

Appunti di
Complementi di Analisi Matematica
Istituzioni di Analisi Matematica

Andrea Corli

21 luglio 2012

Indice

Introduzione	v
1 Serie di funzioni	1
1.1 Serie numeriche complesse	1
1.2 Successioni di funzioni	2
1.3 Serie di funzioni	5
2 Serie di potenze	11
2.1 Serie di Taylor	11
2.2 Serie di potenze reali	13
2.3 Serie di potenze complesse	17
3 Serie trigonometriche e di Fourier	19
3.1 Funzioni periodiche	19
3.2 Serie trigonometriche	20
3.3 Serie di Fourier	21
3.4 Complementi alla teoria delle serie di Fourier	26
3.5 Sviluppi trigonometrici di una funzione definita in un intervallo	29
3.6 La forma complessa di una serie di Fourier	29
3.7 Confronto tra le serie di Taylor e di Fourier	31
4 Equazioni differenziali ordinarie	33
4.1 Introduzione	33
4.1.1 EDO lineari del primo ordine	33
4.1.2 EDO lineari del secondo ordine	33
4.2 Integrazione per serie di potenze di EDO	34
4.3 Integrazione per serie di potenze generalizzate di EDO	38
5 Equazioni alle derivate parziali	41
5.1 L'equazione del calore	41
5.2 L'equazione delle onde	43
5.3 L'equazione di Laplace	45
5.4 La membrana circolare	48
6 La trasformata di Fourier	53
6.1 Definizione e prime proprietà	53
6.2 Esempi	56
6.3 Operazioni con la trasformata di Fourier	59
6.4 Tabella	65
7 Vibrazioni	67
7.1 Introduzione	67
7.2 Preliminari	68
7.3 Vibrazioni non smorzate	68
7.3.1 Vibrazioni non smorzate libere	68
7.3.2 Vibrazioni non smorzate forzate	69
7.4 Esercizi	72
7.5 Vibrazioni smorzate	74
7.5.1 Vibrazioni smorzate libere	74

7.5.2	Vibrazioni smorzate forzate	78
7.6	Altri modelli	80
7.7	Esercizi	81
7.8	Riepilogo e formule	83
Bibliografia		85

Introduzione

Queste appunti sono relativi al corso di *Complementi di Analisi Matematica*, Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, in comune con il corso di *Istituzioni di Analisi Matematica*, Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica e Ingegneria dei Materiali, entrambi tenuti da me presso l'Università di Ferrara per diversi anni fino all'a.a. 2011-12. Non si tratta di un vero libro quanto di una collezione degli argomenti svolti a lezione; gli studenti più interessati potranno consultare più proficuamente i libri riportati nella bibliografia. In particolare ho seguito, per quanto possibile, l'impostazione dei testi [3, 4, 5]. Per qualche informazione storica si veda infine [1].

Ferrara, 21 luglio 2012

Andrea Corli

Capitolo 1

Serie di funzioni

In questo capitolo si introducono le successioni e le serie di funzioni. Le funzioni considerate saranno quasi sempre funzioni di una variabile reale e a valori reali; poche righe sono destinate a funzioni di variabile complessa (e alle relative serie). Prerequisiti indispensabili per la comprensione di quanto segue sono: successioni e serie numeriche (reali), numeri complessi. Premettiamo una sezione sulle serie numeriche complesse. Oltre ai testi citati nell'introduzione, si potranno consultare, per questo capitolo e i due seguenti, i testi [8, 9, 11] e, per gli esercizi, [10, 12, 17].

1.1 Serie numeriche complesse

Le definizioni di successioni e serie a valori complessi sono analoghe a quelle relative a successioni e serie a valori reali. Le differenze sono solo formali: invece di considerare punti sulla retta reale si considerano punti nel piano complesso; nella definizione di limite di successione non si ha più a che fare con *intervalli reali* centrati nel limite ma con *cerchi nel piano complesso* di centro il limite.

Definizione 1.1.1 Sia $\{c_n\}$ una successione di numeri complessi; un numero complesso c è limite della successione $\{c_n\}$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$|c_n - c| < \epsilon \quad \text{per ogni } n \geq N. \quad (1.1)$$

Si noti che il simbolo $|\cdot|$ indica qui il modulo di un numero complesso; la quantità $|c_n - c|$ è la distanza euclidea del punto c_n da c . La condizione (1.1) esprime dunque il fatto che i termini c_n , per $n \geq N$, appartengono al cerchio complesso di centro c e raggio ϵ . Si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ se e solo se la successione *reale* delle distanze $\{|c_n - c|\}$ tende a 0. In particolare $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ se e soltanto se $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0$. Questo fatto sarà frequentemente utilizzato nel seguito.

Come per le successioni reali si prova che il limite, se esiste, è unico.

Esempio 1.1.1

- La successione $c_n = i^n$, $n = 0, 1, \dots$, assume i valori $1, i, -1, -i, 1, \dots$. Essa è limitata (da 1) ma non ha limite.
- La successione $c_n = \frac{i^n}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, si veda Figura 1.1, assume i valori $i, -1/2, -i/3, 1/4, \dots$. Essa ha limite 0; infatti $|\frac{i^n}{n}| = \frac{1}{n}$.
- La successione $c_n = (1+i)^n$, $n = 0, 1, \dots$ può essere studiata scrivendola in forma trigonometrica: infatti $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Dalle formule di De Moivre si ha che $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{n\pi}{4}}$. Per ogni n il punto c_n viene ruotato rispetto al precedente c_{n-1} di $\pi/4$ e il suo modulo aumenta di un fattore $\sqrt{2}$. La successione non è limitata e dunque non ha limite.

Definizione 1.1.2 Sia $\{c_n\}$ una successione di numeri complessi. La serie numerica di termine generale c_n è la successione $\{s_n\}$ definita per $n = 1, 2, \dots$ da

$$s_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = \sum_{k=1}^n c_k.$$

La successione $\{s_n\}$ è indicata anche col simbolo $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

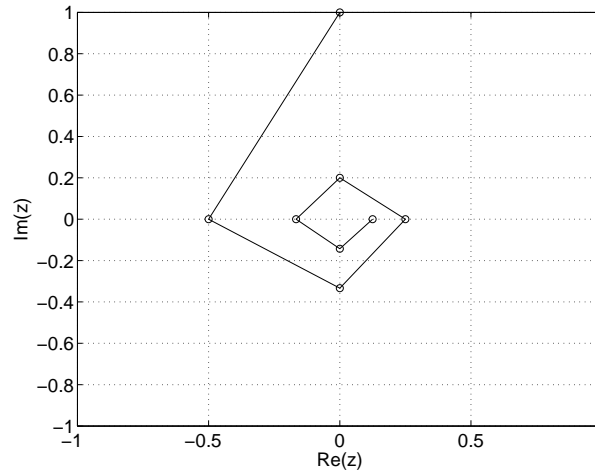


Figura 1.1: La successione $\frac{i^n}{n}$.

La serie è detta *convergente* se la successione $\{s_n\}$ ha limite finito s ; questo vuol dire che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|s_n - s| < \epsilon$ per ogni $n \geq N$. In tal caso il limite s è detto *somma della serie* ed è indicato di nuovo col simbolo $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Esempio 1.1.2 Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$. Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{i}{2}$; pertanto

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{i}{2}}.$$

Poiché $\left|\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}$, si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} = 0$, dunque la serie converge a $\frac{1}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{2}{5}(2 + i)$.

Come nel caso delle serie a termini reali, se una serie complessa converge allora il suo termine generale tende a 0. Un utile criterio di convergenza delle serie complesse è quello della *convergenza in modulo*, che rimpiazza il criterio della *convergenza assoluta* per le serie reali.

Proposizione 1.1.1 Sia $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ una serie complessa. Se la serie reale $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ è convergente, allora è convergente anche la serie complessa $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Esempio 1.1.3 Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$; si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e dunque la serie non converge in modulo. Tuttavia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^{2k}}{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Poiché entrambe le serie reali a destra convergono (per il criterio di Leibniz), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ converge, vedi Figura 1.2.

Esercizio 1.1.1 Generalizzare l'Esempio 1.1.3 alla serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ per $z \in \mathbb{C}$: si provi che la serie converge in modulo se $|z| < 1$ mentre non converge in modulo se $|z| > 1$. Disegnare con l'aiuto di un computer alcune somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ per $z \in \mathbb{C}$, ad esempio per $z = \frac{2}{3}(1 + i)$, $z = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z = \frac{2i-1}{\sqrt{5}}$, $z = \frac{3}{4} + \frac{4}{5}i$.

1.2 Successioni di funzioni

In questa sezione introduciamo brevemente le successioni di funzioni.

Definizione 1.2.1 Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni definite in I . La successione $\{f_n\}$ converge nel punto $x_0 \in I$ se esiste finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$; altrimenti la successione si dice *divergente* o *indeterminata* nel punto x_0 a seconda che tale limite valga $\pm\infty$ o non esista.

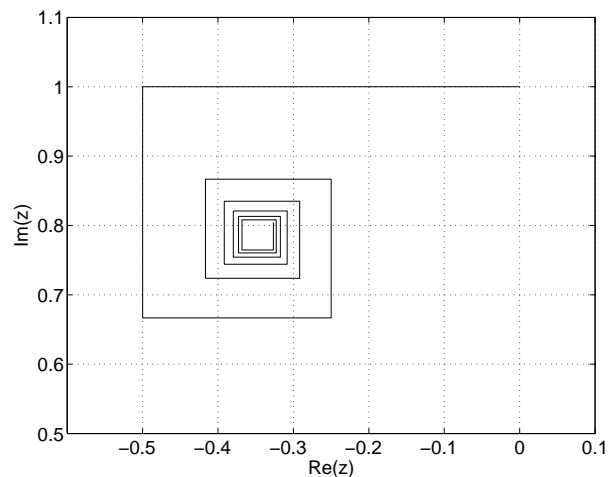


Figura 1.2: Le prime somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

Se la successione $\{f_n\}$ converge per ogni $x \in I$ si dice che la successione converge puntualmente in I ; in questo caso viene ad essere definita una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, detta limite puntuale della successione $\{f_n\}$, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Esempio 1.2.1

- Consideriamo una successione di funzioni costanti $f_n(x) = a_n$; in questo caso la successione di funzioni $\{f_n\}$ si riduce alla successione numerica $\{a_n\}$.
- Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ nell'intervallo $[0, 1]$, vedi Figura 1.3. Essa converge puntualmente in tale intervallo alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

- La successione di funzioni $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ definita in $I = \mathbb{R}$ converge puntualmente in \mathbb{R} alla funzione $f(x) = 0$, vedi Figura 1.3.
- La successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, vedi Figura 1.3, converge puntualmente in \mathbb{R} alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ definita in $[0, +\infty)$, vedi Figura 1.3. Se $0 \leq x < 1$ essa converge puntualmente a 0; se $x > 1$ essa converge puntualmente a 1. Infine nel punto $x = 1$ essa vale identicamente $1/2$. Pertanto la funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- La successione di funzioni $f_n(x) = \arctg(\frac{x}{n})$ converge puntualmente a 0 in \mathbb{R} .

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni, convergente puntualmente ad una funzione f nell'intervallo I . E' naturale porsi le seguenti domande.

- Se le f_n sono continue, è vero allora che anche f è continua?
- Se le f_n sono integrabili, è vero allora che anche f è integrabile? Se sì, è allora vero che

$$\int f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)dx? \quad (1.2)$$

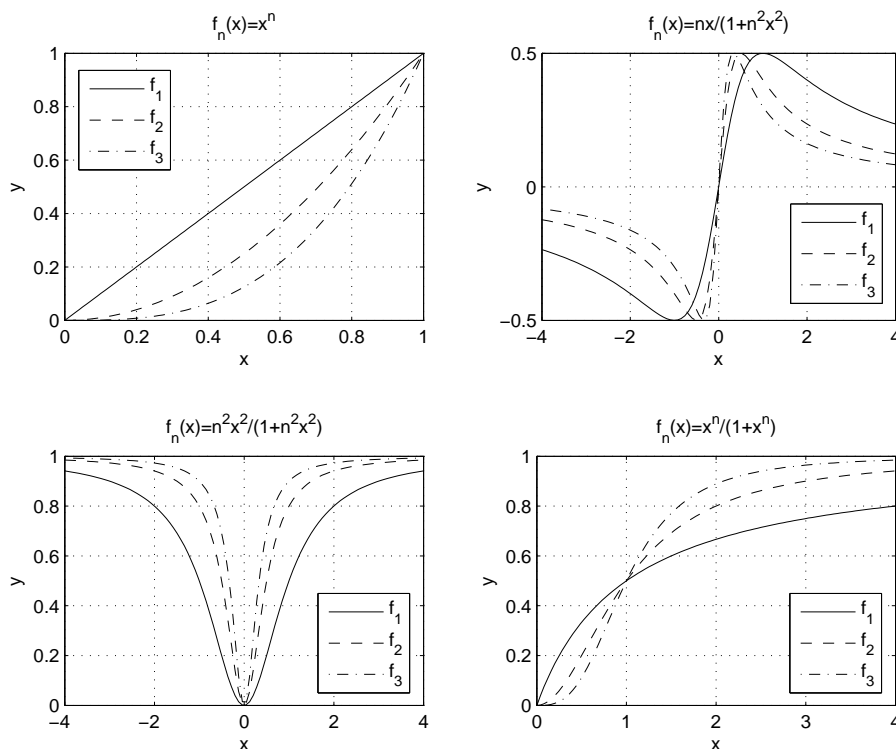


Figura 1.3: Vedi Esempio 1.2.1.

(iii) Se le f_n sono derivabili, è vero allora che anche f è derivabile? Se sì, è allora vero che

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) ? \quad (1.3)$$

Si noti che le formule (1.3) e (1.2) si possono scrivere più significativamente come

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

In altre parole: è vero che l'integrale (la derivata) del limite è il limite dell'integrale (della derivata) delle funzioni? O ancora: possiamo scambiare tra loro i simboli di limite e di integrale (derivata)?

La risposta è, in generale, *negativa* in tutti i casi di sopra, come mostriamo nei seguenti esempi.

Esempio 1.2.2

- Nell'intervallo $[0, 1]$ la successione $f_n(x) = x^n$ considerata sopra è formata da funzioni continue, anzi infinitamente derivabili, ma la funzione limite non è neanche continua.
- Si consideri nell'intervallo $[0, 1]$ la successione $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. La funzione f_n ha un massimo n/e nel punto $1/n$; si veda la Figura 1.4. La successione tende alla funzione $f(x) \equiv 0$ puntualmente ma

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 - (n+1)e^{-n} \rightarrow 1$$

quando $n \rightarrow \infty$ (mentre invece $\int_0^1 f(x) dx = 0$).

- Si consideri nell'intervallo $[-1, 1]$ la successione $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$. La funzione f_n ha un massimo $\frac{1}{2n}$ nel punto $1/n$ e minimo $-\frac{1}{2n}$ nel punto $-1/n$, essendo dispari; si veda la Figura 1.4. La successione tende alla funzione $f(x) = 0$ puntualmente, che è infinitamente derivabile. Tuttavia,

$$f'_n(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

quando $n \rightarrow \infty$ e dunque la derivata del limite (0) non coincide con il limite delle derivate.

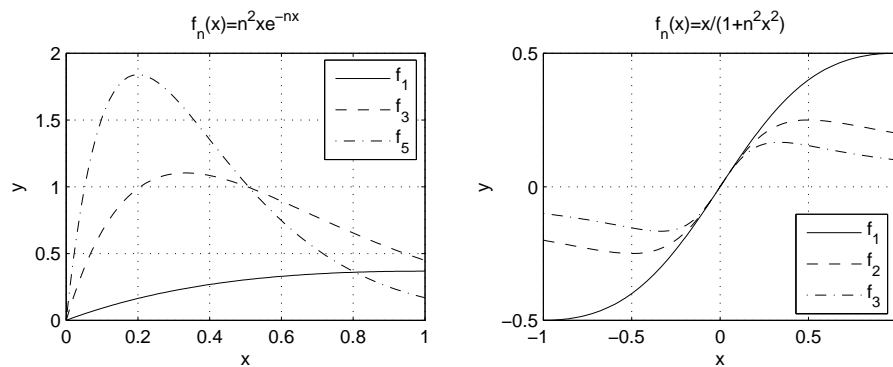


Figura 1.4: Le successioni di funzioni $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ (sinistra) e $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2}$ (destra).

1.3 Serie di funzioni

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e consideriamo una successione di funzioni $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ per $n = 1, 2, \dots$. Esattamente come per le serie numeriche, a partire dalla successione di funzioni $\{f_n\}$ possiamo costruire quella delle somme parziali $\{s_n\}$; definiamo infatti per ogni $x \in I$ le funzioni

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f_1(x), \\ s_2(x) &= f_1(x) + f_2(x), \\ &\vdots \\ s_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x), \\ &\vdots \end{aligned}$$

La successione di funzioni $\{s_n\}$ si indica con il simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Definizione 1.3.1 Consideriamo la successione di funzioni $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ per $n = 1, 2, \dots$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è convergente, divergente o indeterminata nel punto $x \in I$ a seconda che, rispettivamente, la successione di funzioni $\{s_n\}$ è convergente, divergente o indeterminata in x .

La serie si dice convergente (puntualmente) nell'intervallo I se converge per ogni $x \in I$; questo definisce la funzione somma $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ e si scrive, con abuso di notazione,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

Infine la serie si dice assolutamente convergente in I se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ dei valori assoluti converge per ogni $x \in I$.

In altri termini, la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge nel punto x se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge. L'avverbio *puntualmente*, relativo alla convergenza in ogni $x \in I$, è spesso omesso per brevità.

Esempio 1.3.1

- La serie geometrica: sappiamo che per ogni $x \in (-1, 1)$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Si veda la Figura 1.5. Naturalmente la serie diverge se $x \geq 1$ ed è indeterminata se $x \leq -1$.

Una serie di funzioni può convergere in un insieme *più piccolo* di quello comune di definizione delle funzioni f_n . Ad esempio, nel caso della serie geometrica le funzioni x^n sono definite in \mathbb{R} ma la serie converge solo per $x \in (-1, 1)$.

