Esercizi del Corso
Complementi di Analisi Matematica
Istituzioni di Analisi Matematica

Andrea Corli e Alessia Ascanelli

21 luglio 2012

Indice

Introduzione

Gli esercizi raccolti di seguito sono stati assegnati alle prove scritte del Corso di *Complementi di Analisi Matematica*, Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile e Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio (comune a *Istituzioni di Analisi Matematica*, Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dei Materiali e Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica), durante gli anni accademici 2002/03–2008/09. Molti esercizi qui presentati sono risolti completamente; di altri ci si è limitati a dare un suggerimento per la risoluzione.

Nella bibliografia sono riportati vari testi che introducono o estendono il materiale presentato qui. Il volume [3] è una introduzione elementare a molti argomenti del corso; maggiori informazioni si trovano in [4, 6, 9] e per ulteriori approfondimenti si rinvia alla bibliografia acclusa al programma del corso. Per gli esercizi si vedano [10, 1, 5, 11, 12]. Lo studente interessato allo sviluppo storico degli argomenti qui trattati troverà qualche informazione in [6] e, più in generale, in [2].

Ringraziamo fin d'ora chiunque voglia segnalarci le inevitabili sviste.

Ferrara, 21 luglio 2012

Andrea Corli, Alessia Ascanelli

Capitolo 1

Successioni e serie di funzioni

1.1 Successioni di funzioni

1.1.1 Studiare per $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1} - x^n}{2^n}.$$

Calcolare la funzione limite.

Risposta. Poiché $f_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot (x-1)$ *si ha convergenza se* $x \in (-2, 2]$ *a*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in (-2, 2) \\ 1 & se\ x = 2. \end{cases}$$

Se $x > 2$ *allora* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$*, se* $x \leq -2$ *il limite non esiste.*

1.1.2 Sia

$$f_n(x) = \left| x - \frac{1}{n} \right| + \frac{1}{n}.$$

Disegnare il grafico di f_n e studiare la convergenza della successione di funzioni $\{f_n\}$.

Risposta. Vedi Figura 1.1. Poiché $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$*, si ha convergenza in tutto* $\mathbb{R}$ *ad* $f(x) = |x|$.

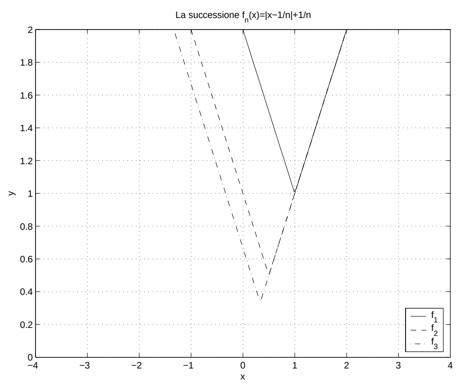

Figura 1.1: Vedi Esercizio 1.1.2.

1.1.3 Si considerino le successioni di funzioni

(a) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x-n)}{n}$

(b) $g_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n}$.

Disegnare i grafici delle funzioni f_n e g_n; calcolare, se esistono, i limiti $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$.

Risposta. Vedi Figura 1.2.

(a) La successione $\{\mathrm{arctg}(x-n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $-\pi/2$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *mentre la successione* $\{1/n\}$ *è infinitesima; dunque la successione* $\{f_n\}$ *converge ad* $f(x) = 0$ *in tutto* $\mathbb{R}$.

(b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ *si ha* $g(x) = x^2 \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{1+n} = x^2$.

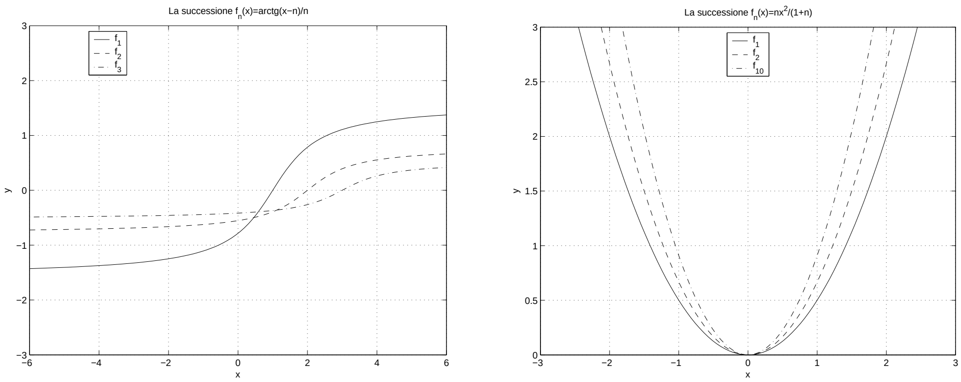

Figura 1.2: Vedi Esercizio 1.1.3.

1.1.4 Tracciare un grafico approssimativo di alcune funzioni delle seguenti successioni e calcolare quindi il limite della successione:

(a) $f_n(x) = \dfrac{n}{1+nx^2}$

(b) $f_n(x) = (x+n)e^{-nx}$

(c) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$

(d) $f_n(x) = \dfrac{x-n}{x^2+n}$.

Risposta. Vedi Figura 1.3.

Si ha:

(a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0; \end{cases}$

(b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ +\infty & x \leq 0; \end{cases}$

(c) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0; \end{cases}$

(d) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

1.1.5 Disegnare i grafici di alcune funzioni delle seguenti successioni e calcolare poi il limite delle successioni:

(a) $f_n(x) = x^{1/n} \cdot \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$

(b) $g_n(x) = n|x| \cdot \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)$.

Risposta. Si ha

(a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$.

1.1.6 Studiare la convergenza della successione di funzioni

(a) $f_n(x) = nx^{2n}e^{-nx}$

(b) $g_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx}$

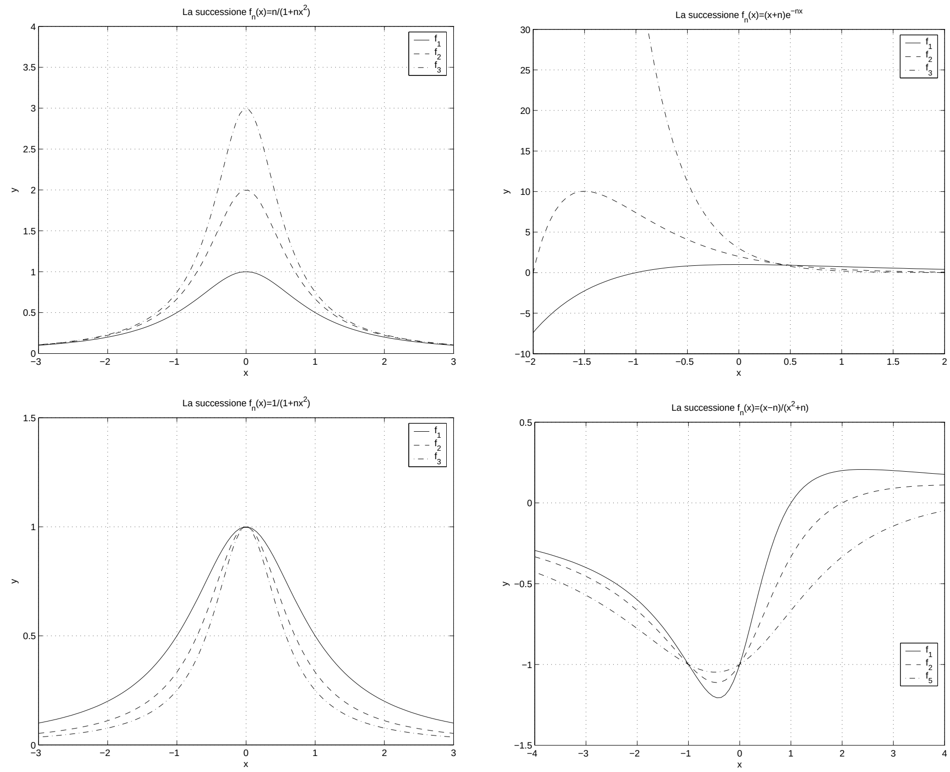

Figura 1.3: Vedi Esercizio 1.1.4.

disegnando un grafico approssimativo di qualche funzione della successione.

Risposta. Vedi Figura 1.4.

(a) Ogni funzione f_n *è definita in* $\mathbb{R}$ *ed è a valori positivi. Si verifica che* $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. *Inoltre* $f_n'(x) = n^2 x^{2n-1} e^{-nx}(2-x)$; *la funzione* f_n *è dunque decrescente in* $(-\infty, 0)$ *e in* $(2, +\infty)$, *crescente in* $(0, 2)$. *Pertanto* 0 *è punto di minimo con minimo* 0 *mentre* 2 *è punto di massimo con massimo* $n4^n e^{-2n}$. *Infine*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \geq 0 \\ +\infty & \textit{se } x < 0\,. \end{cases}$$

(b) Ogni funzione g_n *è definita in* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *ed è pari; le studiamo dunque solo per* $x > 0$. *Si verifica che* $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} g_n(x) = 1$. *Inoltre* $g_n'(x) = \frac{nx\cos(nx)-\sin(nx)}{nx^2}$ *che si annulla nei punti* x *che soddifano* $nx = \mathrm{tg}(nx)$. *Questi punti sono caratterizzati geometricamente come le ascisse dei punti di intersezione del grafico della retta* $y = nx$ *con quello della funzione* $y = \mathrm{tg}(nx)$. *Essi sono alternativamente punti di massimo e di minimo per* g_n. *Notare che le oscillazioni aumentano di rapidità con l'aumentare di* n. *Infine si ha* $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ *per ogni* $x \neq 0$.

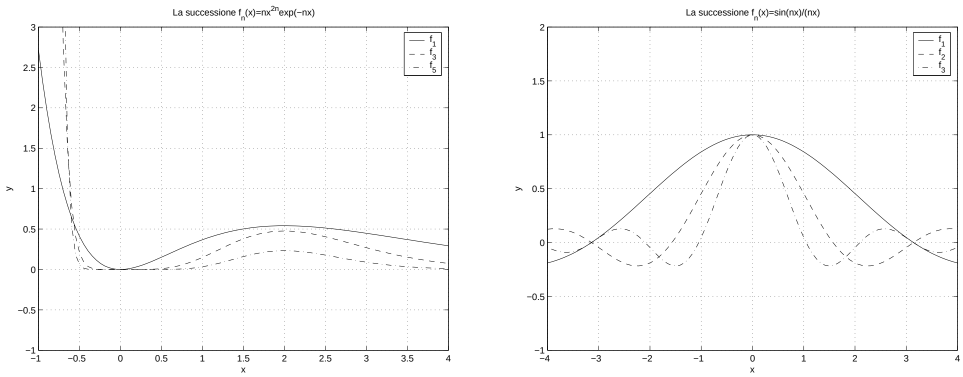

Figura 1.4: Vedi Esercizio 1.1.6.

1.2 Esercizi proposti

1.2.1 Studiare per $x \geq 0$ la convergenza delle seguenti successioni di funzioni, dopo averne disegnato approssimativamente i grafici:

(a) $f_n(x) = (2x)^n - (3x)^n$;

(b) $f_n(x) = (\frac{x}{2})^n - (\frac{x}{3})^n$;

(c) $f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^n$.

1.2.2 Studiare la convergenza nell'intervallo $[0, 2]$ della successione di funzioni $f_n(x) = e^{-n(x-1)} - e^{-n(x-2)}$.

1.2.3 Disegnare un grafico approssimativo della successione di funzioni $f_n(x) = \sin(nx)\sin(\frac{x}{n})$ e calcolare il $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Suggerimento. Fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha $\sin(\frac{x}{n}) \sim \frac{x}{n}$ per $n \to \infty$.

1.3 Serie di funzioni

1.3.1 Studiare la convergenza puntuale delle serie di funzioni

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$.

Scrivere, dove sono definite, le funzioni somma.

Risposta.

(a) Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{\ln x}$; essa converge se $\frac{1}{|\ln x|} < 1$, cioè se $|\ln x| > 1$. Dunque essa converge in $(0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$ ad $f(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$, è indeterminata se $x = \frac{1}{e}$ e diverge a $+\infty$ se $x = e$.

(b) Si tratta di una serie geometrica di ragione e^x che converge in $(-\infty, 0)$ ad $f(x) = \dfrac{1}{1-e^x}$, mentre diverge a $+\infty$ se $x \geq 0$.

1.3.2 Studiare la convergenza delle serie di funzioni

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^2}$.

Risposta.

(a) Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

La seconda serie del termine di destra converge a $s = \pi^2/6$; la prima converge solo per $x = 0$. Pertanto la serie data converge per $x = 0$ a $-s$ e diverge a $\pm\infty$ a seconda che $\pm x > 0$.

(b) Analogamente si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

e quindi la serie data converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1.3.3 Studiare la convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{x}{n}\right).$$

Risposta. Fissato $x \in \mathbb{R}$ *si ha* $1-\cos\dfrac{x}{n} \sim \dfrac{x^2}{2n^2}$ *per* $n \to \infty$. *Perciò la serie ha lo stesso comportamento della serie* $\dfrac{x^2}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, *e dunque converge per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

1.3.4 Studiare le successioni di funzioni:

(a) $f_n(x) = e^{-x}\cos\left(\dfrac{x}{n}\right)$

(b) $g_n(x) = e^{-n|x|}\cos x$.

Studiare poi la convergenza puntuale delle serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n, \sum_{n=0}^{\infty} g_n$.

Risposta.

(a) Si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$. *Condizione necessaria per la convergenza di una serie è che il suo termine generale tenda a* 0*; tale condizione non è soddisfatta per alcun* x *poichè* $e^{-x} \neq 0$ *per ogni* x. *Dunque la serie non può convergere. La serie è a termini definitivamente positivi, quindi diverge a* $+\infty$.

(b) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

dunque la condizione necessaria per la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ *è soddisfatta solo per* $x \neq 0$. *Fissato* $x \neq 0$ *si ha* $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \cos x \sum_{n=0}^{\infty}(e^{-|x|})^n$*; tale serie è una serie geometrica convergente con somma* $\frac{\cos x}{1-e^{-|x|}}$. *Per* $x = 0$ *si ottiene la serie di termine generale* 1 *che diverge a* $+\infty$. *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ *dunque converge puntualmente in* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.3.5 Studiare la convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{ne^{nx}}.$$

C'è convergenza totale nell'intervallo $[0, +\infty)$?

Risposta. La condizione necessaria per la convergenza della serie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{e^x}\right)^n = 0$$

è soddisfatta se e soltanto se $|xe^{-x}| \leq 1$. *Sia perciò* $x_0 \in (-1, 0)$ *la soluzione dell'equazione* $|x| = e^x$ *(si veda la Figura 1.5): la convergenza puntuale potrà aversi solo in* $[x_0, +\infty)$. *Applicando il criterio della radice si trova convergenza puntuale in tutto l'intervallo* $(x_0, +\infty)$ *e dunque, in particolare, in* $[0, +\infty)$. *Nell'intervallo* $[0, +\infty)$ *le funzioni* $f_n(x) = \frac{x^n}{ne^{nx}}$ *hanno massimo assoluto* $\frac{1}{ne^n}$ *in* $x = 1$*; dunque in* $[0, +\infty)$ *è*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n}.$$

Poiché quest'ultima serie converge, la serie data converge totalmente in $[0, +\infty)$.

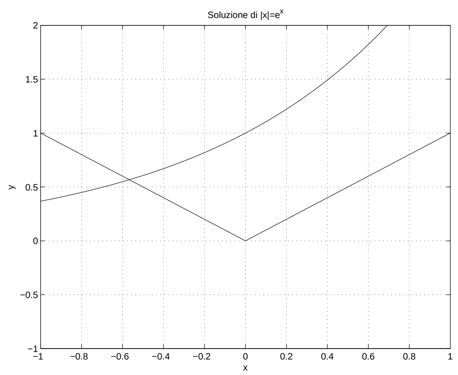

Figura 1.5: Vedi Esercizio 1.3.5.

1.3.6 Studiare la convergenza puntuale e totale delle serie di funzioni

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n|x|}\sin(nx)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}\frac{1}{n+x^2}$.

Risposta.

(a) Per $x = 0$ si ha la serie nulla, che converge con somma 0; fissato $x \neq 0$, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|e^{-n|x|}\sin(nx)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-|x|}\right)^n.$$

Quest'ultima è una serie geometrica convergente, dunque la serie data converge assolutamente in tutto $\mathbb{R}$.

Passiamo alla convergenza totale. Poiché le funzioni $e^{-n|x|}\sin(nx)$ sono dispari, studiamo i loro punti stazionari in $[0,+\infty)$. La derivata prima si annulla quando $\sin(nx) = \cos(nx)$, dunque per $x = \frac{1}{n}(\frac{\pi}{4}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. La funzione f_n ha dunque massimo assoluto $e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$ nel punto $\pi/(4n)$; pertanto non vi è convergenza totale in $\mathbb{R}$ né in nessun intervallo del tipo $[-a,a]$ con $a > 0$. Poiché i punti di massimo convergono a 0, studiamo ora la convergenza totale in intervalli del tipo $(-\infty,-a]$ o $[a,+\infty)$. Sia perciò $x \in (-\infty,-a]$ oppure $x \in [a,+\infty)$; si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|e^{-n|x|}\sin(nx)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-na},$$

e la serie a destra converge. Dunque si ha convergenza totale in ogni intervallo del tipo $(-\infty,-a]$, $[a,+\infty)$.

(b) Per $x = 0$ si ottiene la serie armonica, che diverge a $+\infty$. Fissato $x \neq 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}\frac{1}{n+x^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-x^2}\right)^n,$$

e la serie a destra è una serie geometrica convergente; dunque si ha convergenza puntuale in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Non può esserci convergenza totale in $\mathbb{R}$ perchè in 0 non c'è convergenza puntuale. Sia ora $a > 0$; in $[a,+\infty)$ (oppure in $(-\infty,-a]$) le funzioni $e^{-nx^2}/(n+x^2)$ sono decrescenti (crescenti), dunque assumono valore massimo per $x = a$ ($x = -a$) e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+x^2}e^{-nx^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+a^2}e^{-na^2} < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}(e^{-a^2})^n,$$

e la serie a destra converge per il criterio della radice. Si ha dunque convergenza totale in ogni intervallo del tipo $[a,+\infty)$, $(-\infty,-a]$.

1.3.7 Si consideri in $[0,+\infty)$ la successione di funzioni $f_n(x) = x^n e^{-x^n}$.

(a) Studiare la convergenza della successione, disegnando un grafico approssimativo di qualche funzione della successione.

(b) Studiare la convergenza (semplice e totale) della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(x)}{n}$.

Risposta.

(a) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x^n}(1-x^n)$; la funzione f_n ha dunque massimo assoluto $1/e$ nel punto 1. Per $n \to \infty$ la successione f_n tende a 0 se $x \neq 1$ mentre tende a $1/e$ se $x = 1$.

