I numeri complessi

Andrea Corli

31 agosto 2009

Indice

In questo capitolo introduciamo i numeri complessi con particolare riferimento alla risoluzione delle equazioni algebriche di grado maggiore o uguale a 2.

1 Motivazione

L'introduzione dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali può essere motivata dall'impossibilità di risolvere nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali alcune semplici equazioni algebriche, ad esempio $x^2 - 2 = 0$. Tuttavia non ogni equazione algebrica è risolubile in $\mathbb{R}$; l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha radici reali. Possiamo definire un insieme contenente $\mathbb{R}$ in cui questa equazione abbia soluzione? Più precisamente: possiamo definire un insieme in cui ogni equazione algebrica di grado n ha esattamente n radici (contate con la loro molteplicità)?

Supponiamo che esista una soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$, e sia essa i; dunque $i^2 = -1$ e allora anche $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$. L'equazione $x^2 + 1 = 0$ avrebbe dunque le due soluzioni $\pm i$. Si noti bene che sia i che $-i$ *non* possono appartenere alla retta reale. Se pensiamo di applicare ad ogni numero del tipo $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, le usuali regole di somma e prodotto di numeri reali, otteniamo, se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (a+ib)+(c+id) &= (a+c)+i(b+d) && (1.1)\\ (a+ib)\cdot(c+id) &= (ac-bd)+i(ad+bc)\,. && (1.2) \end{aligned}$$

I termini di destra nelle due espressioni si presentano di nuovo sotto la forma $x + iy$.

2 Definizioni

Definizione 2.1 *L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è l'insieme dei punti (a, b) del piano $\mathbb{R}^2$ con le operazioni di somma e prodotto*

$$\begin{aligned} (a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d) && (2.3)\\ (a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd,ad+bc)\,. && (2.4) \end{aligned}$$

La (2.3) è la ben nota definizione di somma di vettori in $\mathbb{R}^2$. Invece non è mai stata data precedentemente nessuna definizione di prodotto in $\mathbb{R}^2$: infatti il prodotto scalare associa a due vettori uno scalare, il prodotto vettoriale un vettore nello spazio. E' pertanto la (2.4) l'operazione che differenzia $\mathbb{C}$ da $\mathbb{R}^2$, benché l'insieme soggiacente sia lo stesso.

L'elemento neutro della somma è il numero complesso $(0,0)$, l'elemento neutro del prodotto il numero complesso $(1,0)$. Inoltre per ogni $(a,b) \in \mathbb{C}$ esiste l'opposto $(-a,-b)$ e il reciproco $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ se $(a,b) \neq (0,0)$.

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (con le sue usuali operazioni di somma e prodotto) è contenuto in $\mathbb{C}$ tramite l'inclusione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ a & \mapsto & (a,0)\,. \end{array} \tag{2.5}$$

A causa dell'inclusione (2.5) identificheremo il numero reale a con la coppia $(a,0)$, e dunque scriveremo $a = (a,0)$. Si noti allora che da (2.4) segue che $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$. Il numero complesso $i = (0,1)$ è detto *unità immaginaria* e dunque $i^2 = -1$.

Dalle notazioni di sopra segue che $(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + ib$. Indichiamo perciò con $z = a + ib$ il numero complesso (a,b), $a, b \in \mathbb{R}$. Tale scrittura è detta *forma algebrica* di z; la *parte reale* e la *parte immaginaria* di z sono definite rispettivamente da $\Re z = a$, $\Im z = b$. I numeri complessi sono rappresentati su un piano, detto *piano complesso*; l'asse orizzontale è detto *asse reale*, quello verticale *asse immaginario.* I numeri reali sono rappresentati ovviamente sull'asse reale.

Con le notazioni precedenti le definizioni (2.3) (2.4) coincidono con (1.1) (1.2); inoltre la somma e il prodotto di due numeri complessi possono essere eseguite come le analoghe operazioni tra numeri reali, con l'eccezione che $i^2 = -1$.

Esempio 2.1

- $1 + 3i - (2 + i) = -1 + 2i$, $(2 + 3i)5i = -15 + 10i$.
- $\Re(2 - 3i) = 2$, $\Im(2 - 3i) = -3$.
- Il reciproco di i può essere calcolato come sopra. Più semplicemente

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i\,.$$

Dato un numero complesso $z = a + ib$ il suo *coniugato* è il numero complesso $\bar{z} = a - ib$, simmetrico di z rispetto all'asse reale. Le seguenti proprietà sono di immediata verifica:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}\,. \tag{2.6}$$

Il *modulo* di z è il numero reale positivo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e rappresenta la distanza euclidea di z dall'origine degli assi. Se $z = a \in \mathbb{R}$ allora il modulo di z coincide con il modulo o valore assoluto reale. Si verificano le proprietà seguenti:

$$|z| = 0 \iff z = 0, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.$$

L'ultima disuguaglianza è detta *disuguaglianza triangolare*: la somma delle lunghezza di due lati di un triangolo è minore della lunghezza del lato rimanente.