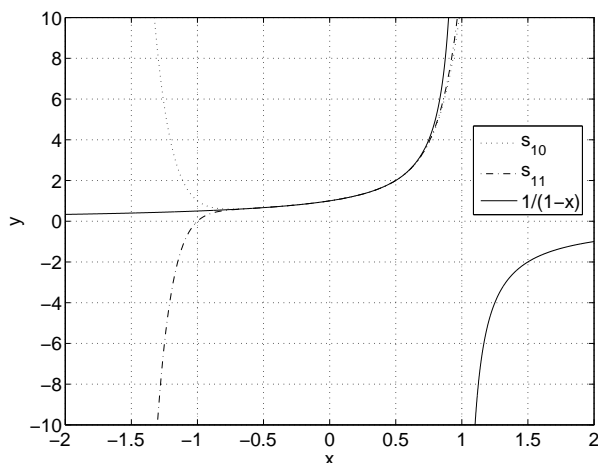


Figura 1.5: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Definizione 1.3.2 (Insieme di convergenza) Sia $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni; l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è

$$\left\{ x \in I : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}.$$

Esempio 1.3.2

- La serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$ di funzioni definite in \mathbb{R} è una serie geometrica di ragione e^x , dunque converge alla funzione $\frac{1}{1-e^x}$ quando $e^x < 1$, cioè per $x \in (-\infty, 0)$. L'insieme di convergenza è dunque l'intervallo $(-\infty, 0)$.

La sola proprietà di convergenza puntuale di una serie di funzioni è in generale troppo debole per poter dedurre sulla funzione somma f delle informazioni da quelle note per le funzioni f_n , come si è visto per le successioni di funzioni. Diamo dunque una condizione di convergenza più restrittiva di quella puntuale.

Definizione 1.3.3 (Convergenza totale) Consideriamo la successione di funzioni $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ per $n = 1, 2, \dots$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente nell'intervallo I se esiste una successione numerica $a_n \geq 0$ tale che

$$(i) |f_n(x)| \leq a_n \text{ per ogni } x \in I, n \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Osservazione 1.3.1

- Evidentemente ci possono essere più successioni a_n che soddisfano (i); al fine di provare la convergenza totale bisogna cercare a_n "abbastanza piccolo" in modo che (ii) sia soddisfatta.
- Supponiamo $I = [a, b]$ e che le funzioni f_n siano continue in $[a, b]$. Allora anche le funzioni $|f_n|$ sono continue e il Teorema di Weierstrass si applica: ogni $|f_n|$ ha massimo e per verificare la convergenza totale si può prendere

$$a_n = \max_{x \in [a, b]} |f_n(x)|.$$

In questo caso tale scelta è la migliore possibile. Detto in modo impreciso: la convergenza totale di una serie di funzioni equivale alla convergenza della serie numerica dei massimi dei valori assoluti delle funzioni.

- Ovviamente se una serie di funzioni converge totalmente in I allora essa converge pure puntualmente (assolutamente) in I ; il viceversa è falso. Consideriamo infatti la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, che converge puntualmente in $(-1, 1)$; nell'intervallo $(-1, 1)$ si ha $|x^n| < 1$ e la

costante 1 non può essere rimpiazzata da nessuna più piccola. Pertanto il più piccolo a_n che possiamo scegliere è $a_n = 1$, che dà una serie divergente. In conclusione,

convergenza totale in $I \xrightarrow{\neq}$ convergenza puntuale in I .

In effetti si può dire qualcosa sulla convergenza totale della serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$: essa converge totalmente in ogni intervallo $[-a, a]$ con $a < 1$. Infatti in tale intervallo $|x^n| \leq a^n$, che è il termine generale di una serie geometrica convergente.

Esempio 1.3.3

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{e^{nx}}$ in $[0, +\infty)$.

Si veda la Figura 1.6. Per quanto riguarda la convergenza puntuale, essendo la serie a termine positivi possiamo applicare il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{nx^n}{e^{nx}}} = \frac{x}{e^x} \sqrt[n]{n} \rightarrow \frac{x}{e^x}$$

per $n \rightarrow \infty$. Del resto $x < e^x$ per ogni $x \in [0, +\infty)$, dunque $\frac{x}{e^x} < 1$ e perciò la serie converge puntualmente in tutto l'intervallo $[0, +\infty)$.

Per quanto riguarda la convergenza totale, cerchiamo il massimo della funzione $f_n(x) = \frac{nx^n}{e^{nx}}$ in $[0, +\infty)$. Si trova che

$$f'_n(x) = (nx^n e^{-nx})' = n^2 x^{n-1} e^{-nx} (1 - x).$$

La funzione f_n ha dunque un massimo nel punto 1 e $f_n(1) = \frac{n}{e^n}$. Dunque $f_n(x) \leq a_n = \frac{n}{e^n}$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ converge (abbiamo dimostrato sopra la convergenza puntuale della serie di funzioni in ogni $x \in [0, +\infty)$, in particolare se $x = 1$). Pertanto la serie converge totalmente in $[0, +\infty)$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{e^{nx}}$ in $[0, +\infty)$.

Si veda la Figura 1.6. Se $x = 0$ la serie diverge, mentre se $x > 0$ si ha $\left| \frac{\cos(nx)}{e^{nx}} \right| \leq \frac{1}{e^{nx}}$, che è il termine generale di una serie convergente. Dunque l'insieme di convergenza è l'intervallo $(0, +\infty)$.

Vediamo se vi è convergenza totale in tutto l'insieme di convergenza $(0, +\infty)$. Si ha che $\frac{|\cos(nx)|}{e^{nx}} < 1$ per ogni $x \in (0, +\infty)$, e la costante 1 non può essere rimpiazzata da nessuna più piccola (in quanto f_n è continua e $f_n(0) = 1$). Pertanto non vi è convergenza totale nell'insieme $(0, +\infty)$.

Consideriamo invece l'insieme $[a, +\infty)$ (o $(a, +\infty)$), per un qualsiasi $a > 0$. In questo caso $\frac{|\cos(nx)|}{e^{nx}} < \frac{1}{e^{na}}$ per ogni $x \in [a, +\infty)$ e poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{na}}$ converge, si ha convergenza totale in ogni intervallo $[a, +\infty)$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$, per $x \in \mathbb{R}$.

Se $|x| < 1$ il termine generale della serie tende a 1, dunque la serie diverge. Se $|x| = 1$ il termine generale vale $1/2$, e dunque di nuovo la serie diverge. Se $|x| > 1$ usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = \frac{1}{x^2} < 1$$

e dunque la serie converge. Pertanto l'insieme di convergenza è $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Per la convergenza totale si ragiona come nell'esempio qui sopra: non si ha convergenza totale in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ma la si ha in ogni insieme del tipo $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ con $a > 1$.

Il teorema seguente, di cui non diamo la dimostrazione, mostra che se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente allora importanti proprietà delle funzioni f_n si trasmettono alla funzione somma f . Si noti l'ipotesi che $I = [a, b]$.

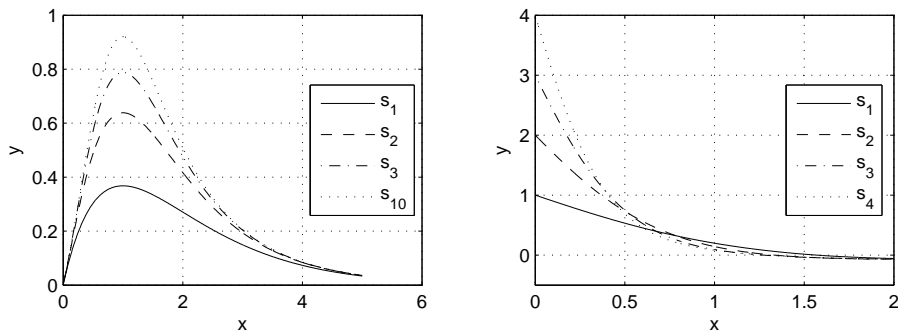


Figura 1.6: Le serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{e^{n x}}$ (sinistra) e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n x)}{e^{n x}}$ (destra).

Teorema 1.3.1 (Proprietà della convergenza totale) Consideriamo una successione di funzioni $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ e supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converga totalmente a una funzione f . Si ha:

(i) se $f_n \in C([a, b])$ allora anche $f \in C([a, b])$;

(ii) se le f_n sono integrabili anche f è integrabile e

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx; \quad (1.4)$$

(iii) se $f_n \in C^1([a, b])$ e se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge totalmente in $[a, b]$, allora anche $f \in C^1([a, b])$ e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x). \quad (1.5)$$

Osservazione 1.3.2 Poiché $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, le formule (1.4) e (1.5) si scrivono

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx, \\ \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x). \end{aligned}$$

In altri termini, sotto le ipotesi di convergenza totale della serie (e di quella delle derivate per la (1.5)), i simboli di integrale e serie (rispettivamente, quelli di derivata e serie) si scambiano. In modo impreciso, l'integrale della serie è la serie degli integrali (la derivata della serie è la serie delle derivate). Si può provare che il teorema non vale sotto la sola ipotesi di convergenza puntuale.

Esercizio 1.3.1 Studiare convergenza puntuale e totale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, dove $f_n(x) = 1$ in $[n, n+1)$ e zero altrove.

Risposta. Si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) = 1$ se $x \in [0, +\infty)$ e nulla altrove. La convergenza non è totale in \mathbb{R} .

Esercizio 1.3.2 Studiare convergenza puntuale e totale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$, per $x \in \mathbb{R}$.

Risposta. Per il criterio del rapporto si ha convergenza assoluta in $(-1, 1)$; se $x < -1$ la serie è indeterminata, se $x = -1$ converge, se $x \geq 1$ diverge; pertanto l'insieme di convergenza è $[-1, 1)$. Si ha convergenza totale in ogni intervallo $[-a, a]$, con $0 \leq a < 1$, ma non in $[-1, 1)$.

Esercizio 1.3.3 Studiare convergenza puntuale e totale della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^n$, per $x \in \mathbb{R}$.

Risposta. Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{x}{1+x^2}$; inoltre $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \iff 2x \leq 1+x^2 \iff 0 \leq (1-x)^2$, che è vero. Pertanto $a_n = \frac{1}{2^n}$ e vi è convergenza totale in tutto \mathbb{R} . La somma della serie è $\frac{1+x^2}{1-x+x^2}$.

Esercizio 1.3.4 Studiare la convergenza delle serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n^2}\right)$ in \mathbb{R} .

Risposta. Si usi il fatto che per $n \rightarrow \infty$ si ha che $\operatorname{arctg}\frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}$. Pertanto nel primo caso la serie diverge se $x \neq 0$; nel secondo converge puntualmente ma non totalmente: $|\frac{1}{n} \operatorname{arctg}\frac{x}{n}| \leq \frac{1}{n} \frac{\pi}{2}$; nel terzo converge totalmente; nel quarto converge puntualmente non totalmente.

Esercizio 1.3.5 Studiare la convergenza delle serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \sinh\left(\frac{x}{n}\right)$ in \mathbb{R} .

Risposta. Si che che $e^{\frac{x}{n}} \sim 1 + \frac{x}{n}$, dunque $\sinh\left(\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n}$. Dunque c'è convergenza puntuale solo in 0.

Capitolo 2

Serie di potenze

In questo capitolo studieremo un tipo particolare di serie di funzioni: le serie di potenze. Come esempio introduciamo dapprima le serie di Taylor.

2.1 Serie di Taylor

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty(I)$ e consideriamo la formula di Taylor di centro x_0 e ordine n con il resto di Lagrange :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \\ &= T_{n,x_0}(x) + E_{n,x_0}(x). \end{aligned}$$

Poiché la funzione f è infinitamente derivabile, questo sviluppo può essere fatto per ogni $n \in \mathbb{N}$; *cosa succede se $n \rightarrow \infty$?* Se per ogni $x \in I$ il resto $E_{n,x_0}(x)$ tende a 0 per $n \rightarrow \infty$, allora per ogni $x \in I$ la somma parziale numerica $T_{n,x_0}(x)$ tende per $n \rightarrow \infty$ al valore $f(x)$. Abbiamo pertanto il seguente risultato.

Proposizione 2.1.1 *Sia $f \in C^\infty(I)$, $x_0 \in I$, e supponiamo che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{n,x_0}(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in I. \quad (2.1)$$

Allora per ogni $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (2.2)$$

La serie in (2.2) è la *serie di Taylor di f di centro x_0* ; nel caso $x_0 = 0$ essa prende il nome di *serie di MacLaurin*. Si dice anche che f è *svilupicabile in serie di Taylor (MacLaurin)*.

Si possono dare delle condizioni esplicite sulla funzione f che implicano la (2.1), ma per semplicità verificheremo direttamente per le funzioni che considereremo la validità della (2.1).

Esempio 2.1.1

- Consideriamo $f(x) = e^x$ con $x_0 = 0$; allora $E_{n,0}(x) = e^c \frac{x^n}{n!}$ per c compreso tra 0 e x . Fissiamo x e dunque c ; sappiamo che $\frac{x^n}{n!}$ tende a 0 per $n \rightarrow \infty$. Pertanto

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

In particolare se $x = 1$ si trova $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

- In maniera analoga si trova, si veda Figura 2.1,

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Non sempre l'intervallo di convergenza della serie è tutto \mathbb{R} ; ad esempio per la serie geometrica (ovvero per la funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$) si ha

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \text{per ogni } x \in (-1, 1).$$

Rimpiazzando x con $-x$ (o x^2) e notando che $|x| < 1$ se e solo se $|-x| < 1$ (rispettivamente $x^2 < 1$), si deduce

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{e} \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (2.3)$$

con insieme di convergenza $(-1, 1)$.

- Analogamente

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1), \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

dove $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, per $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si noti che se $\alpha = n \in \mathbb{N}$, allora

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

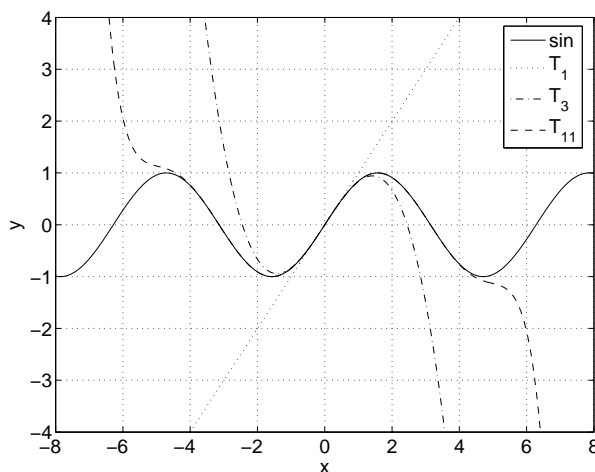


Figura 2.1: Alcuni polinomi di MacLaurin della funzione seno.

Osservazione 2.1.1 Se f è una funzione pari (dispari) allora f' è dispari (pari); inoltre ogni funzione dispari continua si annulla in 0. Di conseguenza se f è una funzione pari di classe C^∞ allora $f'(0) = 0$, f'' è pari, $f'''(0) = 0$ e così via.

In conclusione, supponiamo che f sia sviluppabile in serie di MacLaurin; allora se f è pari (dispari) la serie contiene solo potenze pari (dispari). L'implicazione contraria è ovvia.

Esempio 2.1.2

- La sola condizione $f \in C^\infty$ (senza cioè la (2.1)) non implica la (2.2); in altre parole vi sono funzioni infinitamente derivabili che non sono sviluppabili in serie di Taylor. Consideriamo infatti la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

si veda Figura 2.2. La funzione f è infinitamente derivabile se $x \neq 0$. Per quanto riguarda il punto 0, osserviamo che f è continua in 0; proviamo che f è derivabile in 0 con derivata nulla. Infatti il limite del rapporto incrementale da sinistra è ovviamente nullo, mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} ye^{-y} = 0.$$

In modo analogo si prova che tutte le derivate esistono anche nel punto 0 e $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Pertanto la serie di MacLaurin di f è identicamente nulla, mentre f non lo è: dunque la (2.2) non vale.

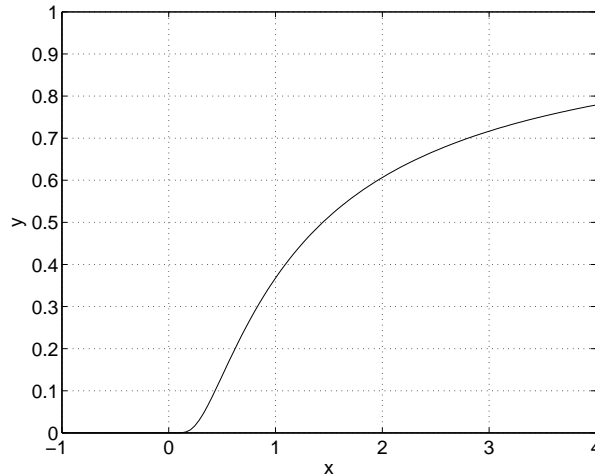


Figura 2.2: La funzione $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ se $x > 0$ e nulla altrove.

Esercizio 2.1.1 Procedendo come si è fatto per dedurre (2.3), scrivere le serie di MacLaurin delle funzioni e^{-x} , e^{-x^2} , $\sin(2x)$. Scrivere inoltre la serie di MacLaurin della funzione $\sqrt{1+x}$, precisandone i coefficienti.

2.2 Serie di potenze reali

In questa sezione consideriamo il caso generale di serie di funzioni potenze, ovvero $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ per un x_0 fissato. Le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (2.4)$$

per $a_n \in \mathbb{R}$, sono dette *serie di potenze di centro x_0* . Per precisione, la scrittura di sopra andrebbe intesa come $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, poiché altrimenti se $x = x_0$ e $n = 0$ non è definita. Per semplicità ci riferiremo sempre all'espressione (2.4).

Ogni serie di Taylor di una funzione f è una serie di potenze in cui

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Qui il punto di partenza sarà rovesciato e non sarà la funzione f , ma una generica serie di potenze della quale studieremo l'insieme di convergenza; come per le serie numeriche, in qualche caso riusciremo a trovare anche la funzione somma f .

Per semplicità ci concentriamo sul caso $x_0 = 0$; l'estensione dei risultati che troveremo al caso generale sarà immediata. Consideriamo perciò d'ora in poi la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Il punto 0 appartiene sempre all'insieme di convergenza, e in tal caso la serie si riduce a a_0 .

Esempio 2.2.1

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. E' la serie di MacLaurin della funzione e^x ; il suo insieme di convergenza è l'insieme $(-\infty, +\infty)$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. E' la serie geometrica: l'insieme di convergenza è $(-1, 1)$, la funzione somma è $\frac{1}{1-x}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$. La successione $n!x^n$ diverge per ogni $x > 0$. Pertanto la serie diverge se $x > 0$ ed è indeterminata se $x < 0$; l'insieme di convergenza si riduce al solo punto 0.

Lemma 2.2.1 (Insieme di convergenza di una serie di potenze) Consideriamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e supponiamo che converga nel punto $\bar{x} \neq 0$. Allora:

- (i) la serie converge in ogni punto x con $|x| < |\bar{x}|$;
(ii) la convergenza è totale in ogni intervallo $[-\rho, \rho]$ con $\rho < |\bar{x}|$.

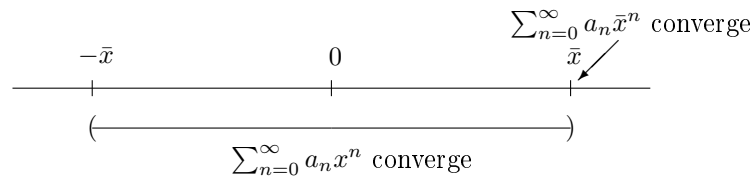


Figura 2.3: Convergenza delle serie di potenze.