(b) La serie nel punto 1 si comporta come una serie armonica, dunque diverge; non c'è convergenza totale in $[0,+\infty)$. Se $x < 1$ la serie converge puntualmente in quanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{ne^{x^n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Se $x > 1$ la serie converge puntualmente per il criterio della radice: $xe^{-\frac{x^n}{n}} \to 0$ per $n \to \infty$.

1.3.8 Si consideri in $[0,+\infty)$ la successione di funzioni $f_n(x) = e^{-nx}\log n$. Disegnare i grafici di alcune funzioni della successione e calcolare il $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Studiare quindi la convergenza puntuale e totale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Risposta. Nel punto 0 la successione diverge a $+\infty$; se $x > 0$ essa converge a 0. Consideriamo ora la serie; nel punto 0 la serie chiaramente diverge, mentre se $x \neq 0$ la serie converge puntualmente, ad esempio per il criterio del rapporto:

$$\frac{e^{-(n+1)x}\log(n+1)}{e^{-nx}\log n} = e^{-x}\frac{\log(n+1)}{\log n} \to e^{-x} < 1\,.$$

Nell'intervallo $(0,+\infty)$ non vi è convergenza totale, mentre vi è convergenza totale in ogni intervallo $[a,+\infty)$ con $a > 0$. Infatti la funzione f_n è decrescente, dunque

$$\max_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a) = e^{-an}\log n\,,$$

e abbiamo dimostrato sopra che la serie converge puntualmente in $(0,+\infty)$, in particolare nel punto a.

1.3.9 Studiare la convergenza semplice in $[0,+\infty)$ e totale in $[1,+\infty)$ (rispettivamente in $[0,+\infty)$) delle serie di funzioni

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$.

Risposta.

(a) La serie data converge per il criterio di Leibniz per $x > 0$; per $x = 0$ si ottiene la serie indeterminata $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Dunque c'è convergenza semplice in $(0,+\infty)$. Per la convergenza totale osserviamo che per ogni $x \geq 1$ si ha

$$|f_n(x)| \leq |f_n(1)| = \frac{1}{1+n}\,.$$

Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n}$ diverge, non puo' esserci convergenza totale in $[1,+\infty)$.

(b) La serie data converge semplicemente per ogni $x \geq 0$ per il criterio di Leibniz. Si ha

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}\,.$$

Le funzioni f_n sono decrescenti e positive per n dispari, crescenti e negative per n pari; in entrambi i casi per ogni $x \geq 0$

$$|f_n(x)| \leq |f_n(0)| = \frac{1}{n}.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, quindi non puo' esserci convergenza totale in $[0,+\infty)$.

1.3.10 Studiare la convergenza puntuale delle serie di funzioni

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

Dire se vi è convergenza totale negli intervalli $[0,+\infty)$ e $[0,1]$.

Risposta.

(a) Per $x = 0$ si ottiene la serie nulla, che converge con somma 0. Fissato $x \neq 0$, si ha, per $n \to \infty$,

$$\frac{\ln(1+nx^2)}{n^2} \sim \frac{\ln(nx^2)}{n^2} = \frac{\ln n}{n^2} + \frac{2\ln x}{n^2}.$$

Poiché entrambe le serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ convergono, per il criterio del confronto anche la serie di partenza converge puntualmente. In $[0,+\infty)$ non può esserci convergenza totale perché le funzioni $\ln(1+nx^2)/n^2$ non sono limitate. Sia ora $x \in [0,1]$: si ha

$$\left|\frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}\right| \leq \frac{\ln(1+n)}{n^2} = \frac{\ln(1+n)}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}.$$

La successione $\ln(1+n)/\sqrt{n}$ *è convergente a 0, dunque limitata; quindi esiste* $k>0$ *tale che*

$$\left|\frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}\right| \le k\frac{1}{n^{3/2}},$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ *converge. Dunque in* $[0,1]$ *c'è convergenza totale.*

(b) Fissato $x\in\mathbb{R}$ *si ha, per* $n\to\infty$,

$$\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\sim\frac{x}{n^2}.$$

Dunque la serie data ha lo stesso carattere di $x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, *e converge. In* $[0,+\infty)$ *non può esserci convergenza totale; infatti* $\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ *assume valore massimo per* $x=n\pi/2$, *il massimo vale* $\frac{1}{n}$, *e la serie dei massimi* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *diverge. In* $[0,1]$ *c'è invece convergenza totale perché, ricordando che* $\sin x<x$ *se* $x>0$, *si ha*

$$\left|\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\le\frac{x}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *converge.*

1.3.11 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$$

per $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Studiarne la convergenza puntuale. Provare poi che la serie converge totalmente in ogni intervallo $[0,a]$ con $0<a<1$.

Risposta. Si veda la Figura 1.6. La serie può convergere solo in $(-1,1)$ *perché*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0 & \text{se } x\in(-1,1)\\ 1/2 & \text{se } x=1\\ 1 & \text{se } x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).\end{cases}$$

Applicando il criterio della radice si trova convergenza puntuale in $(-1,1)$. *Se* $x=1$ *la serie diverge a* $+\infty$; *il caso* $x=-1$ *non è considerato perché le funzioni* $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ *per* n *dispari non sono definite in tale punto. In ogni intervallo* $[0,a]$, *con* $0<a<1$, *il punto* a *è di massimo per le funzioni* f_n; *dunque*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}.$$

Quest'ultima serie converge poiché $a<1$, *dunque la serie data converge totalmente negli intervalli* $[0,a]$, $0<a<1$.

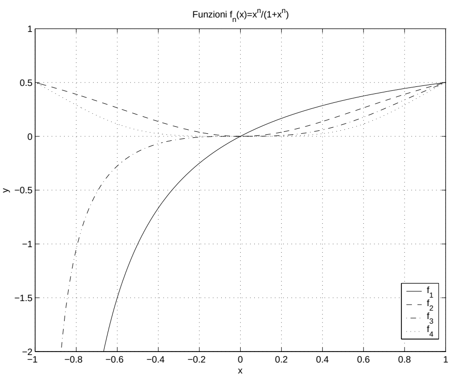

Figura 1.6: Vedi Esercizio 1.3.11.

1.3.12 Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}.$$

Risposta. Se $x=0$ *si ha la serie nulla, che converge con somma zero. Se* $x\ne0$

$$\frac{x}{1+n^2x^2}=\frac{1}{x}\,\frac{1}{\dfrac{1}{x^2}+n^2}\sim\frac{1}{x}\,\frac{1}{n^2}$$

per $n\to\infty$. *Poiché la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *converge, ne segue che la serie data converge per ogni* $x\in\mathbb{R}$.

1.3.13 Si consideri in $[0,+\infty)$ la successione di funzioni $f_n(x) = nxe^{-nx}$.

(a) Si disegni un grafico approssimativo di alcune funzioni della successione; si calcoli il $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Si studi la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; si calcoli la funzione somma.

(c) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{\alpha}e^{-nx}$ converge totalmente nell'intervallo $[0,+\infty)$.

Risposta.

(a) La funzione f_n ha un massimo assoluto $1/e$ nel punto $1/n$; inoltre $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(b) Nel punto 0 la serie è identicamente nulla; se $x \neq 0$ la serie converge per il criterio della radice:

$$\frac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{x}}{e^x} \to \frac{1}{e^x} < 1\,.$$

Pertanto la serie converge puntualmente in $[0,+\infty)$. Abbiamo visto sopra che le f_n hanno tutte massimo $1/e$; non vi può pertanto essere convergenza totale in $[0,+\infty)$. Vi è invece convergenza totale in ogni intervallo $[a,+\infty)$ con $a > 0$; consideriamo infatti in tale intervallo le funzioni f_n per $n > 1/a$. Esse sono decrescenti in $[a,+\infty)$ e dunque $\max_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a)$; si conclude osservando che abbiamo già dimostrato sopra che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ converge.
Consideriamo dunque $x > 0$ e $a < x$; poiché in $[a,+\infty)$ la convergenza è totale

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} nxe^{-nx} &= x\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = -x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}e^{-nx} = -x\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^n \\ &= -x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - 1\right) = \frac{xe^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\,.\end{aligned}$$

(c) Poniamo $g_n(x) = nx^{\alpha}e^{-nx}$. Si ha $g_n'(x) = nx^{\alpha-1}e^{-nx}(\alpha - nx)$; pertanto la funzione g_n ha un massimo nel punto α/n che vale $(\alpha/e)^{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. La serie di termine generale $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge se e soltanto se $\alpha > 2$, e dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ converge totalmente in $[0,+\infty)$ per tali valori di α.

1.3.14 In $[0,+\infty)$ e per $\alpha > 0$ studiare la convergenza puntuale e totale delle serie di funzioni

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^{\alpha}x}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{n^{\alpha}(1+nx)}$.

Risposta.

(a) Nel punto 0 la serie è identicamente nulla, dunque converge a 0; se $x > 0$ si ha $\frac{x}{1+n^{\alpha}x} \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ converge se e soltanto se $\alpha > 1$. Per il criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^{\alpha}x}$ converge se $\alpha > 1$.
Inoltre, posto $f_n(x) = \frac{x}{1+n^{\alpha}x}$, si calcola

$$f_n'(x) = \frac{1}{(1+n^{\alpha}x)^2} > 0\,.$$

Dunque la funzione f_n è crescente e poiché $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{n^{\alpha}}$, si ha che $f_n(x) < \frac{1}{n^{\alpha}}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ converge se e soltanto se $\alpha > 1$, e dunque per tali valori vi è convergenza totale.

(b) Nel punto 0 la serie è identicamente nulla, dunque converge a 0; se $x > 0$ si ha $\frac{\sqrt{x}}{n^{\alpha}(1+nx)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$, da cui la convergenza puntuale dal criterio del confronto asintotico se $\alpha > 0$.
Posto $g_n(x) = \frac{\sqrt{x}}{n^{\alpha}(1+nx)}$, si calcola

$$g_n'(x) = \frac{1-nx}{2\sqrt{x}n^{\alpha}(1+nx)^2}\,.$$

Pertanto la funzione g_n ha un massimo nel punto $1/n$ che vale $\frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. Vi è pertanto convergenza totale se $\alpha + \frac{1}{2} > 1$, cioè se $\alpha > \frac{1}{2}$.

1.4 Esercizi proposti

1.4.1 Studiare la convergenza della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

1.4.2 Disegnare per $x \in [0,+\infty)$ un grafico approssimativo delle successioni di funzioni

(a) $f_n(x) = e^{-nx}\sin^2(nx)$,

(b) $f_n(x) = x^n e^{-nx}$,

e studiare la convergenza delle relative serie di funzioni.

1.4.3 Si consideri in $[0,+\infty)$ la successione di funzioni $f_n(x) = e^{-nx} - e^{-2nx}$, $n = 0, 1, \ldots$. Tracciare un grafico approssimativo di una di tali funzioni; studiare la convergenza della successione; studiare convergenza puntuale e totale della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$; stabilire la somma della serie (dove la serie converge).

1.4.4 Disegnare un grafico approssimativo delle seguenti successioni di funzioni f_n e studiare la convergenza delle serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$:

(a) $f_n = \sin\left(\dfrac{x}{n^2}\right)$;

(b) $f_n = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{arctg}(\dfrac{x}{n})$;

(c) $f_n(x) = \sinh\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

Suggerimento. Fissato $x \in \mathbb{R}$ *si ha* $\sin\left(\frac{x}{n^2}\right) \sim \frac{x}{n^2}$, $\mathrm{arctg}(\frac{x}{n}) \sim \ldots$, $\sinh\left(\frac{x}{n}\right) \sim \ldots$.

1.4.5 Calcolare le somme delle serie di funzioni

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)x^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$,

riconducendo le serie a serie geometriche; specificare dove le serie date convergono.

1.4.6 Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$. Determinarne l'insieme di convergenza, dire se la funzione somma è continua e derivabile, calcolarne la funzione somma a meno di una costante additiva.

1.4.7 Si consideri la funzione $f_n = f_n(x)$ nulla se $|x| > n$ e il cui grafico in $[-n, n]$ è il triangolo isoscele di base $[-n, n]$ e altezza $1/n$. Disegnare il grafico di f_n. Discutere il $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$; discutere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; dire se esiste un intervallo $[a,+\infty)$, con $a \geq 0$, in cui la serie converge totalmente.

1.4.8 Si consideri per $x \geq 0$ la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{n/2}$. Trovare il più grande intervallo $[0, r)$ in cui la serie converge. Cosa si può dire della convergenza totale? E' continua in $[0, r)$ la funzione somma?

Capitolo 2

Serie di potenze

2.1 Serie di MacLaurin

2.1.1 Trovare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n}.$$

Risposta. Posto $y=(x-3)^2$ *si ottiene*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n},$$

che è la serie di Mac Laurin della funzione $-\log(1-y)$*; tale serie converge per* $y \in [-1,1)$*. Dunque la serie data converge per* $x \in (2,4)$ *alla funzione* $f(x) = -\ln(6x - x^2 - 8)$.

2.1.2 Scrivere la serie di Mac Laurin della funzione $f(x) = \ln(1+10x)$, specificando l'insieme di convergenza.

Risposta. Dalla serie di Mac Laurin della funzione $\ln(1+y)$ *si ottiene, con la sostituzione* $y = 10x$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n} x^n$$

in $(-1/10, 1/10)$.

2.1.3 Scrivere la serie di Mac Laurin della funzione $f(x) = \dfrac{1}{4+x^4}$, deducendola da una serie di Mac Laurin nota. Specificare il raggio di convergenza della serie. Calcolare poi la serie derivata e specificare a quale funzione converge.

Risposta. Si ha
$$\frac{1}{4+x^4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-x^4/4)}.$$

Pertanto la funzione f *è la somma della serie geometrica (dove converge)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{4n}.$$

Tale serie ha ragione $-x^4/4$ *e converge dunque per* $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$*. Il raggio di convergenza della serie è pertanto* $\sqrt{2}$*. La serie derivata è*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} x^{4n-1},$$

e converge in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *ad* $f'(x) = \dfrac{-4x^3}{(4+x^4)^2}$.

2.2 Serie di potenze

2.2.1 Dato $\alpha > 0$ calcolare l'insieme di convergenza delle serie di potenze

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha x^n}{n!}$.

Risposta. Il raggio di convergenza della prima serie è 1; se $x = -1$ la serie è indeterminata, se $x = 1$ è divergente. Pertanto l'insieme di convergenza è l'intervallo $(-1, 1)$. Il raggio di convergenza della seconda serie è $+\infty$, dunque la serie è convergente in $\mathbb{R}$.

2.2.2 Studiare la convergenza delle serie di potenze

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n + n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+10)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

Risposta.

(a) Il raggio di convergenza è 3, perciò la serie converge certamente per $|x-1| < 3$. Per $x = -2$ si ottiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{3^n+n^2}$, indeterminata poiché $\frac{3^n}{3^n+n^2} \sim 1$; per $x = 4$ invece si ha la serie di termine generale 1, che diverge. L'insieme di convergenza è pertanto l'intervallo $(-2, 4)$.

(b) Il raggio di convergenza è 1, perciò la serie converge sicuramente per $|x+10| < 1$. Per $x = -11$ si ottiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/\sqrt[3]{n}$, che converge; per $x = -9$ invece si ha la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt[3]{n}$, che diverge. L'insieme di convergenza è dunque l'intervallo $[-11, -9)$.

2.2.3 Calcolare l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$$

e la funzione somma. Dedurre l'insieme di convergenza e la somma della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n e^{(n-1)y}.$$

Risposta. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n n|} = 1$$

si ha che il raggio di convergenza è 1. Nel punto 1 la serie di potenze è indeterminata, nel punto -1 la serie diverge a $-\infty$. Dunque l'insieme di convergenza della serie di potenze è l'intervallo $(-1, 1)$.

Per calcolare la funzione somma si ricordi che per una serie di potenze con raggio di convergenza r la convergenza è totale in ogni intervallo chiuso $[-\rho, \rho]$ con $\rho < r$. Dunque, in ogni intervallo $[-\rho, \rho]$ con $\rho < 1$,

$$\begin{aligned} \int \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n + C = \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n + C = \frac{1}{1-(-x)} - 1 + C \\ &= \frac{1}{1+x} - 1 + C \end{aligned}$$

dove C è una costante. Per l'arbitrarietà di ρ la somma della serie nell'intervallo $(-1, 1)$ è dunque

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

La serie di funzioni coincide con la serie di potenze se $x = e^y$; dunque essa converge se e soltanto se $-1 < e^y < 1$, cioè in $(-\infty, 0)$. La sua funzione somma è $-\frac{1}{(1+e^y)^2}$.

2.2.4 Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log n} x^n .$$

Indicata con f la funzione somma, scrivere la serie di potenze di f'.

Risposta. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{\log n}{\log(n+1)} = 1$$

si deduce che il raggio di convergenza è 1. Nel punto 1 la serie diverge, nel punto -1 è indeterminata. Dunque l'insieme di convergenza è l'intervallo $(-1,1)$.

La convergenza della serie è totale in ogni intervallo $[-\rho,\rho]$ con $\rho<1$; fissato $x\in(-1,1)$ e considerato un intervallo $[-\rho,\rho]$ contenente x, con $\rho<1$, si ha in $[-\rho,\rho]$

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\log n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\log(n+1)} x^n .$$

2.2.5 Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n(n+1)}$$

specificando raggio e insieme di convergenza.

Risposta. Si tratta di una serie di potenze centrata in 1, con raggio di convergenza 1. Dunque la serie converge sicuramente in $(0,2)$. Se $x=0$, si ha una serie a termini di segno alterno, assolutamente convergente; se $x=2$ la serie ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, quindi converge. L'insieme di convergenza è pertanto l'intervallo $[0,2]$.

2.2.6 Calcolare il raggio e l'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)x^n$.

Risposta. Il raggio di convergenza è 1, in quanto

$$1 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log n} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Per $x=1$ si ha la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log n$, che diverge perché $\log n \to \infty$ per $n\to\infty$; per $x=-1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log n$, che è indeterminata. L'insieme di convergenza è quindi l'intervallo $(-1,1)$.

2.2.7 Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{10^n}$$

e calcolarne, dove converge, la somma.

Risposta. Si tratta di una serie geometrica di ragione $\dfrac{x-1}{10}$, che nell'insieme di convergenza $(-9,11)$ converge ad $f(x) = \dfrac{10}{11-x}$.

2.2.8 Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\ln n}.$$

Risposta. Si tratta di una serie di potenze centrata in -1, con raggio di convergenza 1. Dunque la serie converge sicuramente in $(-2,0)$. Se $x=-2$, si ha una serie a termini di segno alterno, convergente per il criterio di Leibniz; se $x=0$ la serie è maggiorante della serie armonica, dunque per il criterio del confronto diverge. L'insieme di convergenza è dunque $[-2,0)$.