Esempio 2.2

- $\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$, $|3 - 2i| = \sqrt{13}$.
- $\bar{i} = -i$, $\bar{3} = 3$.

Esercizio 2.1 Scrivere $\frac{a+ib}{c+id}$ in forma algebrica.

Risposta. $\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

3 Forma trigonometrica di un numero complesso

Sia $z = a + ib$ un numero complesso. Indichiamo con $\rho = |z|$ il *raggio polare* e con $\theta = \arg z$ l'*angolo polare*, cioè l'angolo che la retta congiungente il punto z con l'origine forma con l'asse reale, misurato in senso antiorario. Dato il numero complesso z il suo raggio polare è univocamente determinato, ma non così l'angolo polare, a causa dei multipli di 2π. Per ovviare a questa indeterminazione si considera l'*argomento principale di* z, ovvero quel valore di θ compreso in $[0, 2\pi)$ o in $(-\pi, \pi]$.

Poiché

$$a = \rho\cos\theta, \quad b = \rho\sin\theta$$

ogni numero complesso $z \neq 0$ può essere scritto univocamente nella forma

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

E' questa la *forma trigonometrica del numero* z. Naturalmente il passaggio dalla forma trigonometrica a quella algebrica è possibile dalle formule

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \end{cases}$$

Esempio 3.1

- $\arg i = \frac{\pi}{2}$, $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$ o anche $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$.

Se $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ sono due numeri complessi, allora si prova facilmente che

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big)\,. \tag{3.7}$$

Questa formula permette di dare un'interpretazione geometrica alla definizione (2.4): il prodotto di due numeri complessi z_1, z_2 è quel numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti di z_1, z_2. In particolare la moltiplicazione per i equivale ad una rotazione in senso antiorario di $\frac{\pi}{2}$.

La formula (3.7) si generalizza facilmente al prodotto di n numeri complessi e in particolare se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ha la *formula di De Moivre*

$$z^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)\,.$$

La (3.7) giustifica la *notazione* con l'esponenziale complessa

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}\,. \tag{3.8}$$

Questa formula può in effetti essere dimostrata ma con tecniche che esulano dai contenuti di questo corso. La (3.7) si scrive allora $\rho_1 e^{i\theta_1}\cdot\rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, adoperando per l'esponenziale complessa le usuali regole valide in campo reale. Con questa notazione la formula di De Moivre diventa $\big(\rho e^{i\theta}\big)^n = \rho^n e^{in\theta}$.

Esempio 3.2

- Poiché $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ si ha che $(1 + i)^4 = 4e^{i\pi} = -4$.
- Viceversa $2e^{i5\pi/6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i$.

Esercizio 3.1 Rappresentare in forma algebrica i numeri complessi $3e^{i\pi/4}$, $2e^{i\pi}$, $e^{i3\pi/2}$.

Dalla definizione (3.8), ovvero da $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ seguono le *formule di Eulero*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\,, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\,.$$

4 Radici di un numero complesso

In questa sezione cerchiamo le soluzioni z complesse dell'equazione $z^n = w$, per un dato numero complesso w.

Definizione 4.1 *Siano* $z, w \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ *un numero naturale. Il numero complesso* z *è* radice n-esima *di* w *se*

$$z^n = w\,. \tag{4.9}$$

La terminologia è analoga a quella già usata in campo reale: ± 2 sono radici quadrate di 4, -1 è radice cubica di -1. Si noti che il numero delle soluzioni reali x dell'equazione $x^n = y$, $y \in \mathbb{R}$, è molto "variabile": $x^2 = -1$ non ha soluzioni, $x^2 = 1$ ne ha due; $x^3 = 1$ ne ha una. Proveremo ora che in campo complesso l'equazione (4.9) ha sempre esattamente n soluzioni se $w \neq 0$.

Teorema 4.1 (Radici n-esime di un numero complesso) *Sia* $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, *e* $n \geq 1$ *un numero naturale; allora esistono esattamente* n *radici* n*-esime di* w. *Più precisamente se* $w = re^{i\phi}$ *allora esse sono*

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\phi + 2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Dimostrazione. E' chiaro che le z_k sono radici: $(z_k)^n = re^{i(\phi+2k\pi)} = re^{i\phi} = w$.

