressione precedente, dà
$$\begin{aligned} x'' &= ax' + b\big(cx + dy + g(t)\big) + f'(t) \\ &= ax' + bcx + bdy + bg(t) + f'(t)\,. \end{aligned}$$
3. Dalla prima equazione si ricava y (o, meglio, by) che, sostituito di sopra, dà
$$x'' = ax' + bcx + d\big(x' - ax - f(t)\big) + bg(t) + f'(t)$$
cioè
$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = f'(t) + bg(t) - df(t)\,. \tag{5.8}$$
Si tratta di una equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti nell'incognita x, che si sa risolvere.
4. Trovata x si deduce $y = \frac{x' - ax - f(t)}{b}$ dalla prima equazione.

Osservazione 5.1 Sia
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
La parte omogenea dell'equazione (5.8) si scrive allora $x'' - (\mathrm{tr}A)x' + (\det A)x = 0$, dove $\mathrm{tr}A$ indica la *traccia* della matrice A. Il polinomio caratteristico P di questa equazione coincide dunque con il polinomio caratteristico della matrice A, e questo spiega lo stesso nome dato a due polinomi apparentemente non legati da alcuna relazione. Gli zeri di P sono dunque gli *autovalori* della matrice A.

Esempio 5.1 Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + t \\ y' = 2x - 2y - e^t \end{cases}$$

Dal procedimento risolutivo si trova

$$\begin{aligned}
x'' &= 3x' - 2y' + 1 \\
&= 3x' - 2(2x - 2y - e^t) + 1 \\
&= 3x' - 4x + 2(-x' + 3x + t) + 2e^t + 1 \\
&= x' + 2x + 2t + 2e^t + 1\,.
\end{aligned}$$

Si trova dunque l'equazione

$$x'' - x' - 2x = 2e^t + 2t + 1\,.$$

L'integrale generale dell'omogenea è $x_H(t; c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$; una soluzione particolare va cercata per somma o direttamente nella forma $\bar{y}(t) = ce^t + at + b$. Poiché le funzioni 1, t e e^t sono linearmente indipendenti si trova $c = -2$, $a = -1$, $b = 0$, da cui $x_C(t; c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - 2e^t - t$. Dalla prima equazione allora si trova $y_C(t; c_1, c_2) = 2c_1 e^{-t} + \frac{5}{2} c_2 e^{2t} - 2e^t - t$, e l'integrale generale del sistema è

$$\big(x_C(t; c_1, c_2), y_C(t; c_1, c_2)\big) = \big(c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - 2e^t - t, 2c_1 e^{-t} + \frac{5}{2} c_2 e^{2t} - 2e^t - t\big)\,.$$

Il problema ai valori iniziali di dati $x(0) = 0, y(0) = 1$ ha dunque soluzione

$$\big(x(t), y(t)\big) = \big(4e^{-t} - 2e^{2t} - 2e^t - t, 8e^{-t} - 5e^{2t} - 2e^t - t\big)\,.$$

Esempio 5.2

- Consideriamo il sistema

  $$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x\,. \end{cases}$$

  Dal procedimento risolutivo si trova $x'' + x = 0$ da cui $x(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ e $y(t; c_1, c_2) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$. L'integrale generale del sistema è dunque

  $$\big(x(t; c_1, c_2), y(t; c_1, c_2)\big) = \big(c_1 \cos t + c_2 \sin t, c_1 \sin t - c_2 \cos t\big)\,.$$

  Nel caso di dati iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ si trova la soluzione

  $$\big(x(t), y(t)\big) = (\cos t, \sin t)$$

  che nel piano xy descrive una circonferenza al variare di $t \in \mathbb{R}$, in senso antiorario.

- Consideriamo il problema ai valori iniziali

  $$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

  Si trova senza difficoltà la soluzione

  $$\big(x(t), y(t)\big) = \frac{1}{2}\big(e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t}\big)$$

  Posto $e^t = s > 0$ si ricava

  $$\begin{cases} x + y = s \\ x - y = \frac{1}{s}\,. \end{cases}$$

  da cui $x^2 - y^2 = 1$. La curva descritta dalla soluzione è dunque il ramo contenuto nel semipiano $x > 0$ dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$.

Riferimenti bibliografici

[1] O. Belluzzi. *Scienza delle costruzioni.* Zanichelli, 1989.

[2] M. Bramanti, C. D. Pagani e S. Salsa. *Calcolo infinitesimale e algebra lineare.* Seconda edizione. Zanichelli, 2004.

[3] I. S. Sokolnikoff e R. M. Redheffer. *Mathematics of physics and modern engineering.* McGraw-Hill, 1958.