2.2.9 Studiare la convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+x^n}{1+n^2}$.

Risposta. Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+x^n}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2}\,.$$

La serie numerica a secondo membro è convergente perché il termine generale è asintotico a $1/n^2$*. Il raggio di convergenza della serie di potenze a secondo membro è* 1*, in quanto*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+(n+1)^2}{1+n^2} = 1\,.$$

Nel punto 1 *tale serie si riduce a* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$*, che converge; nel punto* -1 *la serie diventa* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$*, che converge assolutamente. Dunque la serie data converge in* $[-1,1]$*.*

2.2.10 Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

Qual'è la funzione somma?

Risposta. Il raggio di convergenza è 1*, pertanto si ha convergenza in* $(-1,1)$*. Se* $x=-1$ *la serie è indeterminata, se* $x=1$ *diverge a* $+\infty$*; l'insieme di convergenza è dunque l'intervallo* $(-1,1)$*. Per calcolare la somma, si osservi che*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)$$

per ogni $x \in (-1,1)$*. Dunque* $f(x) = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$*.*

2.2.11 Calcolare la somma della serie di potenze

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n2^n}$.

Risposta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^3)^n}{n!} = e^{-x^3} - 1$*, per* $x \in \mathbb{R}$*;*

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x^2/2)^n}{n} = \log\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$*, per* $x \in (-\sqrt{2},\sqrt{2})$*.*

2.2.12 Sia $a>0$, $x_0 \in \mathbb{R}$; studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n a^n}$$

e calcolare la funzione somma, motivando i passaggi per la sua determinazione.

Risposta. La serie ha raggio di convergenza a *e converge in* $[x_o-a, x_o+a)$*. La funzione somma si ottiene derivando termine a termine la serie di partenza (operazione lecita grazie alla convergenza totale in ogni intervallo* $[x_o-\rho, x_o+\rho]$*,* $0<\rho<a$*) o ricordando la serie di MacLaurin della funzione* $\log(1-x)$*; si trova* $f(x) = \log\left|1+\frac{x-x_o}{a}\right|$*.*

2.2.13 Calcolare la funzione somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n(2n-1)}{n!}\, x^{2n}\,.$$

Risposta. Poiché

$$(-1)^n \frac{2n(2n-1)}{n!}\, x^{2n} = (-1)^n \frac{x^2}{n!} \cdot \left(2n(2n-1)x^{2n-2}\right) = (-1)^n \frac{x^2}{n!} \left(x^{2n}\right)'' = \frac{x^2}{n!} \left((-x^2)^n\right)''$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n(2n-1)}{n!}\, x^{2n} = x^2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \right)'' = x^2 \left(e^{-x^2} - 1\right)'' = 2x^2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, poiché $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.

2.2.14 Sia $\{a_n\}$ una successione con $a_n \geq 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = l > 0$. Cosa si può dire del raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$? E se $l = 0$?

Risposta. Il raggio di convergenza è 1 in quanto $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l^0 = 1$. Se $l = 0$ il limite precedente si presenta nella forma indeterminata 0^0 e nulla può essere dedotto senza ulteriori informazioni.

2.3 Esercizi proposti

2.3.1 Rispondere alle seguenti domande motivando la risposta.

(a) Può essere la funzione $|x|$ somma di una serie di potenze?

(b) Può esistere una serie di potenze che converge nell'intervallo $[-1, 1]$ e anche nel punto 2?

(c) Possono 1 e 3 appartenere all'insieme di convergenza di una serie di potenze che ha raggio di convergenza 3?

(d) Può una serie di potenze convergere solo nel punto 10?

2.3.2 Studiare la convergenza delle serie di potenze

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n! + (n+1)!}\, x^n,$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg} n) \cdot x^n,$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^{\frac{n}{2}}}{1+10^n}\, x^n,$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{10^n + 20^n}.$

2.3.3 Studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze e determinarne la funzione somma:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n},$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)},$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\, x^n.$

2.3.4 Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono entrambe le serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2 2^n}.$$

Calcolare la somma della prima serie.

2.3.5 Calcolare l'insieme di convergenza e la somma delle seguenti serie di potenze, riconoscendo in esse due serie note:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{n!} (x-2)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-1)^n.$$

2.3.6 Siano a, b numeri reali positivi. Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{b^n}.$$

Caratterizzare i valori di a e b per cui la serie converge totalmente nell'intervallo $[-1, 9]$.

2.3.7 Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} x^n (x-1)^n$. Dire se si tratta di una serie di potenze; calcolarne l'insieme di convergenza e la funzione somma, specificando il tipo di convergenza.

Suggerimento. Posto $y = x(x-1)$, si ha $x^n(x-1)^n = [x(x-1)]^n = y^n$.

2.3.8 Calcolare il raggio di convergenza e la somma della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-1)^n}{n!}$.

2.3.9 Studiare la convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\log n}}$.

2.4 Integrazione per serie di potenze di equazioni differenziali ordinarie

2.4.1 Calcolare il polinomio di Mac Laurin di grado 4 delle soluzioni dei seguenti problemi ai valori iniziali:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} y'' - x^2 y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} y'' - xy' = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Risposta. Per il primo teorema di Fuchs la soluzione sarà definita in tutto $\mathbb{R}$ e sviluppabile in serie di potenze; i primi cinque termini della serie sono il polinomio di Mac Laurin $P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ cercato.

(a) Dai dati iniziali si ha immediatamente che $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Sostituendo P_4 nell'equazione e uguagliando i coefficienti delle potenze di ugual grado si ricavano i termini rimanenti. Si ottiene $P_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4$.

(b) Si trova subito $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e, procedendo come sopra, si ottiene $P_4(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4$.

2.4.2 Risolvere, integrando per serie, il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y'' - x^2 y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Risposta. Il primo teorema di Fuchs si applica; si cerca dunque una soluzione del tipo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dai dati iniziali si trova $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Derivando la serie termine a termine e inserendo nell'equazione si ottiene l'espressione

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n \\ &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \big((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-2}\big)x^n = 0\,. \end{aligned}$$

Pertanto $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_2 = a_3 = 0$; inoltre se $n \geq 2$ si deduce dalla serie la relazione

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_{n-2}\,.$$

Pertanto solo i coefficienti che hanno indice multiplo di 4 sono diversi da zero e si trova

$$a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3}, \quad a_8 = \frac{1}{8 \cdot 7} a_4 = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3} \quad \dots \quad a_{4n} = \frac{1}{4n \cdot (4n-1) \cdot (4n-4) \cdot (4n-3) \dots 4 \cdot 3}\,.$$

Pertanto $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n} x^{4n}$. *Per quanto riguarda il raggio di convergenza poniamo* $z = x^4$, $b_n = a_{4n}$ *e consideriamo la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. *Si ha che*

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{4n+4}}{a_{4n}} = \frac{1}{(4n+4)(4n+3)} \to 0$$

se $n \to \infty$. *Pertanto il raggio di convergenza della serie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *è infinito e dunque la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{4n} x^{4n}$ *converge in tutto* $\mathbb{R}$.

2.4.3 Si consideri l'equazione differenziale ordinaria $x^2 y'' + xy' - y = 0$. È una equazione di Bessel? Cercare una soluzione non nulla sotto forma di serie di potenze.

Risposta. L'espressione generale di una equazione di Bessel di indice p *è* $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0$; *non si tratta pertanto di una equazione di Bessel. Poiché l'equazione è omogenea, la funzione* $y(x) = 0$ *è soluzione. Cerchiamo un'altra soluzione sotto la forma* $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Derivando la serie termine a termine si ottiene l'espressione*

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} \big(n(n-1) + n - 1\big) a_n x^n + a_1 x - a_0 - a_1 x \\ &= -a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) a_n x^n . \end{aligned}$$

Si deduce che $a_0 = 0$, a_1 *può essere scelto arbitrariamente,* $a_n = 0$ *se* $n \geq 2$. *Pertanto* $y(x) = cx$, *con* c *una costante reale arbitraria, è soluzione dell'equazione data.*

2.5 Esercizi proposti

2.5.1 Si consideri l'equazione differenziale $y'' + (\sin x) y' - (\cos x) y = 0$ con dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$. Giustificare l'esistenza di una soluzione; calcolarne il polinomio di MacLaurin di grado 4.

Suggerimento. Si rimpiazzino le funzioni sin *e* cos *con un loro opportuno sviluppo di MacLaurin.*

2.5.2 Si consideri l'equazione differenziale $y'' + e^{-x} y' + (\cos x) y = 0$ con dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Motivare il fatto che il primo teorema di Fuchs è applicabile. Scrivere il polinomio di MacLaurin, del terzo ordine, della soluzione y utilizzando gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni e^{-x} e $\cos x$. Disegnare un grafico approssimativo della soluzione.

2.5.3 Si consideri il problema ai valori iniziali $y'' + y \cos x = e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Ricordando gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni $\cos x$ e e^{-x}, determinare lo sviluppo di MacLaurin al terz'ordine della soluzione.

2.5.4 Calcolare lo sviluppo di MacLaurin al terz'ordine della soluzione del problema ai valori iniziali $y'' + e^{-x} y' + e^{-2x} y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Capitolo 3

Serie trigonometriche e di Fourier

3.1 Serie trigonometriche

3.1.1 Dire se e dove convergono le serie trigonometriche

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$.

Risposta. Ricordiamo il criterio di Dirichlet per la convergenza delle serie trigonometriche: se la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *ha coefficienti* a_n, b_n *positivi, monotoni decrescenti, infinitesimi, allora la serie converge tranne al più nei punti* $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Si ha $a_n = 1/\log n \to 0$ *per* $n \to \infty$, $\{a_n\}$ *decrescente; quindi per il criterio di Dirichlet la serie converge sicuramente per ogni* $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *Se* $x = 2k\pi$ *si ottiene la serie* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$; *essa diverge perché maggiorante della serie armonica. L'insieme di convergenza è pertanto* $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

(b) Si ha $a_n = 1/\sqrt{n}$, $a_n \to 0$ *per* $n \to \infty$ *decrescendo; per il criterio di Dirichlet la serie converge sicuramente per ogni* $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *Se* $x = 2k\pi$ *si ottene la serie divergente* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. *Dunque l'insieme di convergenza è* $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

3.2 Serie di Fourier

3.2.1 Dare un esempio esplicito di una funzione f definita in $[-\pi, \pi]$, pari, a media integrale nulla.

Risposta. Si prenda ad esempio $f(x) = \cos x$ *per* $x \in [-\pi, \pi]$.

3.2.2 Le seguenti funzioni sono definite in $[-\pi, \pi)$ e prolungate poi per periodicità. Disegnarne il grafico; scriverne poi la serie di Fourier, specificando la convergenza.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & \text{se } x \in [-\pi, -\pi/2) \cup [\pi/2, \pi), \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ x & \text{se } x \in [0, \pi), \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ \pi & \text{se } x \in [0, \pi), \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ \pi - x & \text{se } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Risposta. Vedi Figura 3.1. Utilizzeremo nel seguito la notazione

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

per indicare la serie di Fourier della funzione f. La serie convergerà a $f(x)$ nei punti x di continuità di f, alla media dei limiti destro e sinistro nei punti di discontinuità.

(a) La funzione f è pari, dunque si sviluppa in serie di soli coseni:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)x)\ .$$

La serie converge a $f(x)$ in tutti i punti x in cui f è continua, ovvero in ogni intervallo $(-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; nei punti $\pi/2+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la serie converge a $1/2$.

(b) La funzione f non è né pari né dispari; si ha:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx - 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)\,.$$

La serie converge a $f(x)$ in ogni intervallo $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; nei punti $\pi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la serie converge a $\pi/2$.

(c) Si ha

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$$

La serie converge a $f(x)$ in ogni intervallo $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; nei punti $\pi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la serie converge a $\pi/2$.

(d) Siccome f è dispari, si ha

$$f(x) \sim 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

La serie converge a $f(x)$ in ogni intervallo $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; nei punti $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la serie converge a 0.

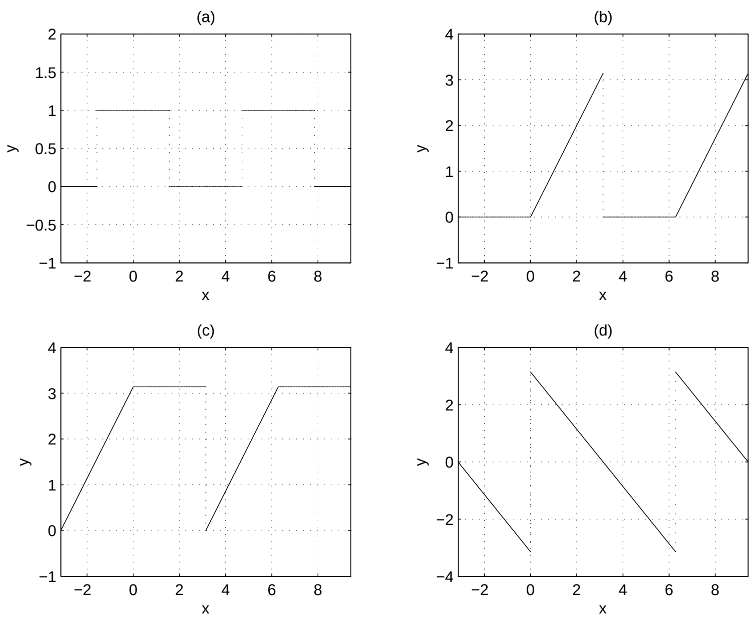

Figura 3.1: Vedi Esercizio 3.2.2. I grafici delle funzioni sono disegnati su due periodi.

3.2.3 Si considerino le funzioni

(a) $f(x) = x^2$ in $[0, \pi)$, estesa come funzione dispari a $[-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità a tutto $\mathbb{R}$;

(b) $f(x) = x(x - \pi)$ in $[0, \pi)$, prolungata a $[-\pi, 0)$ come funzione pari e infine estesa per periodicità a $\mathbb{R}$.

Disegnare il grafico delle funzioni, calcolarne le serie di Fourier e specificarne la convergenza.

Risposta. Vedi Figura 3.2.

(a) La funzione f è dispari, dunque la sua serie di Fourier contiene solo seni: è $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, con

$$b_n = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{k} & \text{se } n = 2k \\ \dfrac{2(2k+1)^2\pi^2 - 8}{(2k+1)^3\pi} & \text{se } n = 2k+1. \end{cases}$$

Essa converge a $f(x)$ negli intervalli $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$; converge a 0 nei punti $\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) La funzione f è pari, ed è continua in $\mathbb{R}$. Perciò

$$f(x) = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

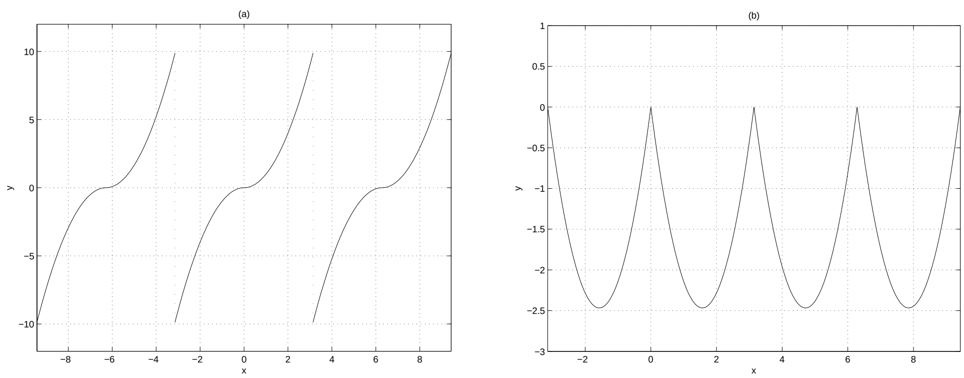

Figura 3.2: Vedi Esercizio 3.2.3.

3.2.4 Sia $f(x) = (\pi + 1) - x$ in $[-\pi, \pi)$. Estendere f per periodicità a tutto $\mathbb{R}$, disegnarne il grafico, quindi:

(a) calcolare la serie di Fourier di f e specificarne la convergenza;

(b) verificare l'uguaglianza di Parseval calcolando esplicitamente l'integrale e la somma della serie che compaiono in tale formula.

Risposta.

(a) La funzione f si sviluppa in serie di soli seni perché differisce di $\pi + 1$ dalla una funzione dispari x; si ha

$$f(x) = (\pi + 1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$$

per ogni $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; nei punti $x = (2k+1)\pi$ la serie converge a $\pi + 1$.

(b) L'uguaglianza di Parseval per una funzione 2π-periodica f è

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) .$$

In questo caso si ha dunque

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi + 1 - x)^2 dx = 2(\pi + 1)^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Il calcolo del primo membro dà $2(4\pi^2 + 6\pi + 3)/3$; ricordando che $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ si verifica con un facile calcolo che questo è anche il valore del secondo membro.

3.2.5 Si consideri la funzione f che vale A in $[0, T/2)$ e $-A$ in $[-T/2, 0)$, prolungata per periodicità a $\mathbb{R}$. Calcolarne la serie di Fourier e applicare quindi la formula di Parseval.

Risposta. Si tratta di una funzione T-periodica, dispari, la cui serie di Fourier è $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega k x)$, con $\omega = 2\pi/T$ e

$$b_k = \frac{4A}{T} \int_0^{T/2} \sin(\omega k x)\, dx = \frac{2A}{\pi k} \left(1 - (-1)^k\right) .$$

Pertanto $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{4A}{\pi(2n+1)}$ e dunque

$$f(x) \sim \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left((2n+1)\omega x\right) .$$

La serie converge a $f(x)$ tranne che nei punti $k\frac{T}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, in cui converge a 0. Dalla formula di Parseval si deduce

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16A^2}{\pi^2(2n+1)^2}$$

da cui

$$2A^2 = \frac{16A^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

ovvero

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$$

3.2.6 Sia f la funzione definita in $[-1, 1)$ da $f(x) = e^{|x|}$, e prolungata poi per periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Disegnare il grafico di f e scriverne la serie di Fourier.

Risposta. Si tratta di una funzione pari di periodo $T = 2$; perciò $\omega = 2\pi/T = \pi$ e si ha

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\pi k x),$$

dove $a_0/2 = e - 1$, mentre

$$a_k = \int_{-1}^{1} f(x) \cos(\pi k x) dx = 2\frac{(-1)^k e - 1}{1 + \pi^2 k^2}.$$

La serie di Fourier converge ad $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3.2.7 Sia $a \in [0, 1]$; si consideri la funzione f definita in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = 1$ se $x \in [-a, a]$, nulla in $[-\pi, \pi) \setminus [-a, a]$ e poi prolungata per periodicità a $\mathbb{R}$. Si calcoli la serie di Fourier di f; se ne deduca la convergenza e la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Risposta. Si tratta di una funzione 2π-periodica pari, la cui serie di Fourier è $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$. Si trova

$$\frac{a_0}{2} = \frac{a}{\pi}, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^a \cos(kx)\, dx = \frac{2\sin(ka)}{k\pi} .$$

Perciò

$$f(x) \sim \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \cos(kx)$$

dove la serie converge a $f(x)$ in tutti i punti tranne in quelli della forma $\pm a + 2\pi\mathbb{Z}$, in cui converge al valore $1/2$. In particolare, scelto $a = 1$, poiché nel punto 0 la serie converge a $f(0) = a = 1$ si ha

$$1 = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2} .$$

3.2.8 Calcolare la serie di Fourier complessa della funzione definita in $[-\pi, \pi)$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

e prolungata per periodicità a $\mathbb{R}$.