Viceversa, sia $z = \rho e^{i\theta}$ una radice n-esima di w. Allora $z^n = \rho^n e^{in\theta} = re^{i\phi}$; dunque $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ e $n\theta = \phi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, cioè

$$\theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Basta ora osservare che in questa espressione solo i valori $k = 0, 1, \ldots, n-1$ identificano numeri complessi distinti. $\square$

Le radici n-esime di un numero complesso $w = re^{i\phi}$ si trovano dunque sulla circonferenza del piano complesso di raggio $r^{1/n}$. La prima ha argomento ϕ/n; gli argomenti delle rimanenti $n-1$ si ottengono aggiungendo di volta in volta $2\pi/n$ all'argomento della precedente. Esse sono pertanto i vertici di un poligono regolare di n lati.

Esempio 4.1

- Per calcolare le radici terze di -1, ovvero per risolvere l'equazione $z^3 = -1$, notiamo che $-1 = e^{i\pi}$. Pertanto esse sono date dalla formula $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$, cioè

$$\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\,, \quad -1\,, \quad \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\,.$$

- Le radici quarte di 1, cioè le soluzioni di $z^4 = 1$, si ricavano da $1 = e^{i0}$: esse sono $1, i, -1, -i$.

Esempio 4.2

- Consideriamo l'equazione $z^2 = a$, con $a \in \mathbb{R}$.
  Se $a \geq 0$ allora $a = ae^{i0}$, da cui le soluzioni $z = \sqrt{a}e^{i0}$, $z = \sqrt{a}e^{i\pi}$, cioè $z = \pm\sqrt{a}$, come noto.
  Se $a < 0$, poiché $a = |a|e^{i\pi}$, le soluzioni sono $\sqrt{|a|}e^{i\pi/2}$, $\sqrt{|a|}e^{-i\pi/2}$, dunque $\pm i\sqrt{-a}$.

Esercizio 4.1 Risolvere le equazioni $z^6 = 1$, $z^4 = -4$.

5 Equazioni di secondo grado e il teorema fondamentale dell'algebra

Consideriamo ora l'equazione di secondo grado

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{5.10}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e cerchiamo le sue radici, reali o complesse. Si ha

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

Pertanto si è ricondotti alla soluzione di

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Sia $\Delta = b^2 - 4ac$ il discriminante dell'equazione (5.10). Se $\Delta \geq 0$ si trovano le radici reali $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Se $\Delta < 0$ dall'Esempio 4.2 si trova $z + \frac{b}{2a} = \pm i\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$, cioè $z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$. In conclusione le radici di (5.10) sono

$$z = \begin{cases} \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{se } \Delta \geq 0 \\ \frac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} & \text{se } \Delta < 0. \end{cases}$$

Pertanto l'equazione di secondo grado a coefficienti reali (5.10) ha sempre due radici: esse sono reali se $\Delta \geq 0$ (coincidenti se $\Delta = 0$), complesse coniugate se $\Delta < 0$.

Un analogo procedimento si applica nel caso in cui $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Esempio 5.1

- Le radici di $z^2 + z + 1 = 0$ sono $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
- Le radici di $z^2 - 2z + 2 = 0$ sono $-1 \pm 2i$.

L'esistenza di esattamente n soluzioni dell'equazione $z^n = w$ si generalizza nel seguente risultato generale.

Teorema 5.1 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni equazione algebrica*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0$$

con coefficienti in $\mathbb{C}$ ha esattamente n soluzioni complesse, se contate con la relativa molteplicità.

Nel caso in cui i coefficienti siano reali si ha il seguente risultato.

Corollario 5.1 *Consideriamo l'equazione*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0$$

con coefficienti in $\mathbb{R}$. Se w è radice dell'equazione allora anche $\bar{w}$ è radice.

Dimostrazione. Se w è radice allora $a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \ldots + a_1 w + a_0 = 0$. Dunque, prendendo il coniugato, da (2.6) segue

$$0 = \overline{a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \ldots + a_1 w + a_0} = a_n (\bar{w})^n + a_{n-1} (\bar{w})^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{w} + a_0$$

che prova che $\bar{w}$ è radice dell'equazione. $\square$

Il corollario precedente chiarisce la struttura delle radici delle equazioni algebriche a coefficienti reali: le soluzioni possono essere reali oppure complesse coniugate.