Dimostrazione. La serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$ è convergente; perciò la successione $\{a_n \bar{x}^n\}$ è infinitesima, dunque limitata: $|a_n \bar{x}^n| \leq M$. Se $|x| < |\bar{x}|$ si ha

$$|a_n x^n| = |a_n \bar{x}^n| \cdot \left| \frac{x^n}{\bar{x}^n} \right| \leq M q^n$$

con $q = \left| \frac{x}{\bar{x}} \right| < 1$. Pertanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge (assolutamente) per il criterio del confronto per le serie. Questo prova (i). Il punto (ii) si prova nello stesso modo rimpiazzando q con ρ :

$$\max_{x \in [-\rho, \rho]} |a_n x^n| = |a_n| \rho^n = |a_n \bar{x}^n| \left(\frac{\rho}{|\bar{x}|} \right)^n \leq M \bar{q}^n,$$

dove $\bar{q} = \frac{\rho}{|\bar{x}|} < 1$ è il termine generale di una serie geometrica convergente. \square

Osservazione 2.2.1 Conseguenza del punto (i) è che se una serie di potenze *non* converge in un punto \bar{x} allora non potrà convergere in nessun punto x con $|x| \geq |\bar{x}|$. Pertanto *l'insieme di convergenza di una serie di potenze è un intervallo centrato nell'origine* (estremi inclusi o esclusi); esiste perciò $r > 0$ tale che la serie converge in $(-r, r)$ e non converge in $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$. Tale r è detto *raggio di convergenza della serie*; se la serie converge solo nel punto 0 porremo $r = 0$ mentre se converge in tutto \mathbb{R} porremo $r = \infty$.

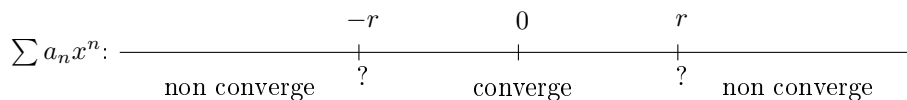


Figura 2.4: Raggio di convergenza delle serie di potenze.

Il seguente teorema dà una regola per il calcolo del raggio di convergenza.

Teorema 2.2.1 (Raggio di convergenza) Consideriamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l. \quad (2.5)$$

Allora

$$r = \frac{1}{l},$$

convenendo che $r = 0$ se $l = \infty$ e $r = \infty$ se $l = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso $0 < l < \infty$; i casi $l = 0$ e $l = \infty$ sono analoghi.

Proviamo dapprima che la serie converge se $|x| < \frac{1}{l}$. Infatti, applicando il criterio della radice alla serie dei valori assoluti,

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} |x| \rightarrow l|x| < 1$$

e dunque la serie converge assolutamente.

Viceversa, sia $|x| > \frac{1}{l}$; fissiamo $0 < \epsilon < l$ in modo che $|x| > \frac{1}{l-\epsilon}$. Si veda la Figura 2.5.

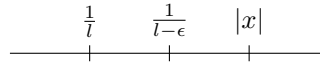


Figura 2.5: Scelta di ϵ .

Per definizione di limite si ha che $(l - \epsilon)^n < |a_n| < (l + \epsilon)^n$ definitivamente, dunque $|a_n x^n| > 1$ definitivamente; pertanto la serie non può convergere. \square

Osservazione 2.2.2

- Si può provare che il Teorema 2.2.1 resta ancora valido rimpiazzando la (2.5) con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \doteq l, \quad (2.6)$$

utilizzando nella dimostrazione il criterio del rapporto invece che quello della radice.

- Dal Lemma 2.2.1 si deduce che una serie di potenze converge totalmente in ogni intervallo $[-\rho, \rho]$ con $\rho < r$.

Il Teorema 2.2.1 non dà informazioni sulla convergenza della serie di potenze nei punti $\pm r$; questo dovrà essere verificato caso per caso.

Esempio 2.2.2 Le serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ hanno tutte raggio di convergenza 1 (in quanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$) ma il loro insieme di convergenza è rispettivamente $(-1, 1)$, $[-1, 1)$, $[-1, 1]$.

Esempio 2.2.3

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2 3^n}$. Applicando (2.5) si trova

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)^2 3^n}} = \frac{1}{3}.$$

Dunque $r = 3$ e la serie converge certamente in $(-3, 3)$; nel punto 3 essa si riduce alla serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, convergente, mentre nel punto -3 diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ che converge assolutamente. Dunque l'insieme di convergenza è l'intervallo $[-3, 3]$.

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$. Applicando (2.6) bisogna calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log(n+1)}.$$

Per calcolare questo limite consideriamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\log(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$, applicando la regola di de L'Hopital; pertanto anche il precedente limite di successione vale 1 (caratterizzazione dei limiti di funzioni tramite i limiti di successioni), dunque $r = 1$. Nel punto 1 si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

mentre nel punto -1 la serie converge per il criterio di Leibniz. L'insieme di convergenza è dunque l'intervallo $[-1, 1)$.

Vediamo ora come si applica il Teorema 1.3.1 alle serie di potenze. Per quanto riguarda l'integrazione della funzione somma diamo il risultato in forma di integrale indefinito, più comodo per l'uso nelle applicazioni.

Teorema 2.2.2 (Proprietà delle serie di potenze) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze, $r > 0$ il suo raggio di convergenza, f la sua funzione somma. Allora

(i) $f \in C^\infty(-r, r)$ e la sua derivata n -esima si calcola derivando n -volte termine a termine la serie; in particolare per ogni $x \in (-r, r)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}; \quad (2.7)$$

(ii) una primitiva della funzione f si ottiene integrando la serie termine a termine: per ogni $x \in (-r, r)$ si ha

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + c \quad (2.8)$$

per una arbitraria costante $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Dal Lemma 2.2.1 e dal Teorema 1.3.1, (i), segue che f è continua in ogni intervallo $[-\rho, \rho]$, per $0 < \rho < r$. Per l'arbitrarietà di ρ la funzione f è continua in $(-r, r)$.

Per semplicità dimostriamo il punto (i) sotto l'ulteriore ipotesi che esista il limite in (2.5). Consideriamo allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ delle derivate prime e dimostriamo che il suo raggio di convergenza è r . Ciò è equivalente a dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$, ottenuta dalla precedente moltiplicandola per x , ha raggio di convergenza r e questo segue da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = l.$$

Per il Lemma 2.2.1 la serie delle derivate converge totalmente in ogni intervallo $[-\rho, \rho]$; per il Teorema 1.3.1, (iii), si ha $f \in C^1([-\rho, \rho])$ e vale la (2.7) in $[-\rho, \rho]$. Per l'arbitrarietà di ρ segue che $f \in C^1(-r, r)$ e la (2.7) vale in $(-r, r)$. Il procedimento si itera quindi per le derivate di ordine maggiore di 1.

Per provare (ii) fissiamo x_0 e x in $(-r, r)$; come sopra, entrambi sono contenuti in un qualche intervallo $[-\rho, \rho]$, in cui la convergenza della serie è totale. Dal Teorema 1.3.1, (ii) segue

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x^{n+1} - x_0^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} - c_0.$$

Infatti la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1}$ è convergente e la sua somma c_0 non dipende da x ; l'integrale a sinistra è invece la funzione integrale relativa al punto x_0 , dalla quale ogni primitiva nell'intervallo $(-r, r)$ differisce per una costante (Teorema fondamentale del calcolo integrale). Si ha pertanto la formula (2.8). \square

Il risultato precedente, sfruttando in maniera essenziale la convergenza totale delle serie di potenze, mostra la loro grande maneggevolezza: l'integrazione o la derivazione della funzione somma è ridotta all'analoga operazione per i termini (monomi!) della serie. Ma proprio la convergenza totale impone un grosso limite di applicabilità: le funzioni somma che si considerano devono essere almeno di classe C^∞ .

Esempio 2.2.4 Numerosi risultati già ottenuti per le serie di MacLaurin possono essere facilmente ottenuti tramite il Teorema 2.2.2. Ad esempio, integrando le espressioni in (2.3), si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \\ \operatorname{arctg} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \end{aligned}$$

sempre con raggio di convergenza 1. In entrambi i casi la costante di integrazione è 0; infatti i termini di destra coincidono con quelli di sinistra se poniamo $x = 0$ (e sono entrambi nulli).

Esempio 2.2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Il raggio di convergenza è 1 e nei punti ± 1 la serie non converge; dunque l'insieme di convergenza è l'intervallo $(-1, 1)$. Per cercarne la funzione somma f notiamo che

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Osservazione 2.2.3 Il caso di serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ centrate in un punto x_0 si riduce facilmente al caso precedente ponendo $y = x - x_0$. In particolare l'insieme di convergenza è un intervallo di centro x_0 ; il raggio di convergenza può essere calcolato tramite la (2.5) o la (2.6).

Esempio 2.2.6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n+3}$. Si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n+3}} = \frac{1}{2}$$

e dunque $r = 2$; la serie converge certamente in $(-1, 3)$. Nel punto 3 essa diverge mentre in -1 è indeterminata. Pertanto l'insieme di convergenza è l'intervallo $(-1, 3)$.

Osservazione 2.2.4 Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze, f la sua funzione somma. Allora $f(0) = a_0$; inoltre dalla (2.7) segue $f'(0) = a_1$ e, iterando tale formula, $f^{(n)}(0) = n!a_n$, ovvero $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. In altri termini la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è proprio la serie di MacLaurin della funzione f . Per le serie di centro x_0 si ragiona analogamente, ritrovando la serie di Taylor di centro x_0 di f .

2.3 Serie di potenze complesse

Una serie di potenze complessa è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{2.9}$$

dove $c_n = a_n + ib_n$ e $z = x + iy$ sono numeri complessi. La serie (2.9) converge nel punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se la serie numerica a z_0 fissato converge nel senso della sezione 1.1; analogamente si definisce la convergenza totale. Per queste serie si dimostrano risultati analoghi a quelli già dimostrati per le serie di potenze reali; in luogo di un intervallo di convergenza avremo un *cerchio di convergenza*. All'interno del cerchio di convergenza la serie converge mentre al di fuori non converge; nei punti della circonferenza la serie può convergere o meno.

Vediamo una prima semplice applicazione delle serie numeriche complesse. Dalla serie geometrica abbiamo visto che

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Nonostante la funzione a sinistra sia di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ (in particolare il denominatore non si annulla mai), la serie converge con raggio di convergenza 1, e dunque l'espressione qui sopra ha senso solo per $x \in (-1, 1)$. *Perché?*

La ragione di questo fenomeno può essere compresa passando nel complesso. Scriviamo z al posto di x e notiamo che

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1+iz)(1-iz)}.$$

Pertanto, mentre la funzione di variabile reale $\frac{1}{1+x^2}$ è definita in tutto \mathbb{R} , la sua estensione al piano complesso non è definita nei punti $\pm i$. Di conseguenza la serie di potenze complessa relativa a $\frac{1}{1+z^2}$ potrà convergere al più con raggio di convergenza 1, e dunque sull'asse reale al più nell'intervallo $(-1, 1)$.

Un seconda applicazione riguarda la funzione esponenziale complessa e le formule di Eulero. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge in modulo in \mathbb{C} ; si definisce funzione *esponenziale complessa* la sua funzione somma, ovvero

$$e^z \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{2.10}$$

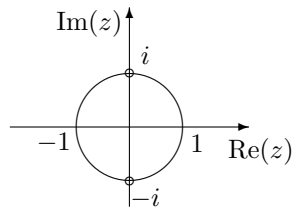


Figura 2.6: Convergenza delle serie di potenze complesse.

Si può provare che la funzione complessa e^z gode di proprietà analoghe a quella della funzione esponenziale reale e^x , ed in particolare $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$. Scrivendo $z = x + iy$ questo implica in particolare che $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Inoltre, posto $z = iy$ in (2.10) e sommando separatamente sugli indici pari e dispari si ricava

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

La formula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

è detta *formula di Eulero*. Poiché la funzione seno è dispari, si ottiene $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$; dunque, sommando e sottraendo le due formule,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Queste formule sono frequentemente usate per la rappresentazione dei numeri complessi: ad esempio $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$.

Capitolo 3

Serie trigonometriche e di Fourier

In questo capitolo analizzeremo un secondo tipo particolare di serie di funzioni: le serie trigonometriche. Esse saranno particolarmente utili nello studio di funzioni periodiche.

3.1 Funzioni periodiche

In questa sottosezione ricordiamo alcuni fatti essenziali sulle funzioni periodiche.

Definizione 3.1.1 Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta periodica di periodo T (o T -periodica) se per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$f(x + T) = f(x). \quad (3.1)$$

Osservazione 3.1.1

- Il periodo di una funzione non è unico: ad esempio $2T, 3T, -T$ sono periodi per la funzione f . Infatti, ad esempio,

$$f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x).$$

Nel seguito per *periodo* intenderemo però sempre il *più piccolo T positivo* per cui vale (3.1).

- Per definire una funzione T -periodica è sufficiente assegnarla in un qualsiasi intervallo $[a, a+T)$ di ampiezza T , e poi usare la (3.1) per prolungarla a tutto \mathbb{R} ; di solito si sceglie come intervallo $[0, T)$ o $[-T/2, T/2)$.

Esempio 3.1.1 Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono 2π -periodiche, le funzioni $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ sono $\frac{2\pi}{n}$ -periodiche; la funzione $\{x\} = x - [x]$ parte frazionaria di x è periodica di periodo 1 ($[x]$ è la funzione parte intera di x).

Esercizio 3.1.1 Calcolare il periodo e disegnare il grafico delle funzioni $\sin(\frac{\pi}{2}[x])$, $[|\cos x|]$.

Risposta. 4, π .

Definizione 3.1.2 Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta

- (i) continua a tratti in $[a, b)$ se è continua in $[a, b)$ tranne al più in un numero finito di punti x_1, x_2, \dots, x_m , nei quali però esistono finiti i limiti destro e sinistro;
- (ii) C^1 a tratti in $[a, b)$ se è continua a tratti e ha derivata continua in $[a, b) \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ tranne al più in un numero finito di punti y_1, y_2, \dots, y_n ; inoltre f' è limitata;
- (iii) C^1 a tratti in \mathbb{R} se è C^1 a tratti in ogni intervallo $[a, b) \subset \mathbb{R}$.

Esempio 3.1.2 Le funzioni $\{x\}$ e $[x]$ sono C^1 a tratti in \mathbb{R} .

Le funzioni $[\frac{1}{x}]$ e $[|\sin(\frac{1}{x})|]$ non sono continue a tratti in $(0, 1]$: hanno infiniti punti di discontinuità in $(0, 1]$.

La funzione $\arcsin x$ non è C^1 a tratti: è continua in $[-1, 1]$, derivabile in $(-1, 1)$ ma la derivata non è limitata; analogamente la funzione $\sqrt{|x|}$ è continua in \mathbb{R} , derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma la derivata non è limitata.

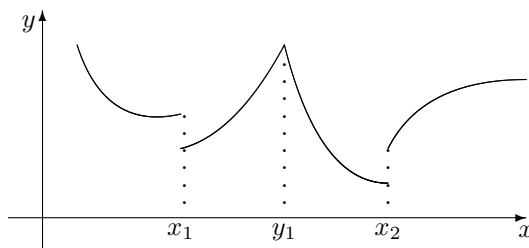


Figura 3.1: Grafico di una funzione C^1 a tratti.

Lemma 3.1.1 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione T -periodica e continua a tratti; allora il suo integrale definito è lo stesso su un qualsiasi intervallo di lunghezza T , cioè per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Dimostrazione. Ogni funzione f continua a tratti è integrabile secondo Riemann; inoltre, si veda la Figura 3.2,

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx - \int_0^a f(x) dx.$$

Facendo la sostituzione $x = y + T$ il secondo integrale si annulla col terzo. \square

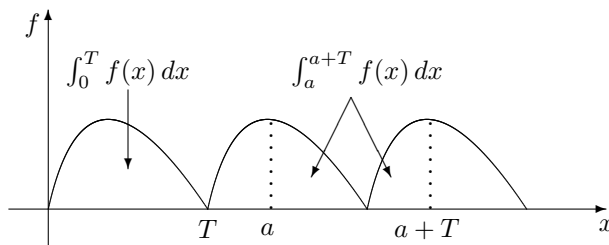


Figura 3.2: Integrale di una funzione periodica.

3.2 Serie trigonometriche

Una serie trigonometrica è una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(\omega kx) + b_k \sin(\omega kx)) \quad (3.2)$$

dove $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$ e $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è una costante. Sia

$$f_k(x) = a_k \cos(\omega kx) + b_k \sin(\omega kx).$$

Allora $f_0(x) = a_0$ è costante, mentre per $k \geq 1$ la funzione f_k è $\frac{2\pi}{\omega k}$ -periodica; all'aumentare di k le oscillazioni delle funzioni f_k aumentano. Si noti che per $k \geq 1$ i periodi $\frac{2\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{2\omega}, \frac{2\pi}{3\omega}, \dots$ hanno tutti il primo, $\frac{2\pi}{\omega}$, come multiplo intero; pertanto le funzioni f_k sono tutte periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ nel senso della Definizione 3.1.1. Di conseguenza, se la serie converge la funzione somma sarà periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$; in particolare se $\omega = 1$ allora $T = 2\pi$.

Per queste serie di funzioni si pongono problemi analoghi a quelli già affrontati per le serie di potenze:

- (i) dati i coefficienti a_k, b_k , sotto quali ipotesi la serie converge?
- (ii) data una funzione periodica f , come determinare i coefficienti a_k, b_k in modo che la serie relativa converga a f ?

Nel caso (ii) chiameremo *serie di Fourier di f* la serie trigonometrica che converge a f (analogamente alla serie di Taylor nel caso delle serie di potenze). Nel seguito di questa sottosezione faremo alcune considerazioni generali sulle serie trigonometriche, lasciando lo studio delle serie di Fourier alla successiva.

Osservazione 3.2.1 Si ha $|a_k \cos(\omega kx) + b_k \sin(\omega kx)| \leq |a_k| + |b_k|$; se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ è convergente, allora la serie (3.2) converge totalmente ad una funzione continua.

Un altro criterio di convergenza, analogo al criterio di Leibniz per le serie numeriche a termini di segno alterno, è il seguente; non ne diamo la dimostrazione.

Teorema 3.2.1 (Dirichlet) Consideriamo la serie trigonometrica (3.2); supponiamo che $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$ e che le successioni $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ siano decrescenti e infinitesime.

Allora la serie (3.2) converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ ad eccezione al più dei punti $\frac{2m\pi}{\omega}$, $m \in \mathbb{Z}$.