Risposta. Si ha

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

dove

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xe^{-ikx}dx = \frac{1}{2k}\left(e^{-ik\pi}\left(\frac{1}{k\pi}+i\right)-\frac{1}{k\pi}\right).$$

3.2.9 Sia f la funzione definita in $[-\pi, \pi)$ da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 & x \in [-\pi, 0) \cup (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

e prolungata per periodicità a $\mathbb{R}$. Calcolare la serie di Fourier complessa di f.

Risposta. Si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik\pi/2}-1}{k} e^{ikx}.$$

Nei punti $x \neq \pi/2 + 2k\pi$ e $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la serie converge a $f(x)$. Nei punti $x = 2k\pi$ e $x = \pi/2 + 2k\pi$ la serie di Fourier di f converge a $-1/2$.

3.2.10 È vero che

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1+x^2}\,dx = 0?$$

Risposta. Sì. Infatti dal teorema di Riemann-Lebesgue si ha che $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0$ se f è integrabile su $[a, b]$. In questo caso $f(x) = 1/(1 + x^2)$.

3.2.11 Si considerino le seguenti serie trigonometriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sin(nx) + (-1)^n\cos(nx)\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{2^n}$.

Si provi che la prima non può essere la serie di Fourier di nessuna funzione regolare a tratti. Si provi poi che la seconda serie è totalmente convergente; posto f la sua somma si calcoli $\int_0^{2\pi} f^2(x)dx$.

Risposta.

(a) La serie data può scriversi nella forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

con coefficienti $a_n = (-1)^n$, $b_n = 1/n$. Il $\lim_{n\to\infty} a_n$ non esiste; dunque, per il teorema di Riemann-Lebesgue, la serie non può essere la serie di Fourier di nessuna funzione regolare a tratti.

(b) La serie data converge totalmente poiché $|\sin(nx)/2^n| \le 1/2^n$. La sua somma f è una funzione continua (a causa della continuità degli addendi della serie e della convergenza totale), dunque integrabile in $[0, \pi]$. Dalla formula di Parseval si ha

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \pi\left(\frac{4}{3}-1\right) = \frac{\pi}{3}.$$

3.3 Esercizi proposti

3.3.1 Dare un esempio di una funzione non continua a tratti; dare un esempio di una funzione non C^1 a tratti.

3.3.2 E' vero che se tutti i coefficienti b_k, $k = 1, 2, \dots$ di una serie di Fourier di una funzione f sono nulli, allora la funzione è pari? E' vero che se tutti i coefficienti a_k, $k = 1, 2, \dots$ di una serie di Fourier di una funzione f sono nulli, allora la funzione è dispari?

3.3.3 Sia $b > 0$; sia f la funzione il cui grafico nell'intervallo $[-b, b]$ è il triangolo di vertici $(-b, 0)$, $(0, 1)$, $(b, 0)$, e poi prolungata a $\mathbb{R}$ per periodicità. Disegnare il grafico di f e scriverne la serie di Fourier, specificandone la convergenza.

Suggerimento. Si tratta di una funzione pari e continua, la cui serie di Fourier converge ad f (totalmente) in ogni punto. Si trova

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left(\frac{\pi}{b}(2n+1)x\right).$$

3.3.4 Scrivere la serie di Fourier della funzione di periodo 2 definita in $[-1, 1)$ da $f(x) = 1 - x$. Disegnare il grafico di f e precisare la convergenza della serie.

Suggerimento. $f(x) \sim 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin(\pi k x)}{\pi k}$.

3.3.5 Scrivere le serie di Fourier delle funzioni f e g seguenti:

(a) f è definita in $[3, 6)$ da $f(x) = x - 3$ ed estesa poi ad $\mathbb{R}$ per periodicità;

(b) g è definita in $[2, 4)$ da $g(x) = 2 - x$ ed estesa poi ad $\mathbb{R}$ per periodicità.

3.3.6 Si consideri la funzione definita in $[-2, 2)$ da $f(x) = 0$ se $x \in [-2, -1) \cup (1, 2)$, $f(x) = x + 1$ se $x \in [-1, 0)$, $f(x) = 1 - x$ se $x \in [0, 1]$ e poi prolungata a $\mathbb{R}$ per periodicità. Si disegni un grafico di f. Calcolare la serie di Fourier di f, specificandone la convergenza.

3.3.7 Scrivere le serie di Fourier in forma complessa delle funzioni f e g definite in $[-1, 1)$ come segue e prolungate poi ad $\mathbb{R}$ per periodicità:

(a) $f = \begin{cases} 0 & \text{in } [-1, 0)\,, \\ 1 & \text{in } [0, 1) \end{cases}$

(b) $g = \begin{cases} 0 & \text{in } [-1, 0) \cup [1/2, 1)\,, \\ 1 & \text{in } [0, 1/2)\,. \end{cases}$

3.3.8 Approssimare la funzione $f(x) = x$ nell'intervallo $[0, 2]$ tramite una serie di Fourier di soli coseni (rispettivamente di soli seni). Scrivere i primi due termini non nulli della serie e tracciarne un grafico approssimativo (in entrambi i casi).

Suggerimento. Definire la funzione f nell'intervallo $[-2, 2)$ prolungandola in modo pari (dispari), quindi estenderla a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità (periodo 4). Sia $\bar{f}$ la funzione risultante. La serie di Fourier di $\bar{f}$ approssima evidentemente f nell'intervallo $[0, 2]$.

3.3.9 Si consideri la funzione $f : [0, \pi) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$ se $x \in [0, \pi/2)$ e $f(x) = 0$ se $x \in [\pi/2, \pi)$. Approssimarla con una serie di Fourier di soli coseni.

3.3.10 E' vero che $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} x^{10} \sin(nx)dx = 0$? Perché?

3.3.11 Sia f la funzione definita da $f(x) = 1$ se $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 0$ se $x \in [-2, 1) \cup (1, 2]$ e quindi estesa a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità. Disegnare il grafico di f. Calcolare la serie di Fourier di f semplificando i calcoli il più possibile. Specificare la convergenza della serie. Scrivere la formula di Parseval per f, deducendo la somma della serie dei quadrati delle ampiezze delle armoniche.

Capitolo 4

Equazioni alle derivate parziali

4.1 Il metodo di somiglianza

4.1.1 Cercare una soluzione dei seguenti problemi ai valori iniziali con il metodo di somiglianza:

(a)

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - x^2 \partial_x^2 u = 0 \\ u(0,x) = 2x^2 \\ \partial_t u(0,x) = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_x^2 u = u \\ u(0,x) = \cos x \\ \partial_t u(0,x) = 0. \end{cases}$$

Risposta.

(a) Sostituendo $u(t,x) = f(t)x^2$ nell'equazione si ottiene per f il problema di Cauchy

$$\begin{cases} f'' - 2f = 0 \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $f(t) = 2\cosh(\sqrt{2}t)$. La soluzione del problema ai valori iniziali è pertanto $u(t,x) = 2x^2\cosh(\sqrt{2}t)$.

(b) Sostituendo $u(t,x) = f(t)\cos x$ nell'equazione si ottiene il problema di Cauchy

$$\begin{cases} f'' - 2f = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $f(t) = \cosh(\sqrt{2}t)$. La soluzione del problema ai valori iniziali è pertanto $u(t,x) = \cosh(\sqrt{2}t)\cos x$.

4.1.2 Cercare una soluzione dei seguenti problemi con il metodo di somiglianza:

(a)

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(0,x) = e^{-x} \\ \partial_t u(0,x) = 0\ , \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - 4\partial_x^2 u = 0 \\ u(0,x) = \cos x \\ \partial_t u(0,x) = 0\ , \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \\ u(x,0) = \cos x \\ \partial_y u(x,0) = 0\ . \end{cases}$$

Risposta.

(a) *Posto* $u(t,x) = f(t)e^{-x}$, *si ottiene per* f *il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} f'' - f = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $f(t) = \cosh t$. *La soluzione del problema ai valori iniziali è* $u(t,x) = e^{-x}\cosh t$.

(b) *Posto* $u(t,x) = f(t)\cos x$, *si ottiene il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} f'' + 4f = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $f(t) = \cos 2t$. *Pertanto* $u(t,x) = \cos(2t)\cdot\cos x$.

(c) *Posto* $u(t,x) = f(t)\cos x$, *si ottiene il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} f'' - f = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $f(t) = \cosh t$. *Pertanto* $u(t,x) = \cosh t \cos x$.

4.1.3 Determinare per $t > 0$, $x \in [0,\pi]$ e $D \geq 0$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_x^2 u = 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = \sin(nx)\,. \end{cases}$$

Commentare la soluzione trovata. Risolvere l'analogo problema per l'equazione $\partial_t u + D\partial_x^2 u = 0$.

Risposta. Si tratta dell'equazione del calore e si cerca una soluzione $u(t,x) = f(t)\sin(nx)$; *inserendo questa espressione nell'equazione e sfruttando il dato iniziale si trova per* f *il problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} f' + Dn^2 f = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

da cui $f(t) = e^{-Dn^2 t}$ *e quindi* $u(t,x) = e^{-Dn^2 t}\sin(nx)$. *La diffusione del calore* u *è quindi esponenziale (negativa) in tempo; più* D *è grande, più rapida è la diffusione. Inoltre più* n *è grande (cioè più la temperatura iniziale è poco uniformemente distribuita) più la diffusione è rapida (a* 0*).*

Nel caso della seconda equazione si trova $u(t,x) = e^{Dn^2 t}\sin(nx)$.

4.1.4 Trovare, usando il principio di somiglianza, una soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - 2\partial_t u - \partial_{xx}^2 u = 0 \\ u(0,x) = \sin x \\ \partial_t u(0,x) = 2\sin x. \end{cases}$$

Risposta. Posto $u(t,x) = f(t)\cdot\sin x$, *si ottiene il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} f'' - 2f' + f = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 2 \end{cases}$$

che ha soluzione $f(t) = e^t(t+1)$. *Pertanto* $u(t,x) = e^t(t+1)\sin x$.

4.1.5 Siano $D > 0$, $h > 0$. Risolvere col metodo di somiglianza il problema

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = \frac{\sin(hx)}{h}\,. \end{cases}$$

Cosa succede della soluzione per $D \to 0$? E per $h \to +\infty$?

Risposta. Posto $u(t,x) = f(t)\cdot\sin(hx)$, *si ottiene il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} f' + Dh^2 f = 0 \\ f(0) = 1/h \end{cases}$$

che ha soluzione $f(t) = e^{-Dh^2 t}/h$. *Pertanto* $u(t,x) = e^{-Dh^2 t}\sin(hx)/h$. *Per* $D \to 0$ *si ha* $u(t,x) \to \frac{\sin(hx)}{h}$, *mentre per* $h \to +\infty$ *si ha* $u(t,x) \to 0$.

Si noti che, più semplicemente, si poteva cercare una soluzione v *del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} v_t - Dv_{xx} = 0 \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0 \\ v(0,x) = \sin(hx)\,. \end{cases}$$

Per linearità si deduceva allora $u(t,x) = \frac{v(t,x)}{h}$.

4.1.6 Siano $c > 0$, $h > 0$. Risolvere col metodo di somiglianza il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = \frac{\sin(hx)}{h} \\ u_t(0,x) = 0\,. \end{cases}$$

Cosa succede della soluzione per $c \to 0$? E per $h \to +\infty$?

Risposta. Posto $u(t,x) = f(t)\cdot\sin(hx)$, *si ottiene il problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} f'' + c^2h^2 f = 0 \\ f(0) = 1/h \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $f(t) = \frac{\cos(cht)}{h}$. *Pertanto* $u(t,x) = \frac{\cos(cht)}{h}\sin(hx)$. *Per* $c \to 0$ *si ha* $u(t,x) \to \frac{\sin(hx)}{h}$, *mentre per* $h \to \infty$ *si ha* $u(t,x) \to 0$.

4.1.7 Risolvere l'equazione delle onde $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ con i dati $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $u(0,x) = 0$, $u_t(0,x) = -2\sin x$.

Risposta. Posto $u(t,x) = f(t)\cdot\sin x$, *si ottiene*

$$\begin{cases} f'' + c^2 f = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = -2 \end{cases}$$

che ha soluzione $f(t) = -\frac{2}{c}\sin(ct)$. *Pertanto* $u(t,x) = -\frac{2}{c}\sin(ct)\sin x$.

4.2 Altri esercizi

4.2.1 Risolvere $\partial^2_{tx} u = x^2$.

Risposta. Integrando rispetto a t *l'equazione si trova* $\partial_x u = x^2 t + c(x)$ *per una arbitraria funzione* c *della variabile* x; *integrando questa espressione rispetto a* x *si trova* $u = \frac{x^3}{3}t + C(x) + D(t)$ *per un'altra funzione* $C(x)$ *(una primitiva di* c*) e* $D(t)$ *una arbitraria funzione della variabile* t..

4.2.2 Risolvere $\partial^2_t u = 1$, $u(0,x) = x$, $\partial_t u(0,x) = x^2$.

Risposta. Integrando rispetto a t *l'equazione si trova* $\partial_t u = t + c(x)$, *dove* c *è una arbitraria funzione della variabile* x; *dal dato iniziale si trova* $c(x) = x^2$. *Integrando ancora* $\partial_t u = t + x^2$ *si trova* $u = \frac{t^2}{2} + x^2 t + d(x)$, *e dal dato iniziale si ha* $d(x) = x$. *In conclusione* $u = \frac{t^2}{2} + x^2 t + x$.

4.2.3 Si consideri l'equazione di Laplace $\partial^2_x u + \partial^2_y u = 0$. Sia $f = f(r)$ una funzione di una variabile reale. Imporre che $u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$ sia soluzione dell'equazione e dedurre una equazione differenziale ordinaria alla quale f deve soddisfare.

Risposta. Dal teorema di derivazione delle funzione composte si calcola

$$\begin{aligned} \partial_x u &= f'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \partial^2_x u &= f''(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ \partial^2_y u &= f''(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,. \end{aligned}$$

Inserendo queste espressioni nell'equazione si ottiene

$$f''(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \right) +$$
$$+f'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \left(\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right) = 0$$

e in conclusione, posto $r = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} = 0\,.$$

4.2.4 Risolvere in $[0,L]\times[0,M]$ l'equazione alle derivate parziali $a^2u_{xx}+u_{yy}=0$ con dati $u(x,0)=\sin(\omega x)$, $u(0,y)=u(L,y)=u(x,M)=0$, dove $\omega=\pi/L$. Dedurne la soluzione dell'equazione $a^2u_{xx}+b^2u_{yy}=0$, relativa agli stessi dati iniziali. Trovare un cambiamento di variabili $\bar{x}=\alpha x$, $\bar{y}=\beta y$ che trasformi l'equazione $a^2u_{xx}+u_{yy}=0$ in $u_{xx}+u_{yy}=0$.

Risposta. Si trova $u(x,y)=\sin(\omega x)\cdot\frac{\sinh(a\omega(M-y))}{\sinh(a\omega M)}$. *Per la seconda domanda basta rimpiazzare nell'espressione precedente* a *con* a/b. *Infine* $\alpha=\frac{1}{a}$, $\beta=1$.

4.2.5 Sia $c\neq 0$; risolvere per separazione di variabili l'equazione $u_{tx}+u_t-cu_x=cu$, con dato iniziale $u(0,x)=\sin x$, motivando i passaggi.

Risposta. Si cerca $u(t,x)=f(t)\sin x$; *inserendo nell'equazione e cancellando il fattore* $\cos x+\sin x$ *si trova l'equazione* $f'-cf=0$, *da cui* $u(t,x)=e^{ct}\sin x$.

4.3 Esercizi proposti

4.3.1 Risolvere con il metodo di somiglianza il problema $\partial_t^2u-\partial_x^2u=0$, $u(0,x)=e^{-2x}$, $u_t(0,x)=0$.

4.3.2 Risolvere con il metodo di somiglianza il problema $\partial_t^2u-\partial_x^2u=0$, $u(0,x)=\sin(x/3)\cos(x/3)$, $u_t(0,x)=0$.

Suggerimento. Ricordare le formule di duplicazione per il seno.

4.3.3 Risolvere col metodo di somiglianza $\partial_x^2u+\partial_y^2u=0$ con dati $u(x,0)=\sin(\frac{\pi}{L}x)$, $u(x,1)=2\sin(\frac{\pi}{L}x)$ se $x\in[0,L]$, $u(0,y)=u(L,y)=0$ se $y\in[0,1]$. Quale fenomeno fisico può essere rappresentato da questo problema?

Suggerimento. Per linearità risolvere separatamente dapprima $\partial_x^2u+\partial_y^2u=0$, $u(x,0)=\sin(\frac{\pi}{L}x)$, $u(x,1)=u(0,y)=u(L,y)=0$ *e quindi* $\partial_x^2u+\partial_y^2u=0$, $u(x,1)=2\sin(\frac{\pi}{L}x)$, $u(x,0)=u(0,y)=u(L,y)=0$; *poi sommare le soluzioni.*

4.3.4 Si consideri il problema $u_t-Du_{xx}=0$, $u(0,x)=\sin(\frac{\pi x}{L})$, $u(t,0)=u(t,L)=0$ per $t\geq 0$ e $x\in[0,L]$, $D>0$. Per quali $t>0$ la soluzione è minore di $1/10$?

4.3.5 Risolvere col metodo di somiglianza il problema ai valori iniziali $u_{tt}-u_{xx}=e^{-x}$, $u(0,x)=e^{-x}$, $u_t(0,x)=0$.

4.3.6 Si consideri in $[0,L]$ l'equazione alle derivate parziali $u_{tt}-u_{xx}=0$ con dati $u(0,x)=A\sin(\omega x)$, $u_t(0,x)=V\sin(\omega x)$, dove $\omega=\pi/L$. Dire quale fenomeno fisico può rappresentare questo problema. Risolvere il problema. Per quali V l'ampiezza della soluzione è almeno $2A$?

4.3.7 Cercare la soluzione con il metodo di somiglianza dei seguenti problemi:

(a) $u_t-Du_{xx}=\cos t\cdot\sin(\frac{\pi}{L}x)$, $u(0,x)=\sin(\frac{\pi x}{L})$, per $t\geq 0$, $x\in[0,L]$, $D>0$;
(b) $u_{tt}-c^2u_{xx}=e^{-t}\cdot\sin(\frac{\pi}{L}x)$, $u(0,x)=\sin(\frac{\pi x}{L})$, $u_t(0,x)=0$ per $t\geq 0$ e $x\in[0,L]$.

4.3.8 Risolvere col metodo di somiglianza l'equazione $\partial_tu-D\partial_x^2u=\alpha u$ in $[0,L]\times(0,+\infty)$ con dati $u(0,x)=\sin(\frac{\pi}{L}x)$, se $x\in[0,L]$, $D>0$. Discutere i vari casi al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, in particolare riguardo il comportamento della soluzione per $t\to+\infty$.

4.3.9 Risolvere col metodo di somiglianza il problema ai valori iniziali $u_t+ku_{xx}=0$, $u(0,x)=\sin x+\sin(2x)$.

Suggerimento. Per linearità cercare una soluzione u *sotto la forma* $u=u_1+u_2$, *dove* u_1 *risolve il problema* $u_t+ku_{xx}=0$, $u(0,x)=\sin x$ *e* u_2 *risolve il problema* $u_t+ku_{xx}=0$, $u(0,x)=\sin(2x)$.

4.3.10 Risolvere il problema ai valori iniziali $u_t - tu_{xx} = 2t\cos(\omega x)$, $u(0,x) = \cos(\omega x)$, per $\omega > 0$.

4.3.11 Risolvere il problema ai valori iniziali $u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = 2\sin x$, $u(0,x) = \sin x$, $u_t(0,x) = 0$.

4.3.12 Risolvere in $[0,+\infty) \times [0,L]$ l'equazione alle derivate parziali $u_t - Du_{xx} = t^\alpha u$, $D > 0$, con dato iniziale $u(0,x) = \sin(\omega x)$, $\omega = \pi/L$, e dato al contorno $u(t,0) = u(t,L) = 0$. Per quali valori di α la soluzione tende a zero per $t \to +\infty$?

4.3.13 Risolvere in $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$ l'equazione alle derivate parziali $u_{tt} + au_x - u_{xx} = 0$, $a \in \mathbb{R}$, con dato $u(0,x) = e^{-x}$, $u_t(0,x) = 0$, discutendone i casi al variare di a.

4.3.14 Risolvere in $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$ l'equazione alle derivate parziali $u_{tt} - au_{xx} = bu$, $a, b \in \mathbb{R}$, con dato $u(0,x) = \sin x$, $u_t(0,x) = 0$, discutendone i casi al variare di a e b.

4.3.15 Risolvere per separazione di variabili il problema $u_t - 4u_{xxxx} = -\alpha^2 u$ per $x \in [0,\pi]$, con dati iniziali $u(0,x) = \sin x$. Per quali valori di α si è certi che la soluzioni superi il valore 2?

Capitolo 5

Le trasformate di Fourier e Laplace

5.1 Il prodotto di convoluzione e la funzione δ

5.1.1 Calcolare la convoluzione di $f(x) = e^{-x}$ con $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$. Vale la formula $\widehat{f * g} = \widehat{f} * \widehat{g}$?

Risposta. Si ha

$$(f * g)(x) = \int_0^1 e^{-(x-y)} dy = e^{-x}(e - 1).$$

La formula $\widehat{f * g} = \widehat{f} * \widehat{g}$ vale per funzioni assolutamente integrabili (altrimenti, ad esempio, non si può calcolare la trasformata di Fourier di f o g). In questo caso non ha senso perché f non è assolutamente integrabile.

5.1.2 Calcolare $f * g$ se $f(x) = e^{-x^2}$ e $g(x) = x$.

Risposta. Si ha

$$(f * g)(x) = \int e^{-y^2}(x - y)dy = x \int e^{-y^2} dy + \frac{1}{2} \int -2ye^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} \cdot x.$$

5.1.3 Calcolare $f * g$ se

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 2, \\ 0 & \text{se } |x| > 2. \end{cases}$$

Disegnare il grafico di f, g e $f * g$.

Risposta. Si ha

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y)\, dy = \int_{-2}^{2} f(x - y)\, dy\,.$$

Inoltre

$$f(x - y) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x - 1 \leq y \leq x + 1 \\ 0 & \textit{altrove.} \end{cases}$$

Dunque si ha quanto segue:

- *se $|x| \geq 3$ allora $f * g(x) = 0$;*
- *se $-3 \leq x \leq -1$ allora $f * g(x) = \int_{-2}^{x+1} dy = x + 3$;*
- *se $-1 \leq x \leq 1$ allora $f * g(x) = \int_{x-1}^{x+1} dy = 2$;*
- *infine, se $1 \leq x \leq 3$, si ha $f * g(x) = \int_{x-1}^{2} dy = 3 - x$.*

In conclusione (vedi Figura 5.1)

$$f * g(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \in [-\infty, -3] \\ x + 3 & \textit{se } x \in [-3, -1] \\ 2 & \textit{se } x \in [-1, 1] \\ 3 - x & \textit{se } x \in [1, 3] \\ 0 & \textit{se } x \in [3, +\infty). \end{cases}$$

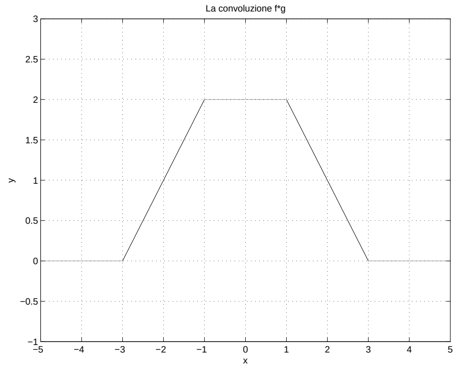

Figura 5.1: Vedi Esercizio 5.1.3.

5.1.4 Sia $f(x) = \dfrac{H(x)}{1+x}$, dove H è la funzione la Heaviside: $H(x) = 0$ se $x \leq 0$, $H(x) = 1$ se $x > 0$. Calcolare $(f * \chi_{[-1,1]})(x)$.

Risposta. Si ha

$$(f * \chi_{[-1,1]})(x) = \int_{-1}^{1} \frac{H(x-y)}{1+x-y} dy,$$

con $H(x-y) = 1$ *se* $y \leq x$, $H(x-y) = 0$ *altrimenti. Dunque:*

- *se* $x \leq -1$ *allora* $f(x) * \chi_{[-1,1]}(x) = 0$;
- *se* $-1 < x < 1$ *allora* $f(x) * \chi_{[-1,1]}(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{1+x-y} dy = \log(x+2)$;
- *se* $x \geq 1$ *allora* $f(x) * \chi_{[-1,1]}(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x-y} dy = \log(x+2) - \log x$.

In conclusione

$$f * \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \in [-\infty, -1] \\ \log(x+2) & \textit{se } x \in]-1, 1[\\ \log(x+2) - \log x & \textit{se } x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

5.1.5 Sia $0 < \epsilon < \pi$. Si consideri la funzione f_ϵ definita in $[-\pi, \pi)$ da

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{se } x \in [-\epsilon, \epsilon] \\ 0 & \text{se } x \in [-\pi, -\epsilon) \cup (\epsilon, \pi); \end{cases}$$

e prolungata per periodicità a $\mathbb{R}$. Disegnare il grafico della funzione risultante.

(a) Scrivere la serie di Fourier di f_ϵ e specificarne la convergenza.

(b) Scrivere l'identità di Parseval e dedurne la somma della serie che vi compare.

(c) Cosa succede formalmente quando $\epsilon \to 0+$?

Risposta.

(a) Si ha

$$f_\epsilon(x) \sim \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\epsilon)}{\pi n \epsilon} \cos(nx).$$

Tale serie di Fourier converge ad $f_\epsilon(x)$ *nei punti* $x \neq \pm\epsilon + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *mentre converge a* $\frac{1}{4\epsilon}$ *nei punti* $x = \pm\epsilon + k\pi$.

(b) L'identità di Parseval per f_ϵ *è*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_\epsilon^2(x) dx = \pi \left(\frac{1}{2\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\epsilon)}{\pi^2 n^2 \epsilon^2} \right),$$

da cui, calcolando l'integrale a primo membro, si ha

$$\frac{1}{2\epsilon} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\epsilon)}{n^2 \epsilon^2},$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\epsilon)}{n^2} = \frac{\pi}{2} \epsilon(1-\epsilon).$$

(c) *Formalmente il* $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x)$ *è la "funzione"* $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{k\pi}(x)$. *La serie di Fourier e di conseguenza l'uguaglianza di Parseval perdono di significato.*

5.1.6 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione; fissato $a \in \mathbb{R}$ definiamo $f_a(x) = f(x-a)$. Dire che rapporto c'è tra $f_a * f_a$ e $f * f$.

Risposta. Calcoliamo

$$f_a * f_a(x) = \int f(x-y-a)f(y-a)dy;$$

con il cambiamento di variabile $y - a = z$ *si ottiene*

$$f_a * f_a(x) = \int f(x-2a-z)f(z)dz = f * f(x-2a).$$

Pertanto $f_a * f_a(x) = f * f(x-2a)$.

5.2 La trasformata di Fourier

5.2.1 Calcolare $F(\omega) = \int_0^\pi \cos(\omega x)\,dx$. È continua la funzione F? È derivabile?

Risposta. Si ha che

$$F(\omega) = \int_0^\pi \cos(\omega x)\,dx = \begin{cases} \pi & se\ \omega = 0 \\ \frac{\sin(\pi\omega)}{\omega} & se\ \omega \neq 0\,. \end{cases}$$

La funzione F *è continua poiché* $\lim_{\omega\to 0} F(\omega) = \pi$. *Se* $\omega \neq 0$ *la derivata è* $\frac{1}{\omega}\left(\pi\cos(\pi\omega) - \frac{\sin(\pi\omega)}{\omega}\right)$; *in* 0 *la funzione* F *è derivabile con derivata nulla:* $\lim_{\omega\to 0} \frac{F(\omega)-F(0)}{\omega} = 0$. *Di più, la derivata di* F *è continua.*

5.2.2 Dire quali delle seguenti funzioni, definite in $\mathbb{R}$, sono assolutamente integrabili; di queste, calcolare la trasformata di Fourier: e^{-x}, $\cos x$, $e^{-|x|}$.

Risposta. Non sono assolutamente integrabili le funzioni e^{-x} *e* $\cos x$. *La funzione* $e^{-|x|}$ *è invece assolutamente integrabile, con integrale* 2, *dunque si può calcolarne la trasformata di Fourier; essa vale* $\frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$.

5.2.3 Si considerino le funzioni f, g, h, k definite da:

$f(x) = 1$ se $|x| \leq 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$ se $|x| > 1$;

$g(x) = 1$ se $|x| \leq 1$, $g(x) = \frac{1}{|x|}$ se $|x| > 1$;

$h(x) = 1$ se $|x| \leq 1$, $h(x) = \frac{1}{x^2}$ se $|x| > 1$;

$k(x) = 1$ se $|x| \leq 1$, $k(x) = \frac{1}{x}$ se $x > 1$, $k(x) = \frac{1}{x^2}$ se $x < 1$.

Disegnarne un grafico approssimativo; dire quali sono assolutamente integrabili e quali no.

Risposta. L'integrale di $1/x$ *diverge a* $\pm\infty$, *quello di* $1/x^2$ *converge, dunque solo* h *è assolutamente integrabile.*

5.2.4 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| < A, \\ 0 & \text{se } |x| \geq A. \end{cases}$$

Risposta. La funzione f *è dispari, pertanto*

$$\hat{f}(\nu) = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\nu x)\,dx = i\left(A\frac{\cos(2\pi\nu A)}{\pi\nu} - \frac{\sin(2\pi\nu A)}{2\pi^2\nu^2}\right).$$

5.2.5 Siano $a > 0$, $h \neq 0$. Si consideri la funzione f, nulla fuori dall'intervallo $[-a, a]$, il cui grafico nell'intervallo $[-a, a]$ è ottenuto congiungendo i punti $(-a, 0)$, $(0, h)$, $(a, 0)$. Calcolare la trasformata di Fourier di f.

Risposta. Si ha $f(x) = hq_a(x)$, *dove* q_a *è l'impulso triangolare di durata* a. *Dunque*

$$\hat{f}(\nu) = ah\,\mathrm{sinc}(a\nu).$$

Altrimenti si procede direttamente: f è una funzione pari, dunque

$$\begin{aligned}\hat{f}(\nu) &= 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\nu x)\,dx \;=\; 2\int_0^{+\infty}\left(h-\frac{h}{a}x\right)\cos(2\pi\nu x)\,dx\\ &= \frac{h}{2\pi^2 a}\cdot\frac{1-\cos(2\pi\nu a)}{\nu^2}\\ &= ah\,\mathrm{sinc}(a\nu).\end{aligned}$$

5.2.6 Si consideri per $a > 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -a \\ x+a & \text{se } -a \le x < 0 \\ x-a & \text{se } 0 \le x < a \\ 0 & \text{se } x \ge a. \end{cases}$$

Disegnare il grafico di f e calcolarne la trasformata di Fourier.

Risposta. Vedi Figura 5.2. La funzione f è dispari, pertanto si ha

$$\hat{f}(\nu) = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\nu x)\,dx = i\left(\frac{a}{\pi\nu} - \frac{\sin(2\pi\nu a)}{2\pi^2\nu^2}\right).$$

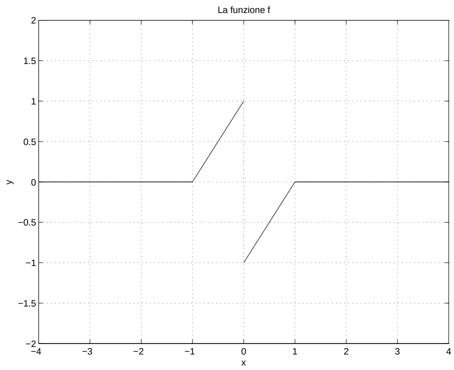

Figura 5.2: Vedi Esercizio 5.2.6. Il grafico è disegnato nel caso $a = 1$.

5.2.7 Si consideri la funzione H_a definita per $a > 0$ da

$$H_a(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -a \le x \le 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \le a \\ 0 & \text{altrove .} \end{cases}$$

Calcolarne la trasformata di Fourier. Calcolare $\lim_{a\to+\infty} H_a(x) = H(x)$. Si può calcolare la trasformata di Fourier di H? Cosa si può dire del $\lim_{a\to+\infty} \hat{H}_a(\nu)$?

Risposta. La funzione H_a è dispari, dunque

$$\widehat{H_a}(\nu) = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\nu x)\,dx = i\frac{\cos 2\pi a\nu - 1}{\pi\nu}.$$

Per $a \to +\infty$ si ottiene

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \textit{se } x \le 0, \\ +1 & \textit{se } x > 0. \end{cases}$$

La funzione H non è assolutamente integrabile, dunque non se ne può calcolare la trasformata di Fourier. Il $\lim_{a\to+\infty} \hat{H}_a(\nu)$ non esiste.

5.2.8 Si consideri la successione di funzioni definita in $[-\pi/n, \pi/n]$ da $f_n(x) = a_n \sin(nx)$ e nulla altrove.

(a) Determinare i coefficienti a_n in modo tale che $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|dx = 2$.

(b) Disegnare i grafici di alcune funzioni della successione.

(c) Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni f_n così determinate.

(d) Descrivere cosa accade per $n \to \infty$.

Risposta.

(a) Si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|\, dx = 2a_n \int_0^{\pi/n} \sin(nx)dx = \frac{4}{n} a_n = 2$$

se e solo se $a_n = n/2$.

(b) Vedi Figura 5.3.

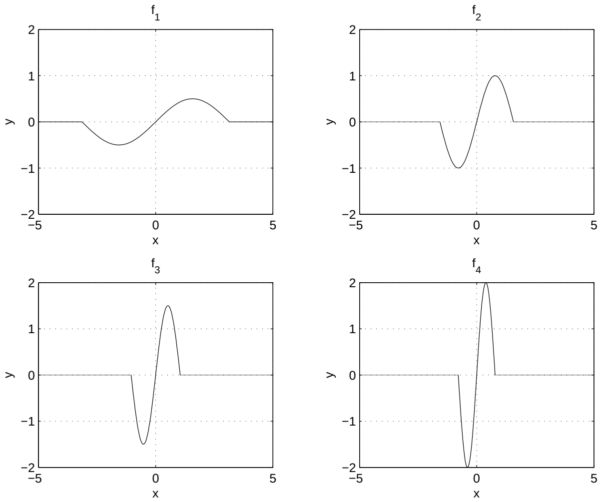

Figura 5.3: Vedi Esercizio 5.2.8.

(c) Le funzioni f_n *sono dispari ed applicando ancora la formula di Werner si ottiene*

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n(\nu) &= -2i\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \sin(2\pi\nu x)\sin(nx)dx \\
&= -\frac{in}{2}\int_0^{\pi/n} [\cos(2\pi\nu - n)x - \cos(2\pi\nu + n)x]\, dx \\
&= -\frac{in}{2}\left[\frac{\sin(2\pi^2\nu/n - \pi)}{2\pi\nu - n} - \frac{\sin(2\pi^2\nu/n + \pi)}{2\pi\nu + n}\right] \\
&= \frac{in^2}{4\pi^2\nu^2 - n^2}\sin\left(\frac{2\pi^2\nu}{n}\right)
\end{aligned}$$

dove nei punti $\nu = \pm\frac{n}{2\pi}$ *si è inteso il valore del limite (vedi Esercizio 5.2.1).*

(d) Si ha che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ *puntualmente. Inoltre* $\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(\nu) = 0$*, per ogni* $\nu \in \mathbb{R}$.

5.2.9 Si consideri la funzione f_0 definita da

$$f_0(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{se } x \notin [-\pi, \pi]\,. \end{cases}$$

(a) Disegnare il grafico di f_0 e calcolare la trasformata di Fourier. [1]

(b) Sia $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_0(x - 2k\pi)$; disegnare il grafico di f_n.

(c) Tramite la formula del ritardo calcolare la trasformata di Fourier di f_n.

[1] Si ricordino le seguenti formule di Werner:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha \cdot \sin\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)\,, \\
\cos\alpha \cdot \cos\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right)\,.
\end{aligned}$$

Risposta.

(a) *La funzione f_0 è pari, dunque*

$$\hat{f}_0(\nu) = 2\int_0^{\pi} \cos x \cdot \cos(2\pi\nu x)\,dx \;=\; \int_0^{\pi} \left[\cos\big((2\pi\nu-1)x\big) + \cos\big((2\pi\nu+1)x\big)\right] dx\,.$$

Pertanto, per l'Esercizio 5.2.1,

$$\hat{f}_0(\nu) = \begin{cases} \pi & se\ \nu = \pm\frac{1}{2\pi} \\ \dfrac{4\pi\nu}{1-4\pi^2\nu^2}\sin(2\pi^2\nu) & se\ \nu \neq \pm\frac{1}{2\pi}\,. \end{cases}$$

(b) *La funzione f_n è la funzione che vale $\cos x$ in $[-\pi,(2n+1)\pi]$ e nulla altrove. Vedi Figura 5.4.*

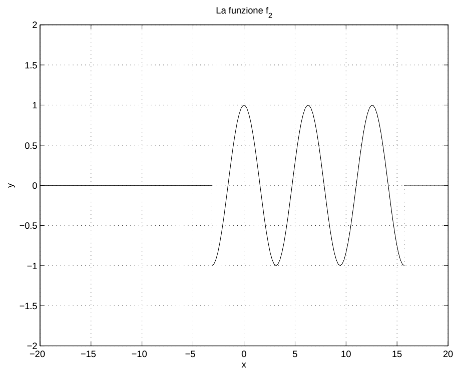

Figura 5.4: Vedi Esercizio 5.2.9. Qui $n = 2$.