In generale la convergenza garantita dal Teorema 3.2.1 non sarà totale e la funzione somma non necessariamente continua. Si noti che nei punti $\frac{2m\pi}{\omega}$ la serie (3.2) si riduce alla serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Esempio 3.2.1

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$. Si ha $\left| \frac{\sin(kx)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$ e dunque la serie converge totalmente in \mathbb{R} .
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$. In questo caso $\left| \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{1}{k}$ ma la serie armonica diverge. Si applica invece il criterio di Dirichlet con $a_k = 0$, $b_k = \frac{1}{k}$; siccome nei punti $2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, la serie è nulla, la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3.3 Serie di Fourier

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione T -periodica e facciamo vedere come determinare i coefficienti a_k , b_k della serie in (3.2) in modo che f ne sia la somma. Per fissare le idee supponiamo $T = 2\pi$ in modo che $\omega = 1$ e consideriamo dunque

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx). \quad (3.3)$$

Qui sopra abbiamo messo in evidenza il primo termine della serie, non oscillante, e lo abbiamo scritto come $\frac{a_0}{2}$ (invece di a_0); vedremo tra poco il perché di questa notazione. Prima di continuare abbiamo bisogno di un semplice risultato. Ricordiamo che $\delta_{km} = 1$ se $k = m$ e 0 se $k \neq m$ ¹.

Lemma 3.3.1 (Ortonormalità) Siano $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$; allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(mx) dx &= \delta_{km} \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(mx) dx &= 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(mx) dx &= \delta_{km}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. La seconda formula è evidente in quanto la funzione integranda è dispari. La prima e la terza si deducono dalle formule di Werner

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Ad esempio, notando che entrambe le funzioni integrande sono pari,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(mx) dx = \int_0^{\pi} [\cos((k+m)x) + \cos((k-m)x)] dx.$$

Se $k \neq m$ allora $k \pm m \neq 0$ e il termine di destra è nullo; se invece $k = m$ l'integrale del primo addendo a destra è nullo mentre quello del secondo vale π . \square

¹Questo δ_{km} è detto *delta di Kronecker*, che non c'entra nulla con la distribuzione *delta di Dirac*, indicata pure con δ , che verrà introdotta nell'Esempio 6.2.4.

Ritorniamo alla (3.3): fissiamo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, moltiplichiamo entrambi i membri per $\cos(mx)$ e integriamo tra $-\pi$ e π :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(mx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \cos(mx) + b_k \sin(kx) \cos(mx) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Supponiamo che la serie converga totalmente, in modo che possiamo scambiare i segni di integrale e somma a destra; per il Lemma 3.3.1 tutti i termini a destra si annullano ad eccezione di quello relativo al prodotto $\cos(kx) \cos(mx)$ quando $k = m$. Pertanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \pi a_m.$$

Si noti che questa formula vale anche nel caso $m = 0$; in questo caso l'unico termine non nullo a destra nella (3.4) è il primo. Questo spiega il perché della notazione $\frac{a_0}{2}$ invece di a_0 . In conclusione

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

In maniera analoga, moltiplicando (3.3) per $\sin(mx)$, si trova

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Nel caso generale di una funzione T -periodica f la *serie di Fourier di f* è

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega k x) + b_k \sin(\omega k x) \quad (3.5)$$

dove i *coefficienti di Fourier* a_k, b_k sono definiti per $\omega = \frac{2\pi}{T}$ da

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(\omega k x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(\omega k x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

La convergenza di una serie di Fourier è precisata dal seguente risultato, di cui non diamo la dimostrazione.

Teorema 3.3.1 (Convergenza delle serie di Fourier) *Consideriamo una funzione T -periodica e C^1 a tratti $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora:*

- (i) *la serie di Fourier (3.5) converge a $f(x)$ nei punti in cui f è continua, mentre nei punti di discontinuità essa converge alla media $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ dei limiti destro e sinistro;*
- (ii) *se inoltre f è continua la convergenza della serie è totale.*

Il Teorema 3.3.1 asserisce pertanto che, sotto le ipotesi fatte, la serie di Fourier della funzione f converge puntualmente in tutto \mathbb{R} ; si confronti con il Teorema 3.2.1. Poiché la serie nel generico punto x non converge necessariamente al valore $f(x)$ scriveremo

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega k x) + b_k \sin(\omega k x). \quad (3.8)$$

Si noti che il punto (ii) del Teorema 3.3.1 giustifica in parte l'ipotesi di convergenza totale che ci ha permesso di dedurre formalmente i coefficienti di Fourier scambiando gli integrali con le somme.

Osservazione 3.3.1

- Per il Lemma 3.1.1 gli integrali in (3.6), (3.7) possono essere calcolati nell'intervallo $[0, T]$.

- Dalla (3.6) con $k = 0$ segue che

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

Pertanto il termine non oscillante della serie di Fourier di f è la *media integrale* $M(f)$ di f nell'intervallo $[0, T]$.

- Se f è *pari* ogni prodotto $f(x) \sin(\omega k x)$ è una funzione dispari e dunque $b_k = 0$ per ogni $k = 1, 2, \dots$: la funzione f si sviluppa in una serie di soli coseni (funzioni pari). Analogamente se f è *dispari* allora $a_k = 0$ per $k = 0, 1, 2, \dots$: la funzione f si sviluppa in una serie di soli seni (funzioni dispari). Si confronti con l'Osservazione 2.1.1. Perciò: *una funzione pari (dispari) si sviluppa in una serie di soli coseni (seni)*.

Lo stesso risultato vale per funzioni che in ogni intervallo simmetrico rispetto all'origine, estremi al più esclusi, e limitato siano pari (dispari) ad eccezione di un numero finito di punti: l'integrale non tiene conto di tali punti. Per brevità chiameremo ancora pari (dispari) queste funzioni.

- Se f è pari (dispari) allora ogni prodotto $f(x) \cos(\omega k x)$ (risp. $f(x) \sin(\omega k x)$) è una funzione pari e dunque (al solito $k = 0, 1, 2, \dots$ per gli a_k e $k = 1, 2, \dots$ per i b_k)

$$\begin{aligned} f \text{ pari} & : a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(\omega k x) dx, \quad b_k = 0, \\ f \text{ dispari} & : a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(\omega k x) dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Negli esempi seguenti si farà spesso uso della formula

$$\cos(k\pi) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Esempio 3.3.1

- Sia $f(x) = x$ in $[-\pi, \pi)$ e poi estesa a \mathbb{R} per periodicità, si veda la Figura 3.3. Allora $T = 2\pi$, $\omega = 1$; la funzione è dispari (ad eccezione dei punti $\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$, si veda l'Osservazione 3.3.1), dunque $a_k = 0$ per $k = 0, 1, 2, \dots$. Inoltre, integrando per parti,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k \pi}{k} = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$f(x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx).$$

La serie converge a $f(x)$ tranne nei punti $(2m+1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, in cui converge alla media 0 dei limiti destro e sinistro di f .

- Sia $f(x) = x^2$ in $[-\pi, \pi)$ e poi estesa a \mathbb{R} per periodicità. Di nuovo $T = 2\pi$, $\omega = 1$; la funzione è pari. Per $k \geq 1$ si ha, integrando due volte per parti (o integrando una sola volta e ricordando l'esempio qui sopra),

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{x^2 \sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx \right\} = (-1)^k \frac{4}{k^2}.$$

Inoltre

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Perciò

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

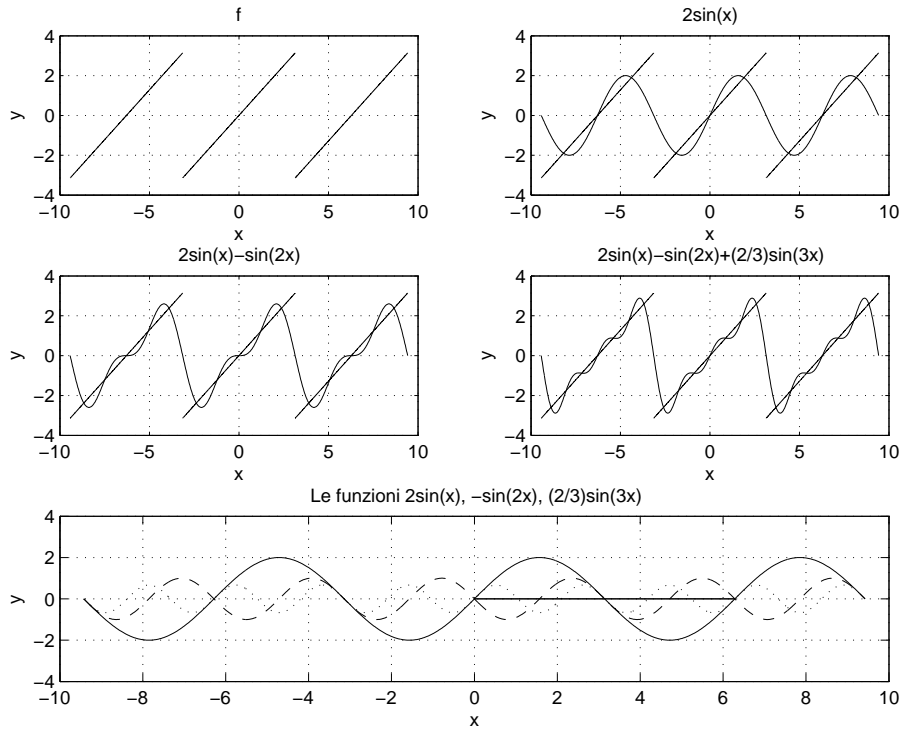


Figura 3.3: Approssimazioni successive della funzione $f(x) = x$ in $[-\pi, \pi)$ e poi estesa per periodicità.

dove abbiamo scritto il segno di uguaglianza in quanto f è continua e dunque la serie converge a $f(x)$ in ogni punto $x \in \mathbb{R}$; di più, la convergenza a f è totale. In particolare se calcoliamo questa espressione in π troviamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- $f(x) = e^x$ in $[-\pi, \pi)$ e poi estesa per periodicità a \mathbb{R} . La funzione f non è né pari né dispari; integrando due volte per parti si trovano facilmente i coefficienti di Fourier, da cui

$$f(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} + 2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{1+k^2} \cos(kx) + \frac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2} \sin(kx) \right).$$

Ogni funzione f definita in un intervallo simmetrico rispetto all'origine si può scrivere come la somma di una funzione pari e di una dispari:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \doteq p(x) + d(x).$$

Per linearità la parte pari (relativa ai coefficienti a_k) della serie di Fourier di f darà la serie di Fourier di p , la parte dispari (relativa ai coefficienti b_k) quella di d .

Nel caso della funzione e^x si ha $e^x = \cosh x + \sinh x$; da sopra segue che

$$p(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + 2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} \cos(kx), \quad d(x) = 2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2} \sin(kx).$$

Esempio 3.3.2 Si scrivano le serie di Fourier delle funzioni definite qui sotto negli intervalli indicati e poi estese per periodicità a \mathbb{R} :

- $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ in $[0, 2\pi)$;
- $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ 1 & \text{se } x \in [0, \pi) \end{cases}$ (onda quadra);

- $h(x) = x(2\pi - x)$, in $[0, 2\pi)$;
- $l(x) = |x|$ in $[-\pi, \pi)$.

Si trova senza difficoltà che:

- f è dispari, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$;
- g è dispari, $g(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$;
- h è pari, $h(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$, la convergenza è totale in quanto h è continua;
- l è pari,

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ è dispari,} \end{cases} \quad k \geq 1,$$

$$l(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}, \text{ la convergenza è totale.}$$

Osservazione 3.3.2 Sia $f(x) = \pi + x$ in $[0, 2\pi)$ e poi prolungata per periodicità. La funzione f non è né pari né dispari; un calcolo immediato fa vedere che $a_k = 0$ per ogni $k \geq 1$ e, in conclusione, $f(x) \sim \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$. Il fatto che tutti gli a_k con $k \geq 1$ siano nulli dipende dal fatto che f non è dispari ma $g(x) = f(x) - \pi$ lo è.

Supponiamo infatti, più in generale, che f sia una funzione T -periodica tale che $g(x) = f(x) - c$ sia dispari, per un numero reale $c \neq 0$. Chiaramente f non è dispari. La funzione g , anch'essa T -periodica, avrà uno sviluppo di Fourier del tipo

$$g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k(g) \sin(\omega k x),$$

dove i $b_k(g)$ sono i coefficienti di Fourier di g . Ma allora, indicati con $b_k(f)$ gli analoghi coefficienti di Fourier di f ,

$$\begin{aligned} b_k(g) &= \frac{2}{T} \int_0^T g(x) \sin(\omega k x) dx = \frac{2}{T} \int_0^T (f(x) - c) \sin(\omega k x) dx \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\omega k x) dx - \frac{2c}{T} \int_0^T \sin(\omega k x) dx \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\omega k x) dx = b_k(f), \end{aligned} \quad (3.10)$$

in quanto l'integrale a destra in (3.10) è nullo (le funzioni $\cos(\omega k x)$ e $\sin(\omega k x)$ hanno media integrale nulla in $[0, T)$). In conclusione

$$f(x) = g(x) + c \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k(g) \sin(\omega k x) + c = c + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \sin(\omega k x).$$

Esercizio 3.3.1 Si scrivano le serie di Fourier delle funzioni definite qui sotto negli intervalli indicati e poi estese per periodicità a \mathbb{R} :

- $f(x) = \{x\}$ in $[0, 1)$;
- $g(x) = |x|$ in $[-1, 1)$;
- $h(x) = [x]$ in $[0, 3)$;

Risposta. Le funzioni hanno periodi rispettivamente $T = 1$, $T = 2$, $T = 3$; si usi (3.8) con $\omega = 2\pi$, $\omega = \pi$, $\omega = \frac{2}{3}\pi$; per la prima e la terza notare che $a_k = 0$ per $k \geq 1$ segue dal fatto che $f(x) - \frac{1}{2}$ e $h(x) - 1$ sono dispari (vedi Osservazione 3.3.2).

3.4 Complementi alla teoria delle serie di Fourier

Raccogliamo in questa sezione alcune osservazioni e risultati relativi alle serie di Fourier.

Osservazione 3.4.1 (Fenomeno di Gibbs) Nel caso di una funzione discontinua in un punto x_0 , l'approssimazione con somme parziali trigonometriche $s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(\omega kx) + b_k \sin(\omega kx)$ presenta un picco la cui ascissa tende al punto di discontinuità per $n \rightarrow \infty$; tuttavia l'altezza di tale picco non diminuisce, ed è pari a circa $1/10$ del salto della funzione in tale punto. Si tratta del *fenomeno di Gibbs*; si veda la Figura 3.4 e, per maggiori informazioni, [8].

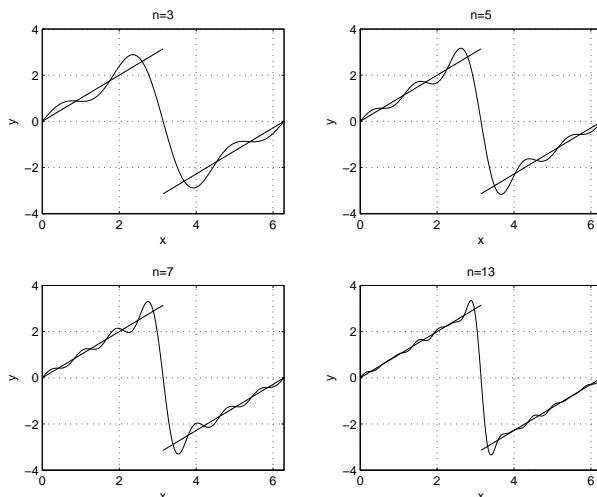


Figura 3.4: Il fenomeno di Gibbs; in figura la funzione $f(x) = x$ in $[-\pi, \pi)$ e poi estesa a \mathbb{R} per periodicità e alcune somme parziali della relativa serie di Fourier.

Osservazione 3.4.2 (Interpretazione acustica delle serie di Fourier) Nello studio di fenomeni acustici la variabile indipendente è il tempo t e $f(t)$ rappresenta l'ampiezza del suono al tempo t . I suoni *semplici*, ad esempio quello prodotto da un diapason, hanno una sola frequenza ν (440 Hz per un diapason); in tal caso $f(t) = A \cos(\omega t)$ o $f(t) = A \sin(\omega t)$, per $\omega = 2\pi\nu$, rappresenta lo spostamento di un rebbio di un diapason ideale dalla posizione di quiete; A è l'ampiezza massima dell'oscillazione. Il moto è assimilato a quello di un pendolo.

Il suono di una corda di chitarra non è semplice (benché ne percepiamo una singola frequenza) ma *complesso*: la corda, diversamente dal diapason, può oscillare in modi diversi e ad ognuno di essi è associata una frequenza. Tali frequenze (*armoniche*) sono multiple della più bassa (*armonica fondamentale*); la somma delle vibrazioni semplici è rappresentata da una espressione analoga a (3.8) con t al posto di x , e si dà il nome di armoniche anche alle componenti $a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)$. Pertanto la seconda armonica ha frequenza doppia della fondamentale, la terza tripla e così via. Ad esempio, a un Do_1 fondamentale sono associate le armoniche $\text{Do}_1, \text{Do}_2, \text{Sol}_2, \text{Do}_3, \text{Mi}_3, \dots$ corrispondenti, rispetto alla fondamentale, a un'ottava sopra, un'ottava e una quinta, due ottave, due ottave e una terza...

Tralasciamo per brevità l'integrazione e la derivazione termine a termine delle serie di Fourier; per questo argomento si veda [5, 11].

Enunciamo ora un risultato importante relativo alle serie di Fourier senza darne la dimostrazione.

Teorema 3.4.1 (Identità di Parseval) Sia f una funzione T -periodica e integrabile in $[0, T]$. Allora

$$\frac{2}{T} \int_0^T f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \quad (3.11)$$

La formula (3.11) è detta *identità di Parseval*; naturalmente essa vale anche rimpiazzando l'integrale in $[0, T]$ con l'integrale in $[-T/2, T/2]$. Essa ha numerose implicazioni; ne citiamo brevemente qui sotto alcune.

Si noti intanto che poiché f è integrabile secondo Riemann in $[0, T]$ lo stesso vale per f^2 , e dunque l'integrale a sinistra in (3.11) è convergente. Le ipotesi fatte sulla funzione f sono talmente deboli che non garantiscono neanche la convergenza della serie di Fourier.

Osservazione 3.4.3 (Analogia con la rappresentazione vettoriale) Diamo ora una lettura di quanto visto finora a proposito delle serie di Fourier in termini di rappresentazione vettoriale.

Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n . Ricordiamo che n vettori e_1, e_2, \dots, e_n formano una *base ortonormale* se sono perpendicolari tra di loro (*orto*) e di lunghezza unitaria (*normali*). Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ può essere scritto tramite gli elementi di questa base con coefficienti v_k :

$$v = \sum_{k=1}^n v_k e_k, \quad v_k = \langle v, e_k \rangle, \quad |v|^2 = \langle v, v \rangle = \sum_{k=1}^n v_k^2, \quad (3.12)$$

dove $\langle \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare: se $v = \sum_{k=1}^n v_k e_k$ e $w = \sum_{k=1}^n w_k e_k$ di \mathbb{R}^n allora

$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^n v_k w_k. \quad (3.13)$$

In termini di prodotto scalare l'ortonormalità della base si traduce in

$$\langle e_k, e_m \rangle = \delta_{km}. \quad (3.14)$$

Premesso questo, ritorniamo alle serie di Fourier. Definiamo un prodotto scalare tra funzioni f e g in $[-T/2, T/2]$ tramite

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)g(x) dx. \quad (3.15)$$

Formalmente la (3.15) è simile alla (3.13): abbiamo le funzioni f, g al posto dei vettori v, w , il prodotto dei valori delle funzioni in uno stesso punto al posto del prodotto delle componenti omologhe, l'integrale sui punti invece della somma sulle componenti. Il lemma (3.3.1) si estende facilmente al caso generale col cambiamento di variabili $x = \omega y$ e si può allora enunciare dicendo che le funzioni

$$C_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_k(x) = \cos(\omega k x), \quad S_k(x) = \sin(\omega k x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

sono *ortonormali* rispetto a tale prodotto scalare. I coefficienti associati a tale base sono

$$\langle f, C_0 \rangle = \frac{a_0}{\sqrt{2}}, \quad \langle f, C_k \rangle = a_k, \quad \langle f, S_k \rangle = b_k.$$

Pertanto la (3.8), si scrive

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k x) + b_k \sin(\omega k x)) \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot C_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot C_k(x) + b_k \cdot S_k(x)) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Rispetto a (3.12), in (3.17) abbiamo funzioni al posto di vettori e una base costituita da infiniti elementi. In questa analogia l'identità di Parseval

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

traduce l'identità a destra in (3.12); infatti:

$$\langle f, f \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

A titolo riassuntivo riepiloghiamo nella tabella seguente le analogie che abbiamo incontrato tra la rappresentazione di un vettore tramite gli elementi di una base ortonormale e quella di una funzione (di periodo 2π) tramite una serie di Fourier.

	v vettore	f funzione
base	$e_i, i = 1, 2, \dots, n$	$C_0(x), C_k(x), S_k(x), k = 1, 2, \dots$
coefficienti	$v_i = \langle v, e_i \rangle$	$\langle f, C_k \rangle, \langle f, S_k \rangle$
prodotto scalare	$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$	$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)g(x) dx$
rappresentazione	$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$	$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} C_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k C_k(x) + b_k S_k(x))$
modulo-norma	$\ v\ = \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^n v_i^2$	$\langle f, f \rangle = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$

Osservazione 3.4.4 (Interpretazione fisica dell'identità di Parseval) Una notevole interpretazione fisica dell'identità di Parseval (legata alla precedente Osservazione 3.4.3) riguarda la teoria dei segnali (acustici, elettromagnetici) periodici. In questo caso $f(t)$ rappresenta l'ampiezza al tempo t del segnale e la sua *energia* è definita da

$$E(f) \doteq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt,$$

cioè la media integrale della funzione f^2 . Sviluppata f in serie di Fourier si verifica subito, ricordando il Lemma 3.3.1, che

$$E_0(f) \doteq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{a_0}{2} \right]^2 dt = \frac{a_0^2}{4},$$

$$E_k(f) \doteq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [a_k \cos(\omega kt) + b_k \sin(\omega kt)]^2 dt = \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}, \quad \text{per } k = 1, 2, \dots,$$

in quanto

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(\omega kt) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(\omega kt) dt = 1.$$

L'identità di Parseval si riscrive allora

$$E(f) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(f).$$

In altri termini, *l'energia del segnale f è la somma della energie delle sue armoniche f_k .*

Il Teorema 3.4.1 ha inoltre la seguente notevole conseguenza.

Corollario 3.4.1 (Riemann-Lebesgue) *Se f è una funzione integrabile in $[0, T]$ allora*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T f(x) \cos(\omega kx) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T f(x) \sin(\omega kx) dx = 0.$$

Dimostrazione. A meno di modificare il valore della f nel punto T possiamo estendere la funzione f ad una funzione T -periodica in \mathbb{R} . Vale allora l'identità di Parseval: poiché il termine di sinistra in (3.11) è finito ne segue che la somma a destra converge, dunque il termine generale $a_k^2 + b_k^2$ tende a zero. Di conseguenza $a_k, b_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, cioè quanto si voleva dimostrare. \square

Esempio 3.4.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^x \cos(nx) dx = 0$. Questo segue immediatamente dal Corollario 3.4.1 con $f(x) = e^x$. Il calcolo diretto dell'integrale è possibile integrando due volte per parti; si trova $\int_0^{2\pi} e^x \cos(nx) dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{n^2}$, che ridà quanto provato sopra.

Osservazione 3.4.5 Il Corollario 3.4.1 prova dunque che i coefficienti di Fourier di una funzione f (anche solamente integrabile) sono infinitesimi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$

Pertanto, in modo impreciso, l'approssimazione di una funzione periodica con somme parziali di una serie di Fourier avviene aggiungendo addendi che oscillano sempre più rapidamente e hanno ampiezza sempre più piccola.

3.5 Sviluppi trigonometrici di una funzione definita in un intervallo

Vediamo ora come si possono utilizzare gli sviluppi in serie di Fourier per approssimare funzioni definite in intervalli limitati. Sia f una funzione definita in un intervallo chiuso e limitato; a meno di sostituire $f(x)$ con una sua traslata $f(x+c)$ possiamo supporre $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ per un qualche $L > 0$. La funzione f può essere prolungata all'intervallo $(-L, L]$ in modo pari o dispari:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ f(-x) & \text{se } x \in (-L, 0), \end{cases} \quad f_d(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ -f(-x) & \text{se } x \in (-L, 0). \end{cases}$$

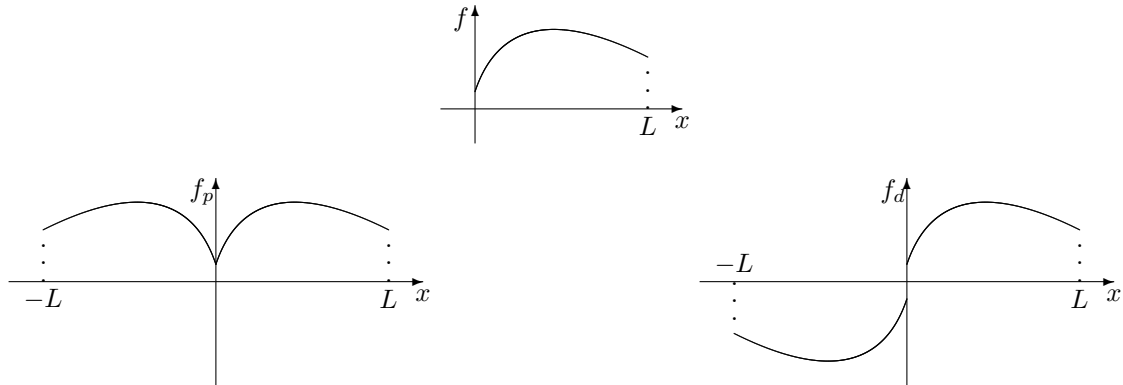


Figura 3.5: Prolungamento pari o dispari di una funzione.

Ognuna di queste funzioni può in seguito essere estesa a tutto \mathbb{R} per periodicità (periodo $T = 2L$, $\omega = \frac{\pi}{L}$). Se le loro serie di Fourier sono convergenti, entrambe approssimeranno in particolare f nell'intervallo $[0, L]$. Pertanto potremo sviluppare f in uno dei seguenti due modi:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi}{L} kx\right) & f(x) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi}{L} kx\right) \\ a_k &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} kx\right) dx, & b_k &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} kx\right) dx. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nelle applicazioni può essere un po' più conveniente utilizzare lo sviluppo in serie di seni in quanto il termine di media integrale viene a mancare.

Esempio 3.5.1 Sia $h(x) = x(L-x)$ in $[0, L]$; sviluppiamola in serie di soli seni. Da (3.18), per $\omega = \pi/L$, integrando due volte per parti si trova

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{L} \int_0^L x(L-x) \sin\left(\frac{\pi}{L} kx\right) dx = \frac{4L^2}{(\pi k)^3} (1 - (-1)^k) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n \\ \frac{8L^2}{\pi^3(2n+1)^3} & \text{se } k = 2n+1, \end{cases} \end{aligned}$$

da cui

$$h(x) = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin\left(\frac{\pi}{L} (2n+1)x\right). \quad (3.19)$$

3.6 La forma complessa di una serie di Fourier

La serie di Fourier (3.8) può essere scritta in una forma più compatta e significativa se si utilizza la notazione complessa; useremo in particolare la formula di Eulero

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione T -periodica; la forma complessa della sua serie di Fourier è

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega k x}, \quad (3.20)$$

con $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. La convergenza della serie qui sopra è da intendersi nel senso che entrambe le serie $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{i\omega k x}$ e $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{i\omega k x}$ sono convergenti.

A prima vista può sembrare sorprendente che una serie a termini *complessi* converga a una funzione *reale*; come vedremo, questo dipenderà dal fatto che la parte immaginaria della serie è nulla. I coefficienti c_k in (3.20) possono essere determinati come gli analoghi a_k, b_k ; basta moltiplicare entrambi i termini per e^{imx} e integrare in $[-T/2, T/2]$, ricordando il Lemma 3.3.1.

Un metodo meno rigoroso ma più esplicito è il seguente, che sfrutta l'indipendenza lineare delle funzioni in gioco. Affinché la serie in (3.20) coincida con quella in (3.8) occorre intanto che $c_0 = \frac{a_0}{2}$. Occorrerà poi che i termini che hanno la stessa frequenza coincidano:

$$c_k e^{i\omega k x} + c_{-k} e^{-i\omega k x} = a_k \cos(\omega k x) + b_k \sin(\omega k x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Scriviamo ora $c_k = \alpha_k + i\beta_k$ e applichiamo la formula di Eulero, separando quindi le parti reali ed immaginarie:

$$\begin{aligned} & (\alpha_k + i\beta_k) (\cos(\omega k x) + i \sin(\omega k x)) + (\alpha_{-k} + i\beta_{-k}) (\cos(\omega k x) - i \sin(\omega k x)) \\ &= (\alpha_k + \alpha_{-k}) \cos(\omega k x) - (\beta_k - \beta_{-k}) \sin(\omega k x) + \\ & \quad + i\{(\beta_k + \beta_{-k}) \cos(\omega k x) + (\alpha_k - \alpha_{-k}) \sin(\omega k x)\} \\ &= a_k \cos(\omega k x) + b_k \sin(\omega k x). \end{aligned}$$

Se imponiamo poi che la parte immaginaria del primo membro sia nulla (il secondo membro è reale) e che la sua parte reale coincida col secondo membro otteniamo le uguaglianze

$$\begin{aligned} \alpha_{-k} &= \alpha_k, & \beta_{-k} &= -\beta_k, \\ \alpha_k &= \frac{a_k}{2}, & \beta_k &= -\frac{b_k}{2}, \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots,$$

da cui

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \\ c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2} \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots,$$

ovvero

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega k x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.21)$$

Questo è proprio quanto ci si aspettava dal primo procedimento proposto. Si noti che introducendo la frequenza fondamentale $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ la (3.20) si scrive

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i2\pi k \nu x}.$$

Scriviamo ora la formula di Parseval utilizzando queste notazioni. Osserviamo intanto che $\frac{a_0^2}{2} = 2|c_0|^2$; inoltre per $k = 1, 2, \dots$ si ha $c_{-k} = \overline{c_k}$ e dunque $|c_{-k}|^2 = |c_k|^2 = \frac{1}{4}(a_k^2 + b_k^2)$; perciò

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} |c_k|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Pertanto la formula di Parseval si scrive

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \quad (3.22)$$

Esercizio 3.6.1 Calcolare la serie di Fourier complessa della funzione f definita da $f(x) = e^x$ se $x \in [-\pi, \pi)$ e poi estesa per periodicità a tutto \mathbb{R} .

3.7 Confronto tra le serie di Taylor e di Fourier

A conclusione di questo capitolo riportiamo schematicamente a confronto le caratteristiche principali delle serie di Taylor e Fourier.

	Taylor	Fourier
“base”	$(x - x_0)^n, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega kx), \sin(\omega kx), k = 0, 1, 2, \dots$
ipotesi	$f \in C^\infty$ almeno	$f \in C^1$ a tratti
convergenza	puntuale in $(-r, r)$ totale in $[-\rho, \rho], \rho < r$	puntuale dove f è continua totale se f è continua
coefficienti	per derivazione	per integrazione
approssimazione	buona vicino a x_0 non buona globalmente	buona globalmente non buona nei punti di discontinuità

Capitolo 4

Equazioni differenziali ordinarie

4.1 Introduzione

In questo capitolo studiamo l'integrazione per serie di potenze di equazioni differenziali ordinarie (EDO). Rivendiamo prima di tutto alcuni fatti noti sulle equazioni differenziali ordinarie.

4.1.1 EDO lineari del primo ordine

Una EDO lineare del primo ordine è una equazione del tipo

$$y' + a(x)y = f(x) \quad (4.1)$$

dove a e f sono funzioni continue in un intervallo aperto I . Indichiamo con A una primitiva della funzione a . Moltiplicando entrambi i membri di (4.1) per $e^{A(x)}$ e integrando si trova l'integrale generale

$$y(t, C) = e^{-A(x)} \int e^{A(t)} f(t) dt + Ce^{-A(x)},$$

dove C è una arbitraria costante reale. Si noti che $y(t, C)$ è definita in tutto l'intervallo I . La costante C viene determinata considerando il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (4.2)$$

dove $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

4.1.2 EDO lineari del secondo ordine

L'esame del caso precedente motiva i risultati sulle EDO lineari di ordine superiore al primo che rivediamo ora; ci limitiamo alle equazioni del secondo ordine ma analoghi risultati valgono per ogni EDO lineare.

Una EDO lineare del secondo ordine è una equazione del tipo

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (4.3)$$

con a_1 , a_2 e f funzioni continue in un intervallo aperto I . Il relativo problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad (4.4)$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. L'equazione omogenea associata a (4.3) è

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (4.5)$$

La determinazione di un integrale generale *esplicito* per le equazioni (4.3), (4.5) è in generale impossibile. Si può tuttavia provare quanto segue.

- (i) L'equazione (4.3) ammette soluzioni; esse sono di classe C^2 e sono definite in tutto l'intervallo I ; il problema di Cauchy (4.4) ammette una unica soluzione, definita in I , per ogni $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.
- (ii) L'integrale generale di (4.3) è del tipo

$$y(x, C_1, C_2) = y_H(x, C_1, C_2) + \bar{y}(x)$$

dove $y_H(x, C_1, C_2)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea (4.5) e \bar{y} una soluzione particolare dell'equazione completa (4.3).

- (iii) Se y_1, y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti di (4.5) allora

$$y_H(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Il primo punto riguarda l'*esistenza* delle soluzioni e il loro insieme di definizione; per le equazioni lineari esso coincide con l'insieme di definizione dei coefficienti mentre in generale, cioè se l'equazione non lineare, esso è più piccolo.

Il secondo punto riguarda la *struttura* dell'integrale generale dell'equazione *completa* (4.3). La determinazione di \bar{y} avviene tramite varie tecniche (principio di similitudine, metodo di variazione delle costanti).

Il terzo punto riguarda la *struttura* dell'integrale generale dell'equazione *omogenea* (4.5); ricordiamo che due funzioni sono linearmente dipendenti se una è multipla (non nulla) dell'altra. Nel caso in cui i coefficienti a_1, a_2 siano *costanti* la determinazione *esplicita* di y_H è possibile tramite le radici del polinomio caratteristico.

La tecnica del polinomio caratteristico per determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea è *inutilizzabile* se a_1, a_2 dipendono dalla variabile x , ed è precisamente questo il caso al quale siamo ora interessati.

4.2 Integrazione per serie di potenze di EDO

In questa sezione studiamo le soluzioni dell'equazione *omogenea* (4.5). Il procedimento generale per integrare una EDO omogenea tramite serie di potenze è il seguente.

Supponiamo che $a_1(x), a_2(x)$ siano sviluppabili in serie di potenze, di centro 0 e raggio di convergenza r ; pertanto a_1 e a_2 sono funzioni di classe C^∞ in $(-r, r)$. Cerchiamo una soluzione y della forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (4.6)$$

con coefficienti $c_n \in \mathbb{R}$ da determinare. In ogni intervallo in cui vi è convergenza totale possiamo calcolare y' e y'' derivando termine a termine la serie:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad (4.7)$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}. \quad (4.8)$$

Inseriamo poi tali espressioni e gli analoghi sviluppi in serie di a_1 e a_2 in (4.5); raccogliamo le potenze con lo stesso grado e uguagliamo a zero i relativi coefficienti. In questo modo si ottengono le equazioni che determinano i coefficienti c_n .

Osservazione 4.2.1

- Come si vede dal procedimento, l'estensione di questo metodo per integrare EDO complete è banale: invece di uguagliare a zero i coefficienti della serie di potenze a primo membro li si uguaglia a quelli di f .
- Il caso in cui $a_1(x), a_2(x)$ sono sviluppabili in serie di potenze di centro $x_0 \neq 0$ è analogo: la serie di potenze di y sarà centrata in x_0 .

Ci poniamo dunque la seguente domanda: *cosa si può dire del raggio di convergenza della serie di potenze di y ? E inoltre: date due soluzioni espresse sotto forma di serie di potenze, come riconoscere se esse sono linearmente indipendenti?* Le risposte sono contenute nei teoremi seguenti.

Teorema 4.2.1 (Primo Teorema di Fuchs) *Se a_1 e a_2 sono sviluppabili in serie di potenze in $(-r, r)$ allora ogni soluzione di (4.5) è sviluppabile in serie di potenze in $(-r, r)$.*

Alla base di questo risultato vi è il fatto che se una serie di potenze ha raggio di convergenza r (e centro 0) allora la convergenza è totale in ogni intervallo $[-\rho, \rho]$, se $\rho < r$. Si noti inoltre che il teorema asserisce che, sotto le ipotesi fatte sui coefficienti a_1 e a_2 , ogni soluzione di (4.5) è sviluppabile in serie di potenze. Conseguenza del risultato è che le soluzioni y sono di classe C^∞ , cosa del resto già nota essendo soluzioni di una equazione lineare a coefficienti C^∞ .