(c) *Si ha*

$$\widehat{f_n}(\nu) = \sum_{k=0}^{n} (f_0(\widehat{x-2k\pi}))(\nu) = \sum_{k=0}^{n} e^{-i4\pi^2\nu k}\hat{f}_0(\nu).$$

5.2.10 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione f definita da $x^2 - T^2$ in $[-T,T]$ e nulla altrove.

Risposta. La funzione f è pari, dunque si ha

$$\widehat{f}(\nu) = 2\int_0^T \cos(2\pi\nu x)(x^2-T^2)dx = \frac{1}{\pi^2\nu^2}\left(T\cos(2\pi\nu T) - \frac{\sin(2\pi\nu T)}{2\pi\nu}\right).$$

5.2.11 Si considerino le tre funzioni seguenti:

$$G(\nu) = \frac{1}{1+e^{-\nu^2}}, \quad K(\nu) = e^{-|\nu|}, \quad L(\nu) = \begin{cases} e^{-\nu} & \text{se } \nu \geq 0 \\ 0 & \text{se } \nu < 0. \end{cases}$$

Dire quali possono essere le trasformate di Fourier di funzioni assolutamente integrabili. Di queste, calcolare la trasformata inversa.

Risposta. Ricordiamo che la trasformata di Fourier $\hat{f}$ di una funzione assolutamente integrabile f è una funzione continua su $\mathbb{R}$ con $\lim_{|\nu|\to\infty}\hat{f}(\nu) = 0$. La funzione G non può essere una trasformata perché $\lim_{|\nu|\to+\infty} G(\nu) = 1/2 \neq 0$; L non può essere una trasformata perché non è continua. La funzione K invece è una trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}^{-1}(K)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\nu x}K(\nu)d\nu = \frac{2}{1+4\pi^2x^2}.$$

5.2.12 Siano f, g le due funzioni

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \in [1,+\infty) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{-2x} & \text{se } x \in [1,+\infty) \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare la convoluzione $f * g$ e la sua trasformata di Fourier.

Risposta. Poiché

$$g(x-y)=\begin{cases} e^{-2(x-y)} & se\ y\le x-1\\ 0 & se\ y>x-1,\end{cases}$$

si ha

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy=\begin{cases} 0 & se\ x\le 2\\ e^{-(x+1)}-e^{1-2x} & se\ x>2.\end{cases}$$

Inoltre

$$\widehat{f*g}(\nu)=\hat f(\nu)\cdot \hat g(\nu)=\frac{e^{-(2\pi i\nu+1)}}{2\pi i\nu+1}\cdot\frac{e^{-(2\pi i\nu+2)}}{2\pi i\nu+2}.$$

5.2.13 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x)=\sin x$ in $[0,\pi]$ e nulla altrove.

(a) Calcolare $f*f$. Disegnare un grafico approssimativo di f e di $f*f$.

(b) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat f$ di f. Dedurre dal punto precedente la trasformata di Fourier di $f*f$.

(c) Dalla $\hat f$ dedurre la trasformata di Fourier della funzione $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $g(x)=\cos x$ in $[0,\pi]$ e nulla altrove.

(d) Dalla $\hat f$ dedurre la trasformata di Fourier della funzione $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $h(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ in $[-\pi/2,\pi/2]$ e nulla altrove.

Risposta.

(a) Si ha

$$f*f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f(y)dy,$$

e deve essere $y\in[0,\pi]$, $x-\pi<y<x$ affinché l'integrale non sia nullo. Dalle formule di sottrazione per il seno si ha

$$\int \sin(x-y)\cdot\sin y\,dy=\frac12\left(\sin x\cdot\sin^2 y-\cos x(y-\sin y\cdot\cos y)\right).$$

Dunque si ha quanto segue (vedi Figura 5.5):

$$f*f(x)=\begin{cases} 0 & se\ x\in[-\infty,0]\\ \frac12\left(\sin^3 x-x\cos x+\sin x\cos^2 x\right) & se\ x\in[0,\pi]\\ \frac12\left(\sin^3 x-(2\pi-x)\cos x+\sin x\cos^2 x\right) & se\ x\in[\pi,2\pi]\\ 0 & se\ x\in[2\pi,+\infty).\end{cases}$$

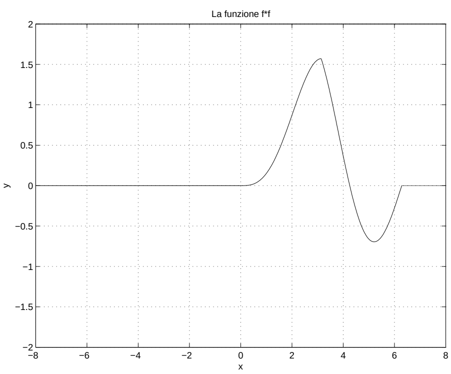

Figura 5.5: Vedi Esercizio 5.2.13.

(b) Si ha

$$\widehat{f}(\nu)=\int_0^{\pi} e^{-i2\pi\nu x}\sin x\,dx=\frac{e^{-i2\pi^2\nu}+1}{1-4\pi^2\nu^2};$$

inoltre

$$\widehat{(f*f)}(\nu)=(\widehat{f}(\nu))^2=\frac{1+e^{-i4\pi^2\nu}+2e^{-i2\pi^2\nu}}{(1-4\pi^2\nu^2)^2}.$$

(c) Essendo $\cos x = (\sin x)'$*, dalla formula della trasformata di Fourier di una derivata si ha:*

$$\widehat{g}(\nu) = (i2\pi\nu)\widehat{f}(\nu) = i2\pi\nu\frac{e^{-i2\pi^2\nu}+1}{1-4\pi^2\nu^2}.$$

(d) Si ha $h(x) = f(x-x_0)$*, con* $x_0 = -\pi/2$*; dunque dalla formula del ritardo si ottiene*

$$\widehat{h}(\nu) = e^{i\pi^2\nu}\widehat{f}(\nu) = \frac{e^{i\pi^2\nu}+e^{-i\pi^2\nu}}{1-4\pi^2\nu^2}.$$

5.2.14 Sia $f_1(x)$ la funzione definita da x in $(-1,1]$ e nulla altrove; disegnare il grafico di f_1.

(a) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione f_1.

(b) Sia f_2 la funzione definita da x in $(-1,1]$ e da $x-2$ in $(1,3]$. Disegnare il grafico di f_2. Calcolare la trasformata di f_2 deducendola da quella di f_1.

(c) Come si potrebbe definire "f_n"? Quale sarebbe la sua trasformata di Fourier?

Risposta.

(a) La funzione f_1 *è dispari, perciò*

$$\widehat{f_1}(\nu) = -2i\int_0^1 x\sin(2\pi\nu x)dx = \frac{i}{\pi\nu}\left(\cos(2\pi\nu) - \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi\nu}\right).$$

(b) È $f_2(x) = f_1(x) + f_1(x-2)$*, dunque dalla formula del ritardo si ottiene*

$$\widehat{f_2}(\nu) = \widehat{f_1}(\nu) + e^{-i4\pi\nu}\widehat{f_1}(\nu) = \frac{i(1+e^{-i4\pi\nu})}{\pi\nu}\left(\cos(2\pi\nu) - \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi\nu}\right).$$

(c) Si potrebbe definire

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_1(x-2k),$$

da cui

$$\widehat{f_n}(\nu) = \widehat{f_1}(\nu)\sum_{k=0}^{n} e^{-i4\pi k\nu} = \widehat{f_1}(\nu)\frac{1-e^{-i4\pi(n+1)\nu}}{1-e^{-i4\pi\nu}}.$$

5.2.15 Si consideri la funzione pari $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita così: essa è nulla fuori dall'intervallo $(-\epsilon,\epsilon)$, il suo grafico nell'intervallo $(-\epsilon,\epsilon)$ è un triangolo isoscele con vertice sull'asse y, infine $\int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(x)\,dx = 1$.

(a) Scrivere l'espressione analitica di tale funzione e provare che formalmente $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x) = \delta(x)$.

(b) Calcolare la trasformata di Fourier di f_ϵ e provare che $\lim_{\epsilon\to 0}\hat{f}_\epsilon(\nu) = 1$.

Risposta.

(a) Si ha

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon^2}x + \frac{1}{\epsilon} & \textit{se } x \in [-\epsilon, 0] \\ -\frac{1}{\epsilon^2}x + \frac{1}{\epsilon} & \textit{se } x \in [0,\epsilon] \\ 0 & \textit{altrove.} \end{cases}$$

Inoltre $f_\epsilon(0) = \frac{1}{\epsilon^2} \to 0$ *quando* $\epsilon \to 0$*; fissato* $x \neq 0$ *si ha* $f_\epsilon(x) = 0$ *se* $\epsilon \to 0$ *in quanto* $f_\epsilon(x) = 0$ *se* $\epsilon < |x|$*. Pertanto* $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x) = \delta(x)$ *in quanto gli integrali delle* f_ϵ *valgono tutti* 1.

(b) Poiché f *è pari si trova*

$$\hat{f}(\nu) = 2\int_0^\epsilon \cos(2\pi\nu x)\left(-\frac{1}{\epsilon^2}x + \frac{1}{\epsilon}\right)dx = \frac{1-\cos(2\pi\nu\epsilon)}{2\epsilon^2\pi^2\nu^2}.$$

Facendo il cambiamento di variabili $x = 2\pi\epsilon\nu$ *si ha allora*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1-\cos(2\pi\nu\epsilon)}{2\epsilon^2\pi^2\nu^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\frac{1}{2}x^2} = 1.$$

5.2.16 Siano $0 < h < a$ due numeri reali. Si consideri la funzione pari e continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che vale 1 nell'intervallo $[-h,h]$, 0 al di fuori dell'intervallo $[-a,a]$ e il cui grafico nell'intervallo $[h,a]$ è ottenuto congiungendo con un segmento i punti $(h,1)$, e $(a,0)$.

(a) Calcolare la trasformata di Fourier di f.

(b) Dire se $\hat{f}$ è pari o dispari e calcolare $\hat{f}(0)$.

(c) Discutere le frequenze delle oscillazioni di $\hat{f}$.

(d) Rappresentare $\hat{f}$ usando le formule di prostaferesi.

Risposta. Il grafico di f ha la forma di un trapezio isoscele simmetrico rispetto all'asse y, di base maggiore (lungo l'asse x) di lunghezza $2a$, base minore $2h$ e altezza 1.

(a) Poiché f è pari si ha

$$\begin{aligned}\hat{f}(\nu) &= 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\nu x)\,dx = 2\int_0^h \cos(2\pi\nu x)\,dx + \frac{2}{a-h}\int_h^a (h-x)\cos(2\pi\nu x)\,dx \\ &= \frac{\sin(2\pi\nu h)-\sin(2\pi\nu a)}{\pi\nu} + \frac{1}{2\pi^2(a-h)}\cdot\frac{\cos(2\pi\nu h)-\cos(2\pi\nu a)}{\nu^2}\,.\end{aligned}$$

(b) Essendo f pari anche $\hat{f}$ lo è; questo può essere verificato anche direttamente. Inoltre

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \text{ area del trapezio } = a+h\,.$$

Poiché $\hat{f}$ è continua, il valore $\hat{f}(0)$ poteva essere anche calcolato passando al limite per $\nu \to 0$.

(c) La funzione $\hat{f}$ non è periodica a causa dei termini ν e ν^2; tuttavia il primo e il terzo addendo hanno oscillazioni di frequenza h, il secondo e il quarto di frequenza a.

(d) Dalle formule di prostaferesi $\sin p - \sin q = 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$ e $\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$ si trova

$$\hat{f}(\nu) = \frac{2}{\pi\nu}\big[\sin(\pi(h-a)\nu)\cdot\cos(\pi(h+a)\nu)\big] + \frac{1}{\pi^2\nu^2(a-h)}\cdot\big[\sin(\pi(a+h)\nu)\cdot\sin(\pi(a-h)\nu)\big]\,.$$

5.2.17 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in $[0,+\infty)$ da $f(x) = (x-1)^2$ se $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$ se $x > 1$, ed estesa poi come funzione pari a $\mathbb{R}$.

(a) Disegnare il grafico di f e calcolare la trasformata di Fourier di f.

(b) Posto $f_n(x) = \frac{1}{n} f(\frac{x-n}{n})$, disegnare il grafico di f_n, calcolare il $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, calcolare $\hat{f}_n$.

Risposta.

(a) Per il grafico si veda la Figura 5.6 a sinistra. Si noti che $f(x) = (x+1)^2$ se $x \in [-1,0]$. Poiché f è una funzione pari si ha, integrando per parti,

$$\hat{f}(\nu) = 2\int_0^1 (x-1)^2\cos(2\pi\nu x)\,dx = \frac{1}{\pi^2\nu^2} - \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi^3\nu^3}\,.$$

(b) Per i grafici si veda la Figura 5.6 a destra. Poiché $|f(x)| \le 1$ si ha $|f_n(x)| \le \frac{1}{n}$. Di conseguenza $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infine, dalla formula di compressione/dilatazione e ritardo applicata a $f_n(x) = \frac{1}{n} f(\frac{x}{n} - 1)$ si ha

$$\hat{f}_n(\nu) = e^{-i2\pi n\nu}\hat{f}(n\nu)\,.$$

5.2.18 Scrivere la formula di Parseval, relativa alla trasformata di Fourier, per la funzione $x^2 f$, adoperando quindi le proprietà della trasformata di Fourier per semplificare l'espressione ottenuta.

Risposta. La formula di Parseval è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)^2 d\nu\,.$$

Applicandola ad $x^2 f$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widehat{x^2 f}(\nu)\right)^2 d\nu\,.$$

Poiché $\widehat{x^2 f}(\nu) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \left(\hat{f}(\nu)\right)''$ si ottiene quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f^2(x)dx = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\hat{f}(\nu)\right)''\right)^2 d\nu.$$

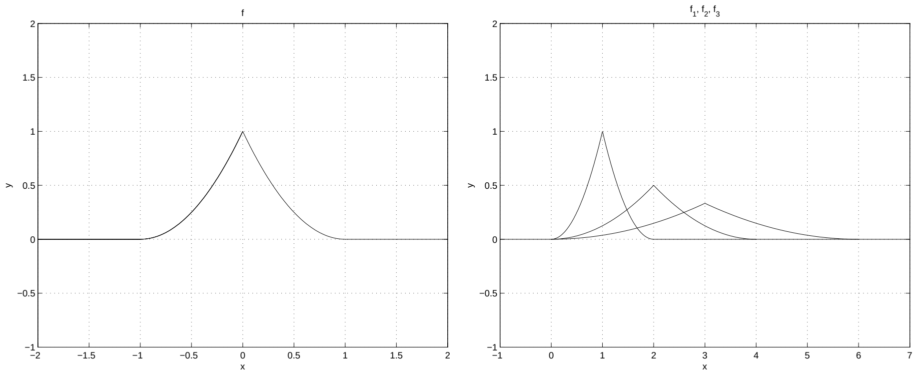

Figura 5.6: Vedi Esercizio 5.2.17.

5.2.19 Si consideri l'equazione differenziale ordinaria $f'' + 3x^2 f' - xf = 0$, dove f è una funzione di variabile reale. Applicare la trasformata di Fourier all'equazione e determinare la relativa equazione per $\hat{f}$.

Risposta. Ricordando che

$$\widehat{f^{(n)}}(\nu) = (2\pi i\nu)^n \hat{f}(\nu), \qquad \widehat{x^n f}(\nu) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \hat{f}^{(n)}(\nu)$$

per linearità si trova, omettendo la variabile ν,

$$0 = \mathcal{F}\left(f'' + 3x^2 f' - xf\right) = (2\pi i\nu)^2 \hat{f} + 3\left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \widehat{f'}'' - \frac{i}{2\pi}\hat{f}'\,.$$

Si ha inoltre

$$\widehat{f'}'' = \Big[(2\pi i\nu)\hat{f}\Big]'' = 4\pi i\hat{f}' + 2\pi i\nu\hat{f}''$$

da cui, indicando per brevità $\hat{f}(\nu) = \phi(\nu)$,

$$-4\pi^2\nu^2\phi - \frac{3}{4\pi^2}\left[4\pi i\phi' + 2\pi i\nu\phi''\right] - \frac{i}{2\pi}\phi' = 0$$

e infine

$$3\nu\phi'' + 7\phi' - 8i\pi^3\nu^2\phi = 0\,.$$

5.2.20 Calcolare $\mathcal{F}\left[(x-a)^2 f\right](\nu)$.

Risposta. Si ha, dalle proprietà della trasformata di Fourier,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[(x-a)^2 f\right](\nu) &= \mathcal{F}(x^2 f - 2axf + a^2 f)(\nu) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \hat{f}'' - 2a\left(\frac{i}{2\pi}\right)\hat{f}' + a^2\hat{f} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\hat{f}'' - \frac{ai}{\pi}\hat{f}' + a^2\hat{f}\,.\end{aligned}$$

5.2.21 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente integrabile di classe C^1. Calcolare $\mathcal{F}\left[(1+x^2)f\right]$. Quali trasformate $\hat{f}$ soddisfano l'equazione $\mathcal{F}\left[(1+x)^2 f\right] = 0$?

Risposta. Si trova che

$$\mathcal{F}\left[(1+x^2)f\right](\nu) = -\frac{1}{4\pi^2}\hat{f}''(\nu) + \hat{f}(\nu)\,.$$

L'equazione differenziale $\hat{f}'' - 4\pi^2\hat{f} = 0$ ha radici caratteristiche $\pm 2\pi$, e dunque il suo integrale generale è

$$\hat{f}(\nu) = C_1 e^{-2\pi\nu} + C_2 e^{2\pi\nu}\,.$$

Poiché deve essere $\lim_{\nu\to\pm\infty}\hat{f}(\nu) = 0$, ne segue che $C_1 = C_2 = 0$, dunque $\hat{f} \equiv 0$.

5.2.22 Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, per quali ν l'espressione $\mathcal{F}(af'' - bf'''')(\nu)$ è sicuramente nulla?

Risposta. Si ha

$$\mathcal{F}(af'' - bf'''')(\nu) = (2\pi i\nu)^2\hat{f}(\nu)\left(a - b(2\pi i\nu)^2\right) = -4\pi\nu^2\hat{f}(\nu)(a + 4b\pi^2\nu^2) = 0$$

se $\nu = 0$; se a e b hanno segni discordi e $b \neq 0$ allora l'espressione si annulla anche per $\nu = \pm\sqrt{-\frac{a}{4b\pi^2}}$.

5.3 La trasformata di Laplace

In questa sezione la funzione H indica la funzione di Heaviside: $H(x) = 0$ se $x \le 0$, $H(x) = 1$ se $x > 0$.

5.3.1 Sia $f(x)$ la funzione definita in $[0, 2)$ da

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x \in [1,2) \end{cases}$$

e prolungata per periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione Hf.

Risposta. Si tratta di una funzione periodica di periodo $T = 2$. La trasformata di Laplace è dunque

$$L[f](p) = \frac{1}{1 - e^{-2p}} L[f_0](p),$$

con

$$L[f_0](p) = \int_0^2 e^{-px} f_0(x) dx = \frac{1 - e^{-p}}{p}.$$

5.3.2 Sia $f(x) = x^2$ in $[0, 1)$; si prolunghi per periodicità la funzione in $[0, +\infty)$, e si definisca $f(x) = 0$ per $x \le 0$. Calcolare la trasformata di Laplace di f.

Risposta. Si tratta di una funzione periodica di periodo $T = 1$. La trasformata di Laplace è dunque

$$L[f](p) = \frac{1}{1 - e^{-p}} \int_0^1 e^{-px} x^2 \, dx = \frac{1}{p(1 - e^{-p})} \left(\frac{2}{p^2} - e^{-p} \left(1 + \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2} \right) \right).$$

5.3.3 Sia f la funzione definita da $f(x) = x^3$ in $[0, 1]$ e nulla altrove.

(a) Calcolare la trasformata di Laplace di f.

(b) Dedurre la trasformata di Fourier di f.

(c) Calcolare $f * \chi_{[0,1]}$.

Risposta.

(a) Si ha

$$L[f](p) = \int_0^1 e^{-px} x^3 dx = \frac{e^{-p}}{p} \left(\frac{6}{p^3} + \frac{6}{p^2} - \frac{3}{p} - 1 \right) - \frac{6}{p^4}.$$

(b) È

$$\widehat{f}(\nu) = L[f](i2\pi\nu) = \frac{e^{-i2\pi\nu}}{i2\pi\nu} \left(-\frac{6}{i8\pi^3\nu^3} - \frac{6}{4\pi^2\nu^2} - \frac{3}{i2\pi\nu} - 1 \right) - \frac{6}{16\pi^4\nu^4}.$$

(c) Si ha

$$f(x) * \chi_{[0,1]}(x) = \int f(x - y) g(y) dy,$$

con $y \in [0, 1]$, $x - 1 \le y \le x$. Dunque:

- *se $x \le 0$ oppure $x \ge 2$ allora $f(x) * \chi_{[0,1]}(x) = 0$;*
- *se $0 < x < 1$ allora $f(x) * \chi_{[0,1]}(x) = \int_0^x (x - y)^3 dy = x^4/4$;*
- *se $1 \le x < 2$ allora $f(x) * \chi_{[0,1]}(x) = \int_{x-1}^1 (x - y)^3 dy = [1 - (x - 1)^4]/4$.*

In conclusione

$$f(x) * \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ x^4/4 & \text{se } x \in (0,1) \\ \frac{1-(x-1)^4}{4} & \text{se } x \in [1,2) \\ 0 & \text{se } x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

5.3.4 Sia $f(x) = 1 - (x - 1)^2$ in $[0, 2)$; si prolunghi per periodicità la funzione in $[0, +\infty[$, e si definisca $f(x) = 0$ per $x \le 0$. Calcolare la trasformata di Laplace di f.

Risposta. Si tratta di una funzione periodica di periodo $T = 2$. La trasformata di Laplace è dunque

$$L[f](p) = \frac{1}{1 - e^{-2p}} L[f_0](p),$$

con

$$L[f_0](p) = \int_0^2 e^{-px} (2x - x^2) dx = \frac{2}{p^2} \left(e^{-2p} + 1 + \frac{e^{-2p} - 1}{p} \right).$$

5.4 Altri esercizi

5.4.1 Sia f_ϵ la funzione definita da $f_\epsilon(x) = -\frac{1}{\epsilon}x + 1$ in $[0, \epsilon]$ e nulla altrove.

(a) Disegnare il grafico di f_ϵ e calcolare la sua trasformata di Fourier.

(b) Dedurre la trasformata di Fourier di $g_\epsilon(x) = f_\epsilon(x) + f_\epsilon(-x)$; disegnare il grafico di g_ϵ.

(c) Dedurre la trasformata di Fourier della funzione g'_ϵ.

(d) Calcolare la trasformata di Laplace di f_ϵ, specificandone il semipiano di convergenza.

Risposta. Vedi Figura 5.7.

(a) Si ha

$$\widehat{f_\epsilon}(\nu) = \int_0^\epsilon (-\frac{1}{\epsilon}x + 1)e^{-2i\pi\nu x}dx = -\frac{e^{-i2\pi\nu\epsilon}}{4\epsilon\pi^2\nu^2}\,.$$

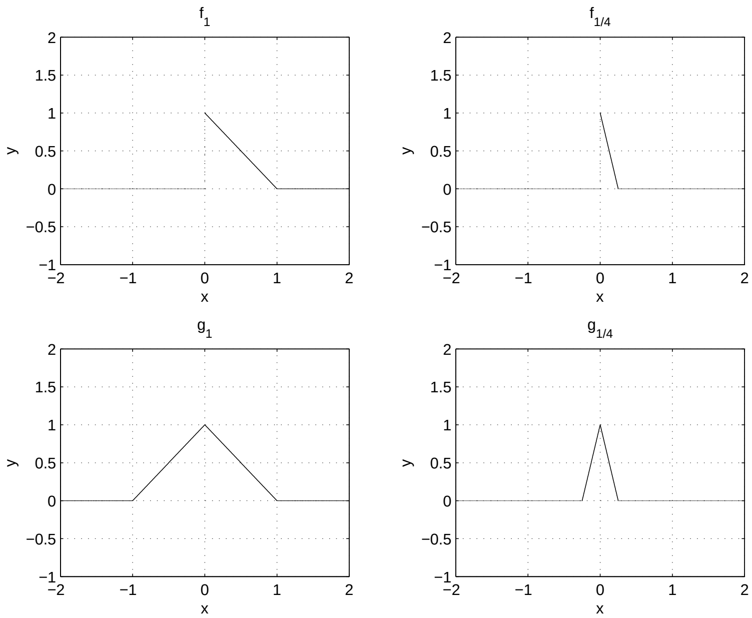

Figura 5.7: Vedi Esercizio 5.4.1.

(b) Si ha

$$\widehat{g_\epsilon}(\nu) = \widehat{f_\epsilon}(\nu) + \widehat{f_\epsilon}(-\nu) = \frac{e^{i2\pi\nu\epsilon} + e^{-i2\pi\nu\epsilon}}{4\epsilon\pi^2\nu^2}\,.$$

(c) Dalla formula della trasformata di Fourier di una derivata si ha

$$\widehat{g'_\epsilon}(\nu) = (i2\pi\nu)\widehat{g_\epsilon}(\nu) = i\frac{e^{i2\pi\nu\epsilon} - e^{-i2\pi\nu\epsilon}}{2\epsilon\pi\nu}\,.$$

(d) Si ha

$$L[f_\epsilon](p) = \int_0^\epsilon e^{-px}(-\frac{1}{\epsilon}x + 1)dx = \frac{p\epsilon + e^{-p\epsilon} - 1}{\epsilon p^2}\,.$$

Tale trasformata di Laplace converge nel semipiano $\Re p > 0$.

5.5 Esercizi proposti

5.5.1 Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

(a) $f'''(3 + x)$,

(b) $f''(x - 2) - f'(x - 1)$,

(c) $f''(\frac{x}{k})$, per $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$,

(d) $f''(kx)$, per $k \in \mathbb{R}$.

5.5.2 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita così: $f(x) = 1$ se $x \in [0,1]$, $f(x) = 2 - x$ se $x \in [1,2]$, $f(x) = 0$ se $x \geq 2$, estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo pari. Calcolare la trasformata di Fourier di f.

5.5.3 Sia f una funzione definita in $\mathbb{R}$, diversa da 0 solo nell'intervallo $[-1,1]$. Si consideri quindi la funzione f_a, nulla fuori dall'intervallo $[-1,1]$ e che vale $f(x) + a$ nell'intervallo $[-1,1]$, $a > 0$. Disegnare un ipotetico grafico di entrambe le funzioni. In cosa differiscono le trasformate di Fourier di f e f_a?

5.5.4 Si ricordi la definizione della funzione p_T, impulso rettangolare di durata T, e la sua trasformata di Fourier.

(a) Dedurre la trasformata di Fourier delle funzioni $p_2(x+3)$, $p_2(x-3)$; disegnare il grafico delle due funzioni. Scrivere in forma reale la trasformata di Fourier della funzione $g(x) = p_2(x) + p_2(x-3) + p_2(x+3)$; disegnare il grafico di g.

(b) Sia $f(x)$ la funzione definita da $f(x) = 1$ se $x \in [1,3]$, e nulla altrove. Calcolare direttamente la trasformata di Fourier della funzione f. Ritrovare lo stesso risultato applicando la formula del ritardo alla funzione p_2.

5.5.5 Siano $a > b > c > 0$ tre numeri reali. Si consideri la funzione f definita in $[0, +\infty)$ da $f(x) = a$ se $0 \leq x < 1$, $f(x) = b$ se $1 \leq x < 2$, $f(x) = c$ se $2 \leq x < 3$, $f(x) = 0$ se $3 \leq x$, estesa poi in modo pari a tutto $\mathbb{R}$. Disegnare il grafico di f. Ricordando che $\widehat{p_T}(\nu) = T\,\mathrm{sinc}(T\nu)$, calcolare la trasformata di Fourier di f, senza integrare. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)^2\, d\nu$.

5.5.6 Sia $f(x)$ la funzione definita da $f(x) = |x|$ in $[-1,1]$ e nulla altrove. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione f. Si consideri poi la funzione $g(x)$ definita da -1 in $[-1,0)$, da 1 in $[0,1)$ e nulla altrove; si calcoli la trasformata di Fourier di g. Si applichi poi formalmente la formula $\widehat{f'}(\nu) = 2\pi i\nu \hat{f}(\nu)$ a f; si confronti il risultato trovato con la trasformata di Fourier di g e si commenti.

5.5.7 Siano f e g le funzioni definite in $\mathbb{R}$ da $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = 1 - |x|$ in $[-1,1]$ e nulle altrove. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Tracciare un grafico approssimativo della funzione h e calcolarne la sua trasformata di Fourier.

5.5.8 Sia $a > 0$ e f la funzione definita da $a^2 - x^2$ in $[-a,a]$ e nulla altrove. Disegnare il grafico di f. Calcolare la trasformata di Fourier di f. Per quali a la lunghezza d'onda della trasformata è minore di $1/10$? Si consideri poi la funzione $g(x) = f(x - x_0)$. Per quali x_0 la trasformata di Fourier di g ha la stessa lunghezza d'onda di quella di f?

5.5.9 Sia f la funzione definita da $f(x) = 1 - x$ in $[0,1]$ e nulla altrove. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione f; scrivere separatamente la parte reale e la parte immaginaria della trasformata. Dedurre la trasformata di Fourier della funzione g definita da $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$ in $[-2,0]$ e nulla altrove. Disegnare i grafici di f e g.

5.5.10 Si consideri la funzione f definita da $f(x) = e^x - 1$ in $[0,a]$, $a > 0$ e nulla altrove; se ne disegni il grafico e se ne calcoli la trasformata di Fourier. Si consideri quindi la funzione $g(x) = f(x-a)$; scrivere esplicitamente come è definita g, se ne disegni il grafico, se ne deduca la trasformata di Fourier da quella di f.

5.5.11 Si consideri la funzione f_R definita da $f_R(x) = e^{-x}$ in $[0,R]$, $R > 0$ e nulla altrove; se ne disegni il grafico e se ne calcoli la trasformata di Fourier, scrivendone separatamente la parte reale e quella immaginaria. Calcolare il $\lim_{R\to+\infty} f_R(x)$ e $\lim_{R\to+\infty} \widehat{f_R}(\nu)$.

5.5.12 Per $n = 1, 2, \ldots$ sia f_n la funzione definita da $f_n(x) = \cos(x/n)$ se $x \in [-n\pi/2, n\pi/2]$ e nulla altrimenti. Disegnare il grafico di f_n, calcolarne la trasformata di Fourier. Calcolare il $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Scrivere la formula di Parseval, calcolando uno dei due integrali che vi compaiono.

5.5.13 Si consideri la funzione $f(x)$ che vale $mx + q$ nell'intervallo $[a,b]$ e 0 altrove. Si cerchi una traslazione di un opportuno punto x_o in modo che $g(x) = f(x - x_o)$ sia diversa da 0 solo in un intervallo centrato nell'origine. Calcolare la trasformata di Fourier di g, cercando di semplificarne il più possibile l'espressione.

5.5.14 Sia $n \geq 1$ e f_n la funzione che vale $\frac{1}{n^2}$ in $[n-1, n)$, nulla in $[0, n-1) \cup [n, +\infty)$ ed estesa in modo pari a tutto $\mathbb{R}$. Disegnare il grafico di f_n e calcolarne la trasformata di Fourier. Si consideri quindi la funzione $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Disegnare il grafico di f e dedurne la trasformata di Fourier da quella delle f_n, semplificando il più possibile il risultato finale.

Suggerimento. Trovata $\widehat{f_n}$ *si scriva per esteso la somma, nella quale si raccolgono a due a due i termini contenenti la funzione* sin *con uguale argomento. Si trova* $\hat{f}(\nu) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \operatorname{sinc}(2n\nu)$.

Capitolo 6

Vibrazioni

6.1 Vibrazioni

6.1.1 Si consideri l'equazione differenziale ordinaria $y'' + \delta y' = \cos(\omega t)$ con $\omega > 0$, $\delta > 0$.

(a) Classificare il moto nell'ambito della teoria delle vibrazioni.

(b) Calcolare l'integrale generale dell'equazione.

(c) Risolvere il problema ai valori iniziali $y(0) = y'(0) = 0$. Quale è la soluzione a regime? Per la soluzione a regime dire attorno a quale punto hanno luogo le oscillazioni e quale è la loro ampiezza.

Risposta.

(a) Si tratta di di un moto smorzato (δ) e forzato ($\cos(\omega t)$).

(b) Le radici del polinomio caratteristico $r^2 + \delta r$ sono $r = 0$, $r = -\delta$; dunque l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_H(t; C_1, C_2) = C_1 + C_2 e^{-\delta t} .$$

Poiché i non è radice del polinomio caratteristico, si cerca una soluzione particolare dell'equazione completa sotto la forma $\bar{y}(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$; inserendo questa espressione nell'equazione si determinano

$$A = -\frac{1}{\omega^2 + \delta^2}, \qquad B = \frac{\delta}{\omega(\omega^2 + \delta^2)} .$$

Dunque l'integrale generale dell'equazione è

$$y(t; C_1, C_2) = C_1 + C_2 e^{-\delta t} - \frac{1}{\omega^2 + \delta^2}\cos(\omega t) + \frac{\delta}{\omega(\omega^2 + \delta^2)}\sin(\omega t) .$$

(c) Imponendo le condizioni iniziali si trova dall'espressione precedente $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{\omega^2+\delta^2}$ e dunque la soluzione del problema ai valori iniziali è

$$y(t) = \frac{1}{\omega^2 + \delta^2}\left(e^{-\delta t} - \cos(\omega t) + \frac{\delta}{\omega}\sin(\omega t)\right) .$$

La soluzione a regime è

$$y_r(t) = \frac{1}{\omega^2 + \delta^2}\left(\frac{\delta}{\omega}\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right) .$$

Le oscillazioni di y_r hanno luogo attorno al punto 0 e hanno ampiezza

$$A = \sqrt{\frac{1}{(\omega^2 + \delta^2)^2} + \frac{\delta^2}{\omega^2(\omega^2 + \delta^2)^2}} = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} .$$

6.1.2 Si consideri l'equazione differenziale $y'' + ny = 2\cos(nt)$, con $n \geq 2$.

(a) Determinare l'integrale generale dell'equazione.

(b) Discutere il tipo di moto oscillatorio rappresentato nei casi $n = 2, 3, 4$.

Risposta.

(a) Le radici del polinomio caratteristico $r^2 + n = 0$ sono $\pm i\sqrt{n}$, dunque l'integrale generale dell'omogenea è

$$y_H(t; C_1, C_2) = C_1 \cos(\sqrt{n}t) + C_2 \sin(\sqrt{n}t).$$

Poichè i non è radice del polinomio caratteristico si cerca una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(t) = A\sin(nt) + B\cos(nt)$. Si trova $A = 0$, $B = -\frac{2}{n(n-1)}$, e dunque l'integrale generale dell'equazione è

$$y(t; C_1, C_2) = C_1 \cos(\sqrt{n}t) + C_2 \sin(\sqrt{n}t) - \frac{2}{n(n-1)} \cos(nt).$$

(b) Si tratta di un moto forzato non smorzato, di pulsazione caratteristica $\omega_o = \sqrt{n}$ e pulsazione della forzante $\omega = n$. Poiché si suppone $n \geq 2$ si ha $\omega_o \neq \omega$, dunque non vi è risonanza. Se $n = 2, 3$ si ha un moto quasi-periodico (il rapporto $\omega/\omega_o = \sqrt{2}, \sqrt{3}$ non è razionale), se $n = 4$ il moto è periodico ($\omega/\omega_o = 2$ è razionale).

6.1.3 Si consideri l'equazione $y'' + 2\delta y' + y = 0$.

(a) Per quali $\delta > 0$ l'equazione rappresenta un moto oscillatorio smorzato?

(b) Provare che se $\delta = 1/2$ il moto rappresentato è smorzato; in questo caso scrivere l'integrale generale dell'equazione usando come costanti l'ampiezza e l'angolo di fase.

(c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione $y'' + y' + y = \cos t$.

Risposta.

(a) Il moto è oscillatorio smorzato se il discriminante del polinomio caratteristico $r^2 + 2\delta r + 1$ è negativo, dunque se $\delta < 1$.

(b) Chiaramente $1/2 < 1$, dunque il moto è smorzato. Direttamente, o dalla formula $y(t; A, \phi) = Ae^{-\delta t}\cos(\nu t + \phi)$, con $\nu = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$, dove ω_o è la pulsazione cartatteristica, si trova

$$y(t; A, \phi) = Ae^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \phi\right).$$

(c) La soluzione particolare va cercata sotto la forma $\bar{y}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Si trova $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, dunque $\bar{y}(t) = \sin t$.