Teorema 4.2.2 *Siano $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ due soluzioni di (4.5) in $(-r, r)$. Supponiamo che y_1 non sia identicamente nulla. Allora y_1 e y_2 sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $d_n = k c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Trovate pertanto due soluzioni espresse in serie di potenze, questo risultato dà un criterio effettivo per stabilire se esse sono linearmente indipendenti, e dunque per poter scrivere l'integrale generale di (4.5).

Un risultato analogo al Primo Teorema di Fuchs vale nel caso non omogeneo (4.3), se f è sviluppabile in serie di potenze in $(-r, r)$.

Esempio 4.2.1 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Le ipotesi del Primo Teorema di Fuchs sono soddisfatte con $r = +\infty$; poiché i dati sono relativi al punto 0 cerchiamo una soluzione della forma (4.6). Scriviamo le serie in gioco in modo che partano dallo stesso indice (qui sotto 1) e che nel termine generale compaia la stessa potenza (cioè x^n). Da (4.6) e (4.8) segue

$$\begin{aligned} xy(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n = 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Inserendo nell'equazione si ottiene

$$2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - c_{n-1}] x^n = 0$$

da cui

$$2c_2 = 0 \quad (4.10)$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - c_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Queste formule permettono, assunti come parametri c_0 e c_1 , di determinare gli altri coefficienti c_n , $n = 2, 3, \dots$. Nel caso in questione i dati del problema di Cauchy implicano $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Pertanto: da (4.10) segue $c_2 = 0$, da (4.11) con $n = 1$ si ha $c_3 = 0$, da (4.11) con $n = 2$ si ha $c_4 = \frac{1}{3 \cdot 4}$, e così via. Si ottiene, per $n = 1, 2, \dots$,

$$c_{3n+1} = \frac{1}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7) \cdots 3n \cdot (3n+1)} = \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{(3n+1)!}$$

mentre tutti gli altri coefficienti sono nulli. Pertanto

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}. \quad (4.12)$$

Sappiamo già dal Primo Teorema di Fuchs che questa serie è convergente in \mathbb{R} ; lo si può verificare direttamente applicando il criterio del rapporto alla serie dei moduli: per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)(3n+2)}{(3n+4)!} |x|^{3n+4} \cdot \frac{(3n+1)!}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)|x|^{3n+1}} = \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+4)} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

La serie converge assolutamente, dunque puntualmente, per ogni $x \in \mathbb{R}$; dallo stesso calcolo si ricava la convergenza totale in ogni intervallo $[-\rho, \rho]$, $\rho > 0$. Considerando i primi tre termini significativi in (4.12) si trova lo sviluppo di MacLaurin di y di ordine 7:

$$y(x) = x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + o(x^9). \quad (4.13)$$

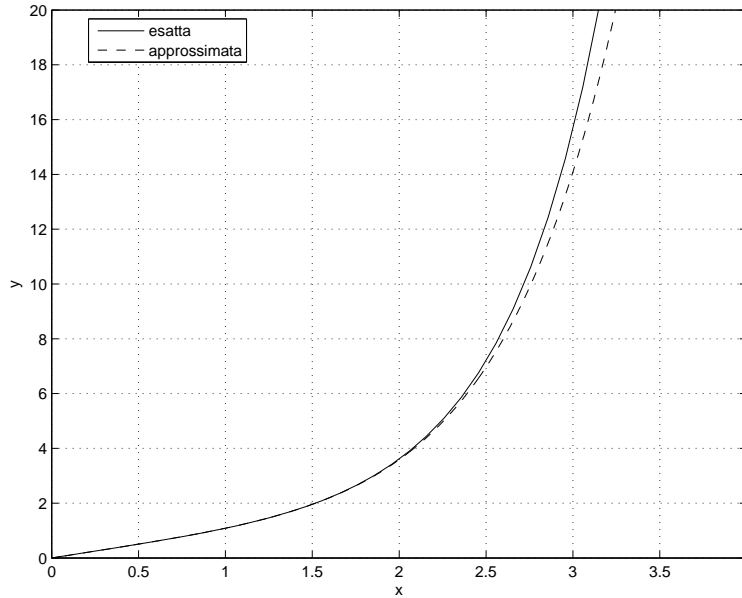


Figura 4.1: La soluzione esatta, ottenuta numericamente, del problema (4.9) e quella approssimata data dai primi tre termini di (4.13).

Esempio 4.2.2 (L'equazione di Legendre) L'equazione di Legendre è

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0 \quad (4.14)$$

con $p \in \mathbb{R}$. Essa compare nella modellizzazione di vari fenomeni fisici. In forma normale (4.14) si scrive

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{p(p + 1)}{1 - x^2}y = 0$$

e dunque il Primo Teorema di Fuchs si applica con $r = 1$. Si cerca y sotto la forma (4.6), dunque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Inserendo queste espressioni in (4.14) si trova

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + p(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \quad (4.15)$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n \\ \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n \end{aligned}$$

e dunque, da (4.15),

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + p(p+1)c_n] x^n = 0.$$

Perciò

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = [n(n-1) - 2n + p(p+1)] c_n.$$

Ma

$$n(n-1) - 2n + p(p+1) = n^2 + n - p^2 - p = (n+p)(n-p) + (n-p) = -(p-n)(p+n+1)$$

dunque, per $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$c_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+2)(n+1)} c_n. \quad (4.16)$$

Le condizioni di Cauchy permettono di determinare i coefficienti c_0 e c_1 ; per ricorrenza c_0 determina a cascata i coefficienti pari della serie, c_1 quelli dispari. Dal Primo Teorema di Fuchs sappiamo che la serie così ottenuta converge in $(-1, 1)$; questo può essere verificato anche direttamente da (4.16) applicando il criterio del rapporto separatamente alle serie dei termini pari e dispari.

Osservazione 4.2.2 (I polinomi di Legendre) Nel caso in cui nell'equazione di Legendre (4.14) il parametro p sia pari allora tutti i coefficienti c_n con $n > p$ pari sono nulli, a causa del fattore $p-n$ che compare in (4.16). In tal caso la serie dei termini pari si riduce ad un polinomio di grado p . Ad esempio:

- se $p = 0$ la formula (4.16) diventa $c_{n+2} = \frac{n}{n+1} c_n$, dunque $c_2 = c_4 = \dots = 0$; nella serie dei termini pari resta solo c_0 ;
- se $p = 2$ la formula (4.16) diventa $c_{n+2} = \frac{(n-2)(n+3)}{(n+2)(n+1)} c_n$; dunque $c_2 = -3c_0$, $c_4 = c_6 = \dots = 0$; nella serie dei termini pari resta solo $c_0 - 3c_0x^2$.

Analogamente, se p è dispari allora tutti i coefficienti c_n con $n > p$ dispari sono nulli, sempre a causa del fattore $p-n$ in (4.16), e la serie dei termini dispari si riduce ad un polinomio di grado p . Ad esempio:

- se $p = 1$ la formula (4.16) diventa $c_{n+2} = \frac{n-1}{n+1} c_n$, dunque $c_3 = c_5 = \dots = 0$; nella serie dei termini dispari resta solo c_1x ;
- se $p = 3$ la formula (4.16) diventa $c_{n+2} = \frac{(n-3)(n+4)}{(n+2)(n+1)} c_n$; dunque $c_3 = -\frac{5}{3}c_1$, $c_5 = c_7 = \dots = 0$; nella serie dei termini dispari resta solo $c_1x - \frac{5}{3}c_1x^3$.

Se imponiamo a tutti questi polinomi (nei casi di sopra: c_0 , c_1x , $c_0 - 3c_0x^2$, $c_1x - \frac{5}{3}c_1x^3$, ...) la condizione di valere 1 quando $x = 1$ troviamo i *polinomi di Legendre* seguenti, che trovano impiego in vari problemi applicativi. Ecco i primi quattro, relativi ai calcoli svolti sopra:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x. \end{aligned}$$

Si può provare che per $n = 0, 1, 2, \dots$ si ha

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Esercizio 4.2.1 Risolvere con il metodo dell'Esempio 4.2.1 il problema di Cauchy $y'' - xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Esercizio 4.2.2 Utilizzando le (4.10), (4.11) risolvere il problema di Cauchy $y'' - xy = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.

Esercizio 4.2.3 Risolvere il problema di Cauchy $y'' - xy' + y = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$. Verificare direttamente la convergenza della serie di potenze di y . Determinare le soluzioni nei casi $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; provare che le relative soluzioni sono linearmente indipendenti. Dedurre l'integrale generale dell'equazione $y'' - xy' + y = 0$.

Risposta. Si trova $c_{n+2} = \frac{n-1}{(n+1)(n+2)}c_n$, dunque $y(x) = y_1x - y_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{(2n)!} x^{2n}$.

Esercizio 4.2.4 Il Primo Teorema di Fuchs garantisce la convergenza della serie relativa ad y almeno nello stesso intervallo aperto di convergenza delle serie di a_1 e a_2 . In effetti l'insieme di convergenza della serie di y può essere più grande. A tale scopo si consideri l'equazione

$$(2-x)y'' + (x-1)y' - y = 0.$$

Provare che i coefficienti sono sviluppabili in serie in $(-2, 2)$ ma la serie della soluzione converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Risposta. Si trova $y(x) = c_1e^x + c_2(1-x)$.

4.3 Integrazione per serie di potenze generalizzate di EDO

In alcuni casi i coefficienti a_1 e a_2 in (4.5) non sono sviluppabili in serie di potenze. Sotto opportune ipotesi di "omogeneità" lo stesso metodo della sezione precedente può essere ancora impiegato.

Teorema 4.3.1 (Secondo teorema di Fuchs) Consideriamo l'EDO (4.5) e supponiamo che le funzioni $xa_1(x)$ e $x^2a_2(x)$ siano sviluppabili in serie di potenze in $(-r, r)$. Allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che l'equazione (4.5) ha in $(-r, r)$ una soluzione della forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha} \quad (4.17)$$

con $c_0 \neq 0$.

Osservazione 4.3.1

- La serie di funzioni (4.17) non è più in generale una serie di potenze, a meno che $\alpha \in \mathbb{N}$; questo spiega il termine *serie di potenze generalizzate* dato a questi sviluppi. Evidentemente però

$$y(x) = x^\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

- L'enunciato del Secondo Teorema di Fuchs asserisce che esiste una soluzione della forma (4.17), diversamente dal Primo Teorema di Fuchs, che si riferisce a tutte le soluzioni.
- Il Secondo Teorema di Fuchs si applica tipicamente quando $a_1(x) \sim \frac{1}{x}$ e $a_2(x) \sim \frac{1}{x^2}$. Il fatto che $c_0 \neq 0$ specifica da un lato che le soluzioni prese in considerazione non sono identicamente nulle ($y \equiv 0$ è sempre soluzione di (4.5)). Inoltre, la condizione $c_0 \neq 0$ implica che $y(x) \sim c_0 x^\alpha$ vicino a 0.

Esempio 4.3.1 (L'equazione di Bessel) Si tratta dell'equazione, per $p \in \mathbb{R}$,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0. \quad (4.18)$$

La sua forma normale è $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0$; pertanto $a_1(x) = \frac{1}{x}$, $a_2(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2}$. Il Primo Teorema di Fuchs non si applica mentre le ipotesi del secondo sono soddisfatte con $r = +\infty$.

Per semplicità ci limitiamo al caso $p \in \mathbb{N}$ e cerchiamo soluzioni del tipo (4.17) con $\alpha = p$; si noti che in tal caso si ritrova una serie di potenze. Per evitare di dover specificare l'indice di partenza delle serie conveniamo che

$$c_n = 0 \quad \text{se} \quad n < 0.$$

Si trova, mettendo in evidenza le potenze x^{n+p} ,

$$\begin{aligned}x^2y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+p+2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-2} x^{n+p} \quad (c_{-2} = c_{-1} = 0) \\xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)c_n x^{n+p} \\x^2y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1)c_n x^{n+p}.\end{aligned}$$

Inserendo nell'equazione occorre che

$$(n+p)(n+p-1)c_n + (n+p)c_n + c_{n-2} - p^2c_n = 0$$

per $n = 0, 1, \dots$, dunque

$$[(n+p)^2 - p^2]c_n + c_{n-2} = 0.$$

Se $n = 0$ questa condizione è sempre soddisfatta (si ricordi che $c_{-2} = 0$). Altrimenti, se $n \geq 1$ si ha

$$c_n = -\frac{1}{n(n+2p)}c_{n-2}$$

per $n = 1, 2, \dots$. Se $n = 1$ si trova $c_1 = 0$, dunque $c_{2n+1} = 0$ per ogni $n = 0, 1, \dots$. Per i termini di indice pari si trova invece,

$$c_{2n} = -\frac{1}{4} \frac{1}{n(n+p)} c_{2n-2}$$

per $n = 1, 2, \dots$. Perciò, assunto $c_0 \neq 0$ come parametro,

$$\begin{aligned}c_2 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{1(1+p)} c_0 \\c_4 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{2(2+p)} c_2 = \frac{1}{4^2} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot (1+p)(2+p)} c_0\end{aligned}$$

e in generale

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{1}{4^n} \frac{p!}{n!(n+p)!} c_0$$

per $n = 1, 2, \dots$. Perciò per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = c_0 p! 2^p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}.$$

La funzione somma della serie è la *funzione di Bessel (di prima specie) di ordine p* :

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

vedi Figura 4.2.

La convergenza assoluta (quindi puntuale) della serie può essere verificata direttamente:

$$\frac{1}{(n+1)!(n+1+p)!} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{2n+2+p} \cdot \frac{n!(n+p)!}{\left(\frac{|x|}{2}\right)^{2n+p}} = \frac{1}{(n+1)(n+1+p)} \left(\frac{|x|}{2}\right)^2 \rightarrow 0$$

se $n \rightarrow \infty$.

Nel caso in cui $p \notin \mathbb{N}$ l'espressione di J_p va leggermente modificata (a causa dei fattoriali). In generale si può dimostrare che se $p \notin \mathbb{Z}$ allora J_p e J_{-p} sono linearmente indipendenti; l'integrale generale dell'equazione di Bessel (4.18) si scrive dunque

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x).$$

Se $p \in \mathbb{Z}$ questo non è più vero e occorre introdurre un'altra classe di funzioni, dette *funzioni di Bessel di seconda specie*. Tralasciamo questo argomento.

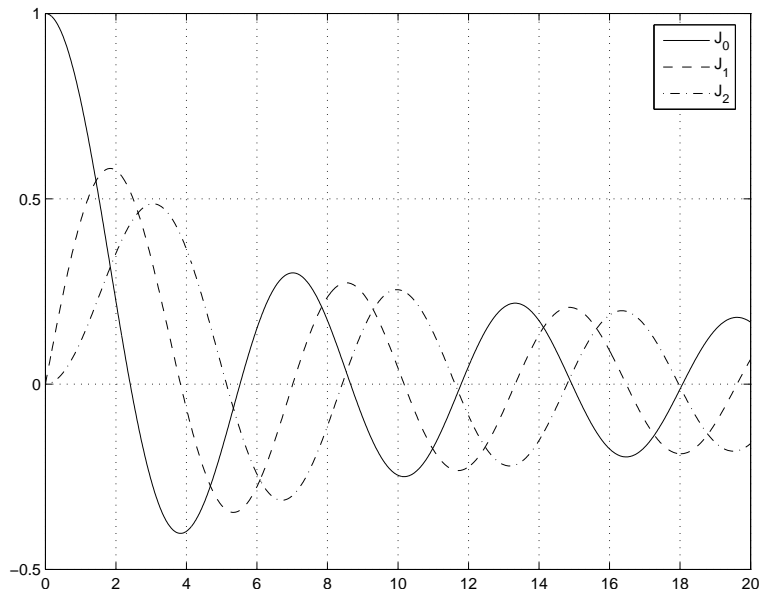


Figura 4.2: Funzioni di Bessel di prima specie.

Capitolo 5

Equazioni alle derivate parziali

In questo capitolo introduciamo e studiamo in modo elementare alcune equazioni alle derivate parziali che governano importanti fenomeni fisici. Per brevità non dedurremo tali equazioni da ipotesi fisiche; per questo si veda ad esempio [16, 19]. Il campo delle equazioni alle derivate parziali è uno degli argomenti più estesi della matematica, sia dal punto di vista teorico che applicativo. Materiale di base si trova in [3]; maggiori dettagli si trovano in [16, 18, 19]. Per la modellistica e la numerica si veda [15].

5.1 L'equazione del calore

Si vuole modellizzare la diffusione per conduzione del calore in una sbarra lineare, rigida, omogenea, lunga L , i cui estremi sono mantenuti a temperatura uguale e costante; la distribuzione iniziale di temperatura è supposta nota. Supporremo inoltre che la sbarra sia cilindrica, con ampiezza di sezione molto inferiore alla lunghezza; la identificheremo con il segmento $[0, L]$. Indicata con $u(t, x)$ la temperatura al tempo t nel punto x della sbarra, il problema da risolvere è

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_x^2 u = 0 & t \geq 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t \geq 0 \\ u(0, x) = h(x) & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (5.1)$$

La prima equazione in (5.1) è l'*equazione del calore*; essa prende anche il nome di *equazione di diffusione* o di *equazione di Fourier*, in quanto è dedotta utilizzando la legge di Fourier per la conduzione del calore.

Il costante *coefficiente di diffusione* $D > 0$ è una costante che dipende dalle caratteristiche termiche del materiale che costituisce la sbarra; essa è tanto più grande quanto più il materiale è buon conduttore di calore. Esso ha dimensioni $[\text{m}^2/\text{s}]$.

La seconda riga in (5.1) traduce il fatto che gli estremi della sbarra sono mantenuti a temperatura uguale e costante; scegliendo opportunamente le unità di misura abbiamo assunto che tale valore sia 0. Queste condizioni sono anche dette *dati al bordo* o condizioni ai limiti.

La terza riga in (5.1) impone il *dato iniziale*: la funzione h è la temperatura iniziale e viene supposta nota. I dati al bordo impongono la *condizione di compatibilità* $h(0) = h(L) = 0$.

Osservazione 5.1.1 La stessa equazione governa molti fenomeni fisici (ed economici), in tal caso l'equazione prende anche il nome di *equazione di Fick*.

Facciamo ora vedere come risolvere il problema (5.1) con le serie di Fourier. Supponiamo che la funzione h sia regolare a tratti e scriviamola in serie di Fourier di soli seni, $\omega = \frac{\pi}{L}$:

$$\begin{aligned} h(x) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega k x) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x), \quad x \in [0, L], \\ b_k &= \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin(\omega k x) dx, \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si noti che l'equazione del calore è *lineare*, e dunque la somma di soluzioni è ancora soluzione dell'equazione. Cerchiamo pertanto una soluzione u del problema (5.1) sotto la forma di una serie

di funzioni

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, x), \quad (5.3)$$

dove le funzioni u_k risolvono il problema (5.1) relativo all'armonica h_k di h :

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_x^2 u = 0 & t \geq 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t \geq 0 \\ u(0, x) = h_k(x) & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (5.4)$$

La risoluzione del problema (5.1) è dunque ridotta alla risoluzione dei più semplici problemi (5.4). La soluzione u_k di (5.4) va cercata col metodo di *separazione delle variabili*, ovvero si cerca u_k sotto la forma

$$u_k(t, x) = f_k(t)h_k(x), \quad (5.5)$$

per una funzione f_k da determinare. Si ha $u_k(t, 0) = f_k(t)h_k(0) = 0$ e $u_k(t, L) = f_k(t)h_k(L) = 0$, ovvero le condizioni al bordo in (5.4) sono soddisfatte. Inoltre $u_k(0, x) = f_k(0)h_k(x)$ e dunque la condizione iniziale in (5.4) è soddisfatta se $f_k(0) = 1$. Inseriamo infine u_k nell'equazione del calore; ricordando che $h_k(x) = b_k \sin(\omega k x)$ troviamo

$$f_k'(t)b_k \sin(\omega k x) + D(\omega k)^2 f_k(t)b_k \sin(\omega k x) = 0.$$

Semplificando siamo ricondotti al problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria:

$$\begin{cases} f_k' + D(\omega k)^2 f_k = 0 \\ f_k(0) = 1. \end{cases}$$

Integrando col metodo del fattore integrante (o per variabili separabili) si trova

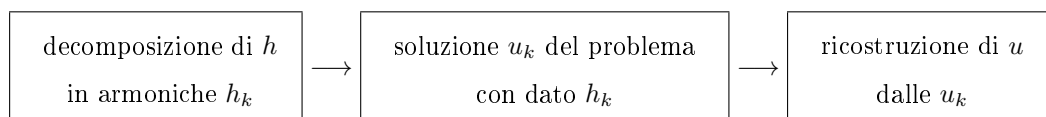
$$f_k(t) = e^{-D(\omega k)^2 t}$$

da cui

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-D(\omega k)^2 t} \sin(\omega k x). \quad (5.6)$$

Tralasciamo per semplicità lo studio della convergenza totale della serie e delle serie derivate, che giustifica rigorosamente il procedimento svolto ed il fatto che la u definita in (5.6) sia soluzione dell'equazione. Si noti tuttavia che almeno formalmente sia le condizioni al bordo che la condizione iniziale in (5.1) sono soddisfatte.

Riassumiamo schematicamente il procedimento adoperato per la ricerca della soluzione:



Osservazione 5.1.2 La successione $\{b_k\}$ è infinitesima per il Teorema di Riemann-Lebesgue, dunque essa è limitata: $|b_k| \leq M$. Pertanto

$$|u(t, x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| b_k e^{-D(\omega k)^2 t} \sin(\omega k x) \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} e^{-D(\omega k)^2 t}.$$

Si ha inoltre

$$e^{-D(\omega k)^2 t} \leq e^{-D\omega^2 k t} = (e^{-D\omega^2 t})^k$$

e perciò per $t > 0$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-D(\omega k)^2 t}$ è maggiorata dalla serie geometrica di ragione $e^{-D\omega^2 t} < 1$. Dunque

$$|u(t, x)| \leq M \frac{e^{-D\omega^2 t}}{1 - e^{-D\omega^2 t}} \sim M e^{-D\omega^2 t} = M e^{-\frac{D\pi^2}{L^2} t}. \quad (5.7)$$

La formula (5.7) prova la convergenza assoluta per $t > 0$ della serie che definisce u . Questo semplice calcolo mostra che secondo questo modello il calore è diffuso a 0 (almeno per tempi grandi) in modo esponenzialmente rapido in tempo; la diffusione è tanto più rapida quanto più il coefficiente di diffusione D è grande e quanto più la sbarra è corta. Si noti che la funzione esponenziale che maggiora u in (5.7) è esattamente quella relativa al primo termine della (5.6), quello che decresce più lentamente in tempo.

Osservazione 5.1.3 Il calcolo di sopra permette di rispondere alla domanda: dato $\epsilon > 0$, dopo quanto tempo la temperatura della sbarra sarà minore di ϵ ? Per (5.7) è sufficiente risolvere l'equazione

$$M \frac{e^{-D\omega^2 t}}{1 - e^{-D\omega^2 t}} < \epsilon$$

che dà $e^{-D\omega^2 t} < \frac{\epsilon}{M+\epsilon}$ e quindi

$$t > \frac{L^2}{D} \cdot \frac{1}{\pi^2} \log \left(1 + \frac{M}{\epsilon} \right).$$

La temperatura della sbarra, pertanto, sarà “vicina” a 0 dopo un tempo di ordine $\frac{L^2}{D}$.

Esempio 5.1.1 Sia $h(x) = x(L-x)$, si veda la Figura 5.1. Abbiamo visto che

$$h(x) = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin \left(\frac{\pi}{L} (2n+1)x \right)$$

dunque da (5.6)

$$u(t, x) = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-D((2n+1)\frac{\pi}{L})^2 t}}{(2n+1)^3} \sin \left(\frac{\pi}{L} (2n+1)x \right).$$

Una simulazione numerica della diffusione del calore per un dato iniziale h discontinuo, $h(x) = 0$ se $x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]$, $h(x) = 1$ altrove in $[0, 1]$, è mostrata in Figura 5.1.

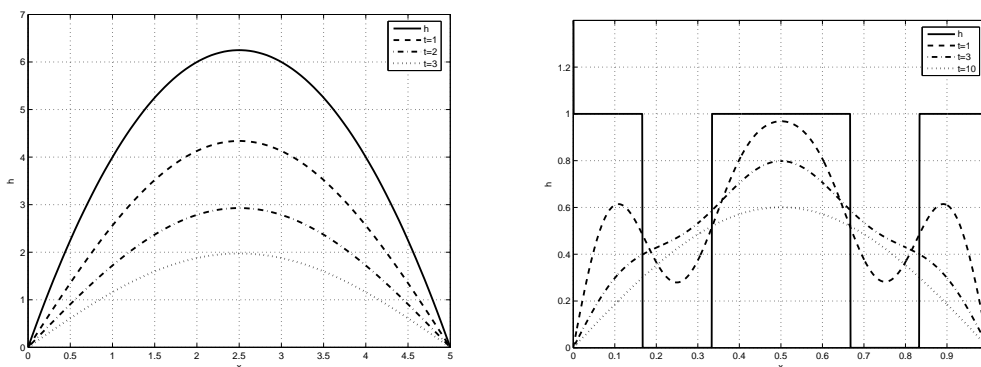


Figura 5.1: Dato iniziale e soluzione dell'equazione del calore per diversi tempi. A sinistra: $L = 5$, $D = 1$, $h(x) = x(L-x)$; nello sviluppo si sono presi i primi 5 termini della serie, che danno già un'ottima approssimazione. A destra: $L = 1$, $D = 0.003$, $h(x) = 0$ se $x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]$, $h(x) = 1$ altrove in $[0, 1]$. La simulazione numerica fa vedere come avviene la diffusione del calore nelle zone “fredde”.

Esercizio 5.1.1 Scrivere i primi quattro termini della soluzione dell'equazione del calore relativa ai dati $L = \pi$, $h(x) = 1$ se $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ e nulla altrove in $[0, \pi]$.

Risposta. $u(t, x) \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-Dt} \sin x + \frac{1}{\pi} e^{-4Dt} \sin(2x) - \frac{\sqrt{2}}{3\pi} e^{-9Dt} \sin(3x) - \frac{1}{\pi} e^{-16Dt} \sin(4x)$.

5.2 L'equazione delle onde

In questa sezione presentiamo una semplice equazione alle derivate parziali che governa le vibrazioni di una corda. Come nel caso dell'equazione del calore non deduciamo il modello da ipotesi fisiche ma ci limitiamo ad enunciare il suo ambito di validità: la corda è elastica, perfettamente flessibile, di peso trascurabile, la sua deviazione dalla posizione orizzontale di equilibrio è piccola e verticale, tutti gli attriti vengono trascurati; non vi sono carichi esterni.

Sia L la lunghezza della corda, che viene assimilata all'equilibrio all'intervallo $[0, L]$; essa è vincolata agli estremi $(0, 0)$ e $(0, L)$. Indichiamo con $u = u(t, x)$ la distanza verticale della corda dal punto x sull'asse delle ascisse al tempo t ; si veda la Figura 5.2.

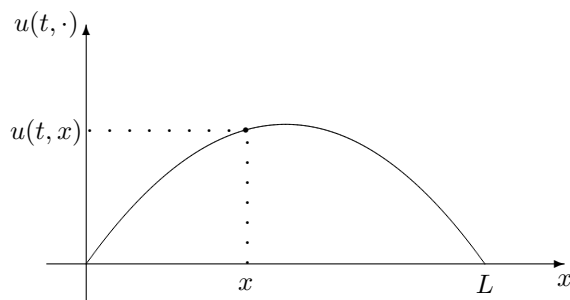


Figura 5.2: La corda vibrante.

Il problema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 & t \geq 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t \geq 0 \\ u(0, x) = h(x), \partial_t u(0, x) = 0 & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (5.8)$$

La prima equazione in (5.8) è l'*equazione delle onde* o *equazione di D'Alembert*. La costante $c > 0$ ha le dimensioni fisiche di una velocità ed è detta *velocità di propagazione*. Essa dipende dal materiale che costituisce la sbarra ed in particolare è tanto più grande quanto più è piccola la densità lineare di massa della corda. La seconda riga in (5.8) è il dato al bordo: in questo caso impone che gli estremi della corda siano vincolati. La terza riga in (5.8) specifica i dati iniziali: la funzione h rappresenta la posizione iniziale della corda che si assume venga rilasciata con velocità nulla ($\partial_t u(0, x) = 0$). Una condizione di compatibilità è $h(0) = h(L) = 0$.

La soluzione di (5.8) avviene secondo lo schema visto nella sezione precedente. Decomponiamo h come in (5.2), cerchiamo u sotto la forma (5.3) e imponiamo alle funzioni u_k di soddisfare il problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 & t \geq 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t \geq 0 \\ u(0, x) = h_k(x), \partial_t u(0, x) = 0 & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (5.9)$$

Per separazione di variabili si cerca u_k sotto la forma

$$u_k(t, x) = f_k(t)h_k(x),$$

con f_k da determinare. Con tale scelta di u_k le condizioni al bordo in (5.9) sono soddisfatte. Inoltre si ha $u_k(0, x) = f_k(0)h_k(x)$ e $\partial_t u_k(0, x) = f_k'(0)h_k(x)$; le condizioni iniziali sono soddisfatte se $f_k(0) = 1$ e $f_k'(0) = 0$. Inserendo u_k nell'equazione delle onde si trova

$$f_k''(t)b_k \sin(\omega k x) + c^2(\omega k)^2 f_k(t)b_k \sin(\omega k x) = 0.$$

Pertanto la funzione f_k deve soddisfare il seguente problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria di secondo ordine:

$$\begin{cases} f_k'' + (c\omega k)^2 f_k = 0 \\ f_k(0) = 1, f_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Si trova facilmente $f_k(t) = \cos(c\omega k t)$, da cui

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(c\omega k t) \sin(\omega k x). \quad (5.10)$$

Come nella Sezione 5.1 l'analisi della convergenza della serie è tralasciata. Si noti che le oscillazioni sono governate dal prodotto $c\omega = \pi \frac{c}{L}$: a valori grandi di L e piccoli di c corrispondono oscillazioni lente mentre, viceversa, a valori piccoli di L e grandi di c corrispondono oscillazioni rapide.

Esempio 5.2.1 Sia $h(x) = x(L-x)$, si veda la Figura 5.3. Dall'Esempio 5.1.1 e da (5.10) si ricava

$$u(t, x) = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos\left(\frac{c\pi}{L}(2n+1)t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}(2n+1)x\right).$$

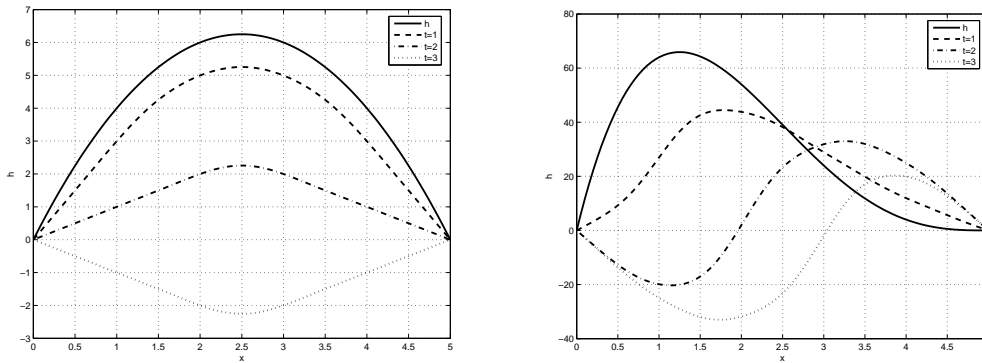


Figura 5.3: Dato iniziale e soluzione dell'equazione delle onde per diversi tempi; in entrambi i casi $L = 5$, $c = 1$. A sinistra $h(x) = x(L - x)$. A destra la simulazione numerica per $h(x) = x(L - x)^3$; si noti come la “gobba” si propaghi nel tempo verso destra.

Esempio 5.2.2 Sia $f = f(y)$ una funzione derivabile di una variabile reale, definita in \mathbb{R} . Si prova facilmente che le funzioni

$$u_{\pm}(t, x) = f(kx \pm \omega t),$$

dove ω e k sono costanti e $\omega/k = c$, sono soluzioni dell'equazione delle onde. Le funzioni u_{\pm} rappresentano due onde che si propagano verso destra (u_{-}), rispettivamente verso sinistra (u_{+}); si veda la Figura 5.4.

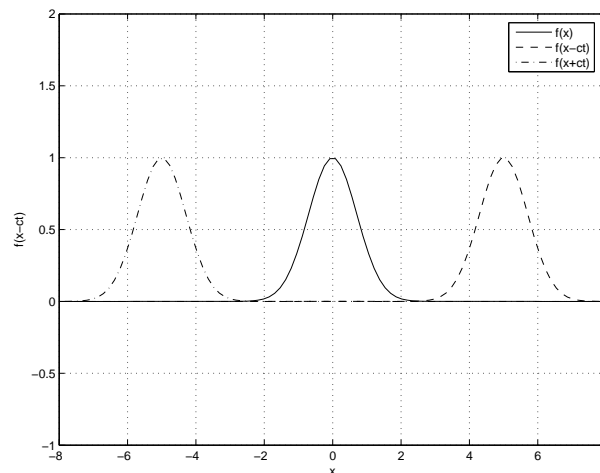


Figura 5.4: Grafici delle funzioni $x \rightarrow f(kx \pm \omega t)$ per $t = 0$ e $t = 5$. Qui $k = \omega = c = 1$.

Supponiamo che x abbia le dimensioni di una lunghezza e t di un tempo. Il numero k , detto *numero d'onda*, ha allora le dimensioni del reciproco di una lunghezza mentre ω , detto *frequenza angolare*, ha le dimensioni di una frequenza.

Pertanto, per linearità, ogni funzione $u(t, x) = C_1 f_1(kx - \omega t) + C_2 f_2(kx + \omega t)$, con $\omega/k = c$, è soluzione dell'equazione delle onde per arbitrarie funzioni derivabili f_1 e f_2 in \mathbb{R} e arbitrarie costanti C_1 e C_2 .

5.3 L'equazione di Laplace

Nella sezione precedente abbiamo considerato il moto verticale di una corda elastica. L'analogo moto verticale di una membrana elastica, che a riposo giace sul piano (x, y) , è governato dall'equazione

$$\partial_t^2 u - c^2 (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = 0, \quad (5.11)$$

dove $u(t, x, y)$ è la distanza verticale della membrana dal punto (x, y) , giacente sul piano (x, y) , al tempo t . La ipotesi che garantiscono la validità di questa equazione per modellizzare il moto della

membrana sono analoghe a quelle già richieste nel caso della corda. Ci chiediamo se, assegnate delle posizioni della membrana sul suo contorno, esistono delle posizioni stazionarie, indipendenti cioè dal tempo t . Considereremo per semplicità il caso in cui la membrana occupa a riposo la posizione $[0, L] \times [0, M]$ nel piano (x, y) ; essa è vincolata ai tre lati $\{0\} \times [0, M]$, $[0, L] \times \{M\}$, $\{L\} \times [0, M]$ mentre viene deformata sul lato $[0, L] \times \{0\}$.

Il problema da risolvere è

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 & x \in [0, L], y \in [0, M] \\ u(x, 0) = h(x), u(x, M) = u(0, y) = u(L, y) = 0, & x \in [0, L], y \in [0, M]. \end{cases} \quad (5.12)$$

L'equazione alle derivate parziali in (5.12) è l'equazione di Laplace. Si usa la notazione

$$\Delta \doteq \partial_x^2 + \partial_y^2$$

per indicare il Laplaciano Δ ; lo stesso simbolo è utilizzato anche quando le variabili sono più di due.

Nel problema (5.12) non compaiono condizioni iniziali in quanto esso è stazionario. La seconda riga in (5.12) è il dato al bordo: la posizione della membrana sul lato $[0, L] \times \{0\}$ è descritta dalla funzione h mentre la membrana è vincolata sugli altri tre lati. Una condizione di compatibilità è $h(0) = h(L) = 0$.

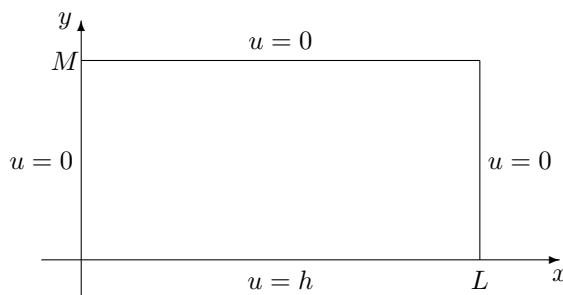


Figura 5.5: Dati al bordo per la membrana stazionaria.

Osservazione 5.3.1 Ricordando l'equazione del calore si vede che l'equazione di Laplace governa anche la distribuzione di calore all'equilibrio di un corpo omogeneo e isotropo. L'equazione non omogenea $\Delta u = f$, dove f è una funzione nota delle variabili (x, y) o (x, y, z) , è detta *equazione di Poisson* e compare, ad esempio, nella teoria dei campi conservativi: se F è un campo di forze conservative con potenziale ϕ , cioè $\nabla\phi = F$, e $\operatorname{div} F = f$, allora $\operatorname{div} \nabla\phi = \Delta\phi = f$.