6.1.4 Sia $\omega_o > 0$; si consideri il moto di equazione $y'' + \omega_o^2 y = f(t)$ con condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ e

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t & \text{se } t > 0 \end{cases}.$$

Classificare il moto, risolvere il problema ai valori iniziali, tracciare un grafico approssimativo della soluzione.

Risposta. Si tratta di un moto forzato non smorzato. Le radici del polinomio caratteristico $r^2 + \omega_o^2$ sono $r = \pm i\omega_o$, dunque l'integrale generale dell'omogenea è

$$y_H(t; C_1, C_2) = C_1 \cos(\omega_o t) + C_2 \sin(\omega_o t).$$

Una soluzione particolare $\bar{y}(t)$ sarà nulla per $t \leq 0$ poiché se $t \leq 0$ l'equazione completa è omogenea; se $t > 0$ si cerca $\bar{y}(t) = At + B$. Inserendo nell'equazione si trova $A = 1/\omega_o^2$, $B = 0$, dunque

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} 0 & \textit{se } t \leq 0 \\ \frac{t}{\omega_o^2} & \textit{se } t > 0. \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione è dunque $y(t; C_1, C_2) = C_1 \cos(\omega_o t) + C_2 \sin(\omega_o t) + \bar{y}(t)$. Imponiamo ora le condizioni iniziali: se $t \leq 0$ l'equazione è omogenea, i dati entrambi nulli e dunque, per l'unicità delle soluzioni al problema ai valori iniziali si ha $y = 0$; se $t > 0$ si trova invece $C_1 = 0$, $C_2 = -1/\omega_o^3$. Dunque la soluzione del problema ai valori iniziali è (vedi Figura 6.1)

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \textit{se } t \leq 0 \\ \frac{1}{\omega_o^2}t - \frac{1}{\omega_o^3}\sin(\omega_o t) & \textit{se } t > 0. \end{cases}$$

Si noti che la soluzione y è derivabile anche in 0 con derivata nulla.

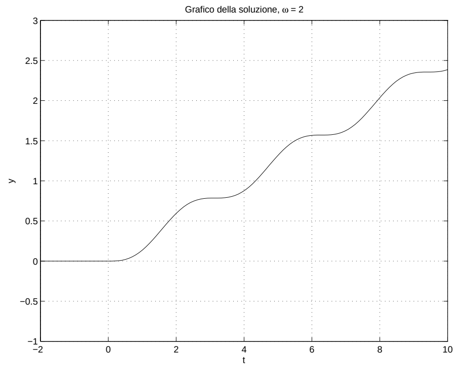

Figura 6.1: Vedi Esercizio 6.1.4.

6.1.5 Si consideri il moto rappresentato dall'equazione $y'' + 2\delta y' + \omega_o^2 y = 0$, con $0 < \delta < \omega_o$. Fissato ω_o, dire per quale valore di δ il quoziente tra due massimi successivi di una soluzione è 1/2.

Risposta. Il moto è libero con smorzamento subcritico in quanto $0 < \delta < \omega_o$. In tal caso sappiamo che il quoziente tra due massimi (minimi) successivi è costante e, se sono assunti ai tempi $t_2 > t_1$, si ha

$$\frac{y(t_2)}{y(t_1)} = e^{-\delta T},$$

dove $T = \frac{2\pi}{\nu}$, $\nu = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$. Cerchiamo pertanto δ in modo che

$$e^{-\delta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}}} = \frac{1}{2}.$$

Applicando i logaritmi si ottiene

$$\delta = \frac{\log 2}{\sqrt{4\pi^2 + \log^2 2}}\, \omega_o .$$

6.1.6 Si consideri il moto oscillatorio rappresentato dal problema ai valori iniziali $y'' + y = B$, $y(0) = 0$, $y'(0) = v$, con $B > 0$, $v \neq 0$.

(a) Risolvere il problema e tracciare un grafico approssimativo della soluzione.

(b) Sia $y_o > 0$; dire per quali forzanti B il moto passa per il punto y_o.

Risposta.

(a) L'integrale generale dell'equazione omogenea è $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$; inoltre $\bar{y}(t) = B$ è soluzione particolare dell'equazione completa, dunque l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + B .$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova

$$y(t) = -B \cos t + v \sin t + B .$$

(b) Il moto è forzato non smorzato, la soluzione periodica. L'ampiezza della soluzione è $A = \sqrt{B^2 + v^2}$ e l'angolo di fase determinato dalle equazioni

$$\cos\phi = -B/\sqrt{B^2 + v^2}, \quad \sin\phi = -v/\sqrt{B^2 + v^2}.$$

Per un tale ϕ possiamo dunque scrivere

$$y(t) = A\cos(t + \phi) + B .$$

La soluzione oscilla tra i valori $B + A$ e $B - A$; poiché $A > B$ si ha $B - A < 0 < B + A$. Affinché la soluzione passi per il punto y_0 occorre che $B + A \geq y_0$, ovvero $\sqrt{B^2 + v^2} \geq y_0 - B$. Se $y_0 \leq B$ questo è sempre vero, se $y_0 > B$ occorre che $B \geq \frac{y_0^2 - v^2}{2y_0}$.

6.1.7 Si consideri il moto rappresentato dall'equazione $y'' + y = 2\cos(\omega t)$. Per quali valori di ω si ha risonanza? Per tali valori calcolare la soluzione tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Trovare un tempo t al quale la soluzione ottenuta supera il valore 100.

Risposta. *Poiché la frequenza caratteristica è 1 si ha risonanza se $\omega = 1$. L'integrale generale dell'omogenea è $y(t; C_1, C_2) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$; poiché i è radice del polinomio caratteristico, una soluzione particolare dell'equazione completa va cercata sotto la forma $\bar{y}(t) = t(A \cos t + B \sin t)$. Si trova $A = 0$, $B = 1$, e perciò l'integrale generale della completa è*

$$y(t; C_1, C_2) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t \sin t\,.$$

Imponendo i dati iniziali si trova la soluzione del problema ai valori iniziali:

$$y(t) = (1 + t) \sin t\,.$$

Per studiare quando la soluzione y superi il valore 100 ad un certo tempo t, è sufficiente limitarsi ai tempi $t_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; si trova che $y(t_k) = 1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi > 100$ se $k > \frac{99-\pi/2}{2\pi} \sim 15.5$.

6.1.8 Si consideri il moto rappresentato dall'equazione $y'' + 2dny' + n^2 y = 0$ con $n = 1, 2, \ldots$, $d \in (0, 1)$.

(a) Dire di che moto si tratta.

(b) Calcolare l'integrale generale dell'equazione.

(c) Calcolare infine il decremento logaritmico, nei casi in cui è possibile.

Risposta.

(a) Poiché $\delta = dn < n = \omega_o$ si tratta di un moto libero con smorzamento subcritico. In particolare possiamo sempre calcolare il decremento logaritmico.

(b) Le radici del polinomio caratteristico $r^2 + 2dnr + n^2$ sono $r = -dn \pm in\sqrt{1 - d^2}$; dunque l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y(t; C_1, C_2) = e^{-dnt} \left(C_1 \cos(n\sqrt{1 - d^2}\, t) + C_2 \sin(n\sqrt{1 - d^2}\, t) \right)\,.$$

(c) Il decremento logaritmico Δ è dato dalla formula $\Delta = \delta T$; qui $\delta = dn$, $\nu = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2} = n\sqrt{1 - d^2}$, $T = 2\pi/\nu$. Pertanto

$$\Delta = \frac{2\pi d}{\sqrt{1 - d^2}}\,.$$

6.1.9 Per $0 < \omega < \omega_o$, $B > 0$, si consideri il problema ai valori iniziali $y'' + \omega_o^2 y = B \cos(\omega t)$, $y(0) = a$, $y'(0) = 0$.

(a) Calcolare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione, specificando di che moto vibratorio si tratta.

(b) Risolvere il problema ai valori iniziali.

(c) Dire per quali $a \geq 0$ il problema ai valori iniziali ammette una soluzione costituita da due moti periodici di stessa ampiezza.

(d) Per tale a scrivere il moto come un moto armonico di ampiezza variabile, specificando per quali ω_o, ω tale moto armonico ha pulsazione 7 con periodo dell'ampiezza uguale a 5.

Risposta.

(a) Siamo nel caso delle oscillazioni non smorzate forzate. Si trova l'integrale generale $y(t) = A \cos(\omega_o t + \phi) + \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$.

(b) Imponendo le condizioni iniziali si trovano le due condizioni

$$A \cos\phi + \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2} = a\,, \quad A\omega_o \sin\phi = 0\,.$$

Dalla seconda condizione si deduce che $A = 0$, e allora vi è un solo moto periodico e necessariamente $a = \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2}$, o $\sin\phi = 0$. Se $\phi = 0$ allora $A + \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2} = a$ mentre se $\phi = \pi$ allora $-A + \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2} = a$. Di conseguenza

$$a - \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = a - \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2}\,, \phi = 0\,, \\ y(t) = \left(a - \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2}\right) \cos(\omega_o t) + \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$a - \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\left(a - \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2}\right)\,, \phi = \pi\,, \\ y(t) = \left(-a + \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2}\right) \cos(\omega_o t + \pi) + \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \end{cases}$$

e dunque, in ogni caso,

$$y(t) = \left(a - \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2}\right)\cos(\omega_o t) + \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2}\cos(\omega t)\,.$$

(c) *I moti hanno la stessa ampiezza se* $a = \frac{2B}{\omega_o^2-\omega^2}$ *o* $a = 0$*; consideriamo il primo, il secondo caso essendo analogo. Si ha*

$$y(t) = \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2}\left(\cos(\omega_o t) + \cos(\omega t)\right)\,.$$

(d) *Dalle formule di prostaferesi si ha*

$$\cos(\omega_o t) + \cos(\omega t) = 2\cos\left(\frac{\omega_o - \omega}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_o + \omega}{2}t\right)$$

dunque

$$y(t) = \left[\frac{2B}{\omega_o^2 - \omega^2}\cos\left(\frac{\omega_o - \omega}{2}t\right)\right]\cdot\cos\left(\frac{\omega_o + \omega}{2}t\right)$$

dove tra parentesi quadre abbiamo raccolto i termini relativi all'ampiezza variabile. Infine si impone che

$$\begin{cases} \frac{\omega_o-\omega}{2} = 5 \\ \frac{\omega_o+\omega}{2} = 7 \end{cases}$$

da cui $\omega_o = 12$, $\omega = 2$.

6.2 Esercizi proposti

6.2.1 Dire se la funzione $\sin\left(\frac{7}{4}t\right) + \cos\left(\frac{4}{9}t\right)$ è periodica, e in caso affermativo calcolarne il periodo.

6.2.2 Si consideri il moto vibratorio rappresentato dal problema $y'' + 0.2y = 3\cos(7.4t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Classificare il moto e trovare l'integrale generale. Dire se la soluzione è periodica e, in caso affermativo, calcolare il periodo.

6.2.3 Trovare le soluzioni del problema ai valori iniziali $y'' + 4y = \sin t + \cos(2t)$, $y(0) = y'(0) = 0$. Commentare l'equazione e il moto relativo nell'ambito della teoria delle vibrazioni.

Suggerimento. Per la linearità dell'equazione una soluzione particolare va cercata sotto la forma $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$, *dove* $\bar{y}_1$ *è una soluzione particolare di* $y'' + 4y = \sin t$ *e* $\bar{y}_2$ *una soluzione particolare di* $y'' + 4y = \cos(2t)$.

6.2.4 Trovare la soluzione del problema ai valori iniziali $y'' + y = \sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Commentare l'equazione e il moto relativo nell'ambito della teoria delle vibrazioni. Ha limite la soluzione per $t \to +\infty$? Dire per quali tempi t si è sicuri che la soluzione resta limitata in valore assoluto da 10.

6.2.5 Sia $0 < \epsilon < 1$, $\alpha > 0$; si consideri il moto vibratorio rappresentato dal problema $y'' + \alpha^2 y = \epsilon\cos\big((\alpha+\epsilon)t\big)$, $y(0) = y'(0) = 0$. Classificare il moto e risolvere il problema. Sia y_ϵ la soluzione; esiste una costante C tale che $y_\epsilon(t) \leq C$ per ogni $t \geq 0$ e per ogni $\epsilon \in (0,1)$? Si può calcolare il limite $\lim_{\epsilon\to 0} y_\epsilon(t)$?

Suggerimento. Non si cerchi la costante ottimale.

6.2.6 Trovare le soluzioni delle equazioni $y'' + 2y' + 10y = \sin t$ e $y'' + y' - y = e^{-t}$ relative ai dati iniziali $y(0) = y'(0) = 0$. Commentare le equazioni e i moti relativi nell'ambito della teoria delle vibrazioni.

6.2.7 (a) Sia $\omega_o > 1$; si consideri il moto vibratorio rappresentato dal problema $y'' + 2y' + \omega_o^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Classificare il moto e risolvere il problema. Si consideri poi il caso $\omega_o = \sqrt{5}/2$; calcolare esplicitamente i minimi e i massimi della soluzione e il relativo decremento logaritmico.

(b) Sia $0 < \delta < 1$; si consideri il moto vibratorio rappresentato dal problema $y'' + 2\delta y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Classificare il moto e risolvere il problema. Si consideri poi il caso $\delta = \sqrt{3}/2$; calcolare esplicitamente i minimi e i massimi della soluzione e il relativo decremento logaritmico.

6.2.8 Trovare la soluzione del problema ai valori iniziali $y'' + 4y' + 5y = 5$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$ per $y_0 \in \mathbb{R}$. Commentare l'equazione e il moto relativo nell'ambito della teoria delle vibrazioni. Provare che la soluzione tende per $t \to +\infty$ ad un valore finito l; dire per quali y_0 si è sicuri che la soluzione disti al tempo $t = 1$ da tale valore l per meno di $1/10$.

Suggerimento. Si trova $l = 1$. Nell'ultima stima non è richiesto il valore preciso t_0 del tempo per cui $|y(t) - 1| < 1/10$ per $t > t_0$ e tale stima non vale per alcun tempo più piccolo di t_0; ci si accontenti di una stima per eccesso trovando un tempo $t_1 \geq t_0$.

6.2.9 Si consideri il moto vibratorio rappresentato dall'equazione $y'' + 3y' + 2y = \cos(\omega t)$, per $\omega > 0$. Calcolare l'integrale generale dell'equazione, scrivendolo come $y_T + y_P$, dove y_T rappresenta il regime transitorio e y_P il regime permanente. Calcolare l'ampiezza di y_P.

6.2.10 Si consideri il moto vibratorio espresso dall'equazione $y'' + y = B_1 \sin(\omega_1 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)$, con $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Q}$, $\omega_1 > \omega_2 > 1$. Classificare il moto secondo la teoria delle vibrazioni. Scrivere l'integrale generale dell'equazione, calcolandone il periodo. Dire per quali scelte di ω_1 e ω_2 il periodo del moto risulta uguale a 10π.

Suggerimento. Per linearità si cerchi una soluzione particolare dell'equazione sotto la forma $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$, dove $\bar{y}_1$ è soluzine particolare di $y'' + y = B_1 \sin(\omega_1 t)$ e $\bar{y}_2$ è soluzione particolare di $y'' + y = B_2 \sin(\omega_2 t)$.

6.2.11 Si consideri il moto vibratorio rappresentato dal problema $y'' + \omega_o^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = v_o$, dove $\omega_o > 0$. Classificare il moto e calcolarne la soluzione y_0. Si consideri poi il moto $y'' + 2\delta y' + \omega_o^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = v_o$ con $\delta < \omega_o$; classificare il moto e calcolarne la soluzione y_1.

Per quale valore di δ la lunghezza d'onda di y_1 è il doppio di quella di y_0? Per tale valore di δ, dire da che tempo in poi si è sicuri che l'ampiezza delle oscillazioni di y_1 è la metà di quelle di y_0.

Suggerimento. Si trova $y_o(t) = \frac{v_o}{\omega_o} \sin(\omega_o t)$, $y_1(t) = \frac{v_o}{\nu} e^{-\delta t} \sin(\nu t)$, per $\nu = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$. Dunque $\nu = \frac{\omega_o}{2}$ se e solo se $\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_o$. Infine $\frac{v_o}{\nu} e^{-\delta t} < \frac{1}{2} \frac{v_o}{\omega_o}$ se $t > \frac{4 \log 2}{\sqrt{3}\omega_o}$.

6.2.12 Si consideri il moto rappresentato dall'equazione $y'' + 4y = \sin t + \sin(2t)$. Classificare il moto e scrivere l'integrale generale dell'equazione. Dire se il moto relativo è periodico; è limitata la soluzione?

6.2.13 Si consideri il moto vibratorio rappresentato da $y'' + \frac{2}{n} y' + \frac{a^2}{n^2} y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, dove $0 < a < 1$. Classificare il moto e trovare la soluzione y_n del problema ai valori iniziali. Può annullarsi la soluzione? A cosa tende la successione $y_n(t)$ per $n \to \infty$? Commentare.

6.2.14 Si consideri il moto vibratorio rappresentato da $y'' + 2\delta y' + 4y = 3\sin(2t)$ con $0 < \delta < 1$. Classificare il moto e trovare l'integrale generale $y = y_T + y_P$, specificando il termine relativo al regime transitorio e quello relativo al regime permanente. Qual è l'ampiezza della soluzione nel regime permanente? Qual è lo sfasamento tra la forzante e il termine relativo al regime permanente? Cosa succede se $\delta \to 0$?

Bibliografia

[1] F. Ayres jr.: *Equazioni differenziali.* Mc-Graw-Hill, 1994.

[2] C.B. Boyer. *Storia della matematica.* Mondadori, 2004.

[3] M. Bramanti, C.D. Pagani e S. Salsa. *Matematica. Calcolo infinitesimale e algebra lineare.* Seconda edizione. Zanichelli, 2004.

[4] C. Citrini. *Analisi matematica.* Volumi 1 e 2. Boringhieri, 1988 e 1992.

[5] B.P. Demidovich. *Esercizi e problemi di analisi matematica.* Editori Riuniti, 2003.

[6] E. Giusti. *Analisi matematica.* Volumi 1 e 2 Bollati Boringhieri, 1983 e 1985.

[7] E. Giusti. *Esercizi e complementi di analisi matematica.* Volumi primo e secondo. Bollati Boringhieri, 1991 e 1992.

[8] I.S. Gradhsteyn e I.M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products.* Academic Press, 1994.

[9] S. Salsa: *Equazioni a derivate parziali - Metodi, modelli e applicazioni.* Springer, 2004.

[10] S. Salsa e A. Squellati. *Esercizi di Matematica.* Volume 1 e 2. Ristampa coordinata con la seconda edizione di [3]. Zanichelli, 2004 e 2005.

[11] S. Salsa, G. Verzini: *Equazioni a derivate parziali - Complementi ed esercizi*, Springer, 2005.

[12] M. R. Spiegel: *Analisi di Fourier*, McGraw-Hill, 1994.