La soluzione di (5.12) segue lo schema della Sezione 5.1. Decomponiamo h come in (5.2), cerchiamo u sotto la forma

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$$

e imponiamo alle funzioni u_k di soddisfare il problema con dato h_k sull'asse x :

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 & x \in [0, L], y \in [0, M] \\ u(x, 0) = h_k(x), u(x, M) = u(0, y) = u(L, y) = 0 & x \in [0, L], y \in [0, M]. \end{cases} \quad (5.13)$$

Cerchiamo quindi u_k sotto la forma

$$u_k(x, y) = f_k(y)h_k(x),$$

con f_k da determinare. Con tale scelta di u_k le condizioni al bordo in (5.13) sono soddisfatte sui lati paralleli all'asse y ; per i lati paralleli all'asse x dobbiamo richiedere $f_k(0) = 1$ e $f_k(M) = 0$. Inserendo u_k nell'equazione di Laplace si trova

$$f_k''(y)h_k \sin(\omega k x) - (\omega k)^2 f_k(y)h_k \sin(\omega k x) = 0.$$

La funzione f_k deve soddisfare il seguente *problema ai limiti o al contorno* per una equazione differenziale ordinaria di secondo ordine:

$$\begin{cases} f_k'' - (\omega k)^2 f_k = 0 \\ f_k(0) = 1, f_k(M) = 0. \end{cases}$$

Non si tratta di un problema di Cauchy (ai valori iniziali): invece di imporre i valori della funzione incognita e della sua derivata prima in uno stesso punto si impongono qui i valori della funzione agli *estremi* di un intervallo. L'integrale generale dell'equazione è

$$f_k(y) = C_1 e^{\omega k y} + C_2 e^{-\omega k y}$$

e le costanti C_1, C_2 sono determinate dal sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 e^{\omega k M} + C_2 e^{-\omega k M} = 0. \end{cases}$$

Si trova

$$C_1 = -\frac{1}{2} \frac{e^{-\omega k M}}{\sinh(\omega k M)}, \quad C_2 = \frac{1}{2} \frac{e^{\omega k M}}{\sinh(\omega k M)},$$

e dunque

$$f_k(y) = \frac{\sinh(\omega k(M - y))}{\sinh(\omega k M)}.$$

In conclusione

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh(\omega k(M - y))}{\sinh(\omega k M)} \sin(\omega k x). \quad (5.14)$$

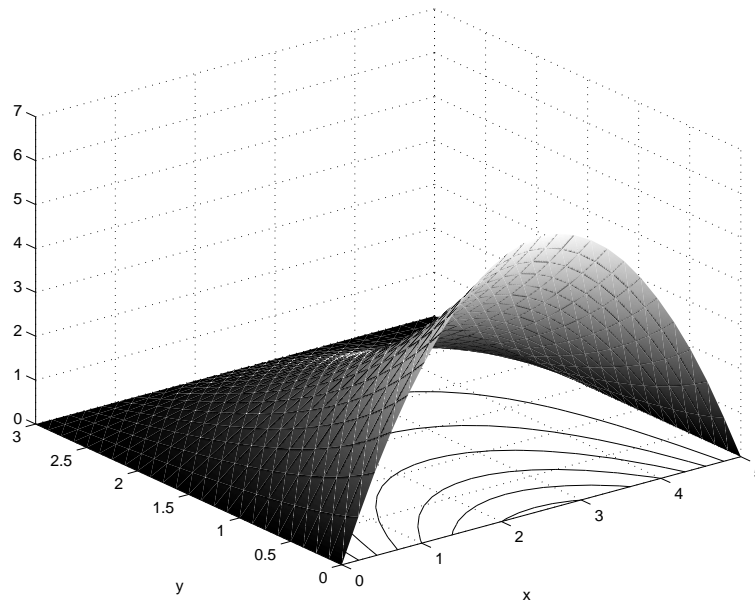


Figura 5.6: Grafico e linee di livello della soluzione dell'equazione di Laplace, $L = 5$, $M = 3$, $h(x) = x(L - x)$.

Esempio 5.3.1 Sia come negli esempi precedenti $h(x) = x(L - x)$, si veda la Figura 5.5. Dall'Esempio 5.1.1 e da (5.14) si ricava (si veda la Figura 5.6)

$$u(x, y) = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{L}k(M-y)\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{L}kM\right)} \sin\left(\frac{\pi}{L}(2n+1)x\right).$$

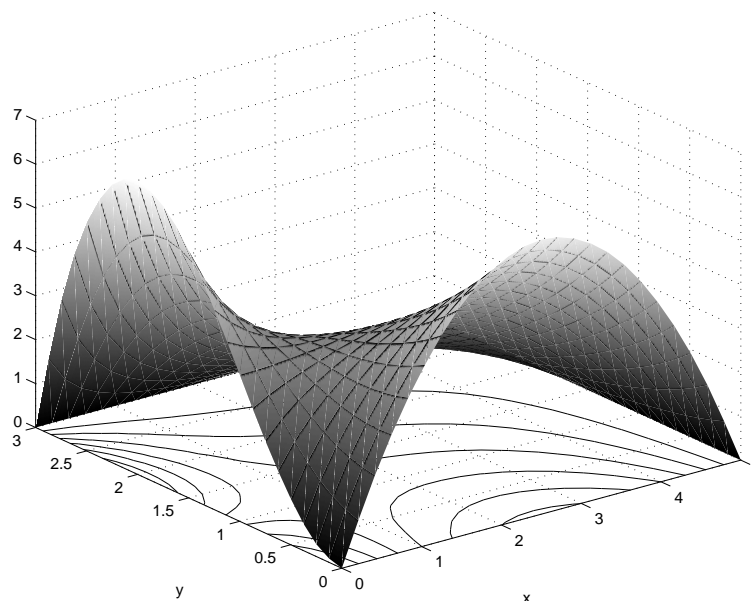


Figura 5.7: Grafico e linee di livello della soluzione dell'equazione di Laplace, $L = 5$, $M = 3$, $h_1(x) = x(L - x)$, $h_2(y) = y^2(M - y)$.

Osservazione 5.3.2 Il caso della membrana con due lati vincolati e gli altri due deformati si risolve per linearità. Consideriamo infatti il problema

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 & x \in [0, L], y \in [0, M] \\ u(x, 0) = h_1(x), u(0, y) = h_2(y), u(x, M) = u(L, y) = 0, & x \in [0, L], y \in [0, L]. \end{cases} \quad (5.15)$$

dove h_1 e h_2 descrivono le deformazioni lungo gli assi. Siano u_1 , rispettivamente u_2 , le soluzioni dei due problemi

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 & x \in [0, L], y \in [0, M] \\ u(x, 0) = h_1(x), u(x, M) = u(0, y) = u(L, y) = 0, & x \in [0, L], y \in [0, L], \\ \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 & x \in [0, L], y \in [0, M] \\ u(x, 0) = 0, u(0, y) = h_2(y), u(x, M) = u(L, y) = 0, & x \in [0, L], y \in [0, L]. \end{cases}$$

Naturalmente u_2 si risolve come sopra, ad esempio scambiando le variabili x e y e L con M . Allora $u = u_1 + u_2$ è soluzione di (5.15); si veda la Figura 5.7.

5.4 La membrana circolare

In questa sezione studiamo un problema dipendente dal tempo e in due dimensioni di spazio. Più precisamente ci occuperemo di una membrana circolare, orizzontale all'equilibrio, e ne studieremo le vibrazioni verticali; si veda anche [19] e [16, 18] per una presentazione più rigorosa.

Le ipotesi di validità del modello sono analoghe a quelle della Sezione 5.2. L'equazione che governa il moto è allora la (5.11), ovvero

$$\partial_t^2 u - c^2 (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = 0.$$

Supporremo intanto che la membrana sia fissata al contorno e di raggio R . All'equilibrio essa è identificata al cerchio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq R^2\}$ nel piano (x, y) ; le sue oscillazioni sono piccole e verticali. Supporremo infine che al tempo iniziale $t = 0$ la sua posizione sia a simmetria radiale, e che sia rilasciata con velocità nulla.

A causa della simmetria circolare della membrana conviene passare dalle coordinate cartesiane (x, y) alle coordinate polari (r, θ) e denotare la funzione che descrive la posizione della membrana con

$$u(t, x, y) = z(t, r, \theta) = u(t, r \cos \theta, r \sin \theta). \quad (5.16)$$

Lemma 5.4.1 *Si ha*

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r z) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 z.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è conseguenza del teorema di derivazione della funzione composta per funzioni di più variabili. Ad esempio, da (5.16) si ha

$$\begin{aligned} \partial_r z &= \partial_x u \cos \theta + \partial_y u \sin \theta, \\ \partial_\theta z &= -r \partial_x u \sin \theta + r \partial_y u \cos \theta. \end{aligned}$$

Derivando queste espressioni si deducono analogamente $\partial_r (r \partial_r z)$ e $\partial_\theta^2 z$, e sommando si conclude. \square

Poiché abbiamo supposto che la posizione iniziale sia a simmetria circolare, è ragionevole assumere che la membrana resti simmetrica radialmente per ogni tempo successivo. Questo vuol dire che la funzione z non dipende da θ ma solo da t e da r ; in particolare dunque, dal Lemma 5.4.1,

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r z).$$

Inoltre il dato iniziale prende la forma $z(0, r) = h(r)$, per una funzione data h . Dobbiamo quindi considerare il problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 z - c^2 \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r z) = 0 & t \geq 0, r \in [0, R] \\ z(0, r) = h(r), \partial_t z(0, r) = 0 & r \in [0, R] \\ z(t, R) = 0 & t \geq 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Per chiarezza articoliamo la soluzione del problema (5.17) in due passi.

Primo passo: soluzioni particolari dell'equazione. Diversamente dai casi precedenti, in cui la funzione h era subito decomposta in somme di funzioni trigonometriche, vedremo che in questo caso questa non è la decomposizione migliore. Procediamo modificando leggermente lo schema precedente, cercando la *funzione* z per separazione di variabili sotto la forma

$$z(t, r) = v(t)w(r).$$

Sostituendo nell'equazione in (5.17) si trova

$$v''(t)w(r) - c^2 v(t) \left(w''(r) + \frac{1}{r} w'(r) \right) = 0.$$

Possiamo dividere (formalmente) questa espressione per $v(t)w(r)$ e ottenere dunque

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = c^2 \left(\frac{w''(r)}{w(r)} + \frac{1}{r} \frac{w'(r)}{w(r)} \right).$$

Poiché il primo membro dipende unicamente da t e il secondo da r , affinché l'uguaglianza sia valida per ogni $t \geq 0$ e $r \in [0, R]$ occorre che i due membri siano uguali a un'unica costante:

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = C \quad (5.18)$$

$$c^2 \left(\frac{w''(r)}{w(r)} + \frac{1}{r} \frac{w'(r)}{w(r)} \right) = C. \quad (5.19)$$

Consideriamo la (5.18), ovvero

$$v''(t) - Cv(t) = 0. \quad (5.20)$$

Abbiamo tre casi da considerare.

- $C > 0$: l'integrale generale di (5.20) è $v(t) = C_1 e^{\sqrt{C}t} + C_2 e^{-\sqrt{C}t}$. Dall'esperienza ci aspettiamo che v sia limitata, dunque necessariamente $C_1 = 0$, ed oscillante; poiché il termine $C_2 e^{-\sqrt{C}t}$ è identicamente nullo o tende a 0 per $t \rightarrow \infty$, questo caso non è fisicamente accettabile.

- $C = 0$: l'integrale generale è $v(t) = C_1 t + C_2$. Ragionando come sopra occorre necessariamente $C_1 = 0$; poiché la soluzione z di (5.17) non può essere costante in tempo, anche questo caso non è fisicamente accettabile.
- $C < 0$: poniamo $C = -\omega^2$, con $\omega > 0$ da determinare. L'integrale generale è allora

$$v(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

che è fisicamente accettabile.

Consideriamo ora (5.19) con $C = -\omega^2$; posto $k = \frac{\omega}{c}$ essa diventa

$$w''(r) + \frac{1}{r} w'(r) + k^2 w(r) = 0. \quad (5.21)$$

Per eliminare k dall'equazione (5.21) facciamo il cambiamento di variabili $x = kr$ e poniamo dunque $w(r) = W(x) = W(kr)$. Dunque $w'(r) = kW'(x)$, $w''(r) = k^2 W''(x)$ e l'equazione (5.21) diventa

$$x^2 W''(x) + xW'(x) + x^2 W(x) = 0,$$

che non dipende più da k . Si tratta dell'equazione di Bessel di ordine 0; una sua soluzione non nulla (non l'integrale generale!) è la funzione di Bessel $J_0(x)$. Pertanto $W(x) = J_0(x)$ ne è soluzione, e

$$w(r) = J_0(kr)$$

è soluzione di (5.21). Abbiamo pertanto dimostrato che

$$z(t, r) = C_1 \cos(\omega t) J_0(kr) + C_2 \sin(\omega t) J_0(kr) \quad (5.22)$$

è soluzione dell'equazione alle derivate parziali in (5.17) per arbitrarie C_1 e C_2 .

Secondo passo: condizioni iniziali e al bordo. Affinché una qualsiasi delle funzioni z in (5.22) soddisfi la condizione iniziale $\partial_t z(0, r) = 0$ occorre che $C_2 = 0$. Pertanto consideriamo $z(t, r) = C_1 \cos(\omega t) J_0(kr)$; affinché questa funzione, a sua volta, soddisfi la condizione al bordo $z(t, R) = 0$ occorre che $C_1 \cos(\omega t) J_0(kR) = 0$. A parte il caso $C_1 = 0$, questo può accadere solo se

$$J_0(kR) = 0.$$

Si può provare che la funzione di Bessel $J_0 = J_0(x)$ ha infiniti zeri x_n , $n = 1, 2, \dots$; inoltre il parametro $k = \frac{\omega}{c}$ è al momento arbitrario, in quanto ω lo è. Scegliamo dunque k in modo che kR sia uno zero della funzione di Bessel; questo ci dà la successione di parametri

$$k_n \doteq \frac{x_n}{R}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

ovvero $\omega_n = ck_n$. Pertanto una funzione z in (5.22) soddisfa l'equazione, la condizione iniziale sulla derivata e la condizione al bordo se

$$z_n(t, r) = C_n \cos(ck_n t) J_0(k_n r).$$

Per linearità abbiamo dunque che, almeno formalmente, la funzione z definita da

$$z(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(ck_n t) J_0(k_n r) \quad (5.23)$$

è soluzione dell'equazione. Essa soddisfa la condizione iniziale sulla derivata e la condizione al bordo; le costanti C_n sono arbitrarie ma devono rendere convergente la serie (e le sue derivate). Resta solo da imporre il dato iniziale $z(0, r) = h(r)$. Calcolando (5.23) in $t = 0$ si trova

$$h(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(k_n r).$$

Questo sviluppo è analogo a quelli in serie trigonometriche delle sezioni precedenti:

- le funzioni $r \rightarrow J_0(k_n r)$, $n = 1, 2, \dots$ prendono il posto di $x \rightarrow \sin(\omega k x)$ (o, più in generale, di $\cos(\omega k x)$ e $\sin(\omega k x)$), $k = 0, 1, 2, \dots$;

- i parametri k_n , $n = 1, 2, \dots$ sono analoghi ai parametri ωk , $k = 0, 1, 2, \dots$

Senza entrare in dettagli, si può dimostrare che le funzioni $J_0(k_n r)$, $n = 1, 2, \dots$, costituiscono una “base” e i coefficienti C_n (analoghi agli a_k, b_k) sono determinati da

$$C_n = \frac{2}{[R J_0'(k_n R)]^2} \int_0^R h(r) \cdot r J_0(k_n r) dr. \quad (5.24)$$

Il termine di destra in (5.24) è la trasformata di Hankel (o di Fourier-Bessel) di ordine 0 di h . Essa gode di proprietà analoghe a quelle della trasformata di Fourier.

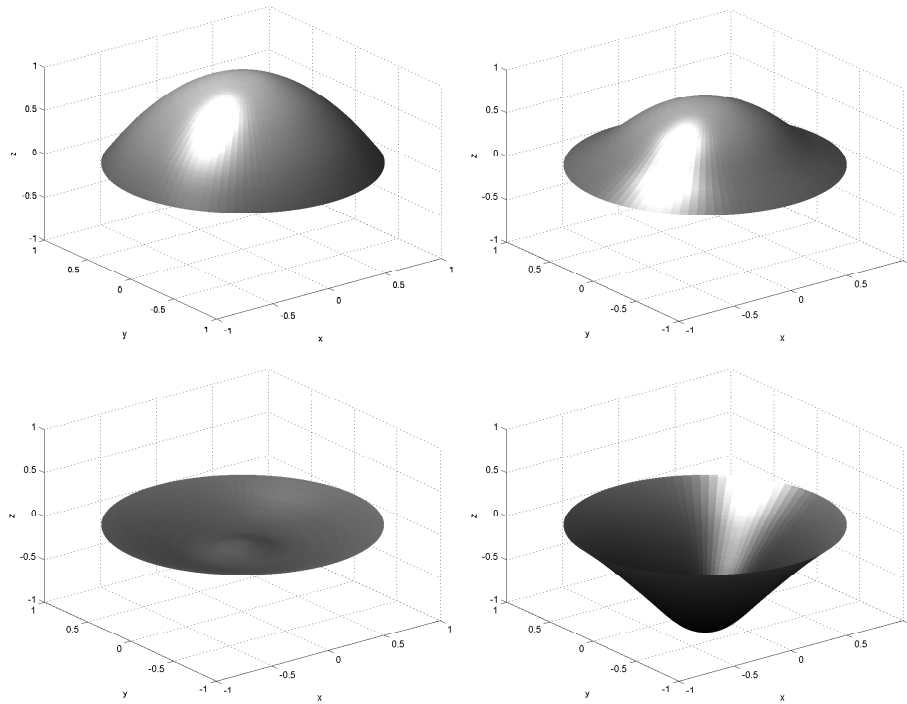


Figura 5.8: Grafico della soluzione del problema (5.17) a tempi diversi (in ordine crescente: da sinistra verso destra, dall'alto in basso). Qui $R = 1$, $c = 1$, $h(r) = 1 - r^2$, $t = 0, 10, 20, 30$.

Esercizio 5.4.1 Generalizzare il Lemma 5.4.1 alle coordinate ellittiche nel seguente modo: per $a, b \in \mathbb{R}$ si ponga $u(x, y) = u(ar \cos \theta, br \sin \theta) = z(r, \theta)$ e si provi che

$$a^2 \partial_x^2 u + b^2 \partial_y^2 u = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r z) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 z.$$

Risposta. Si proceda come nel Lemma 5.4.1.

Esercizio 5.4.2 Perché uno sviluppo del dato iniziale h analogo a quello in (5.2) non sarebbe stato utile per risolvere (5.17)?

Risposta. Si veda l'equazione (5.21).

Capitolo 6

La trasformata di Fourier

In questo capitolo introduciamo la trasformata di Fourier per funzioni di una variabile reale e ne studiamo le proprietà fondamentali. La trattazione è estremamente semplificata; si veda [3] per una rapida introduzione all'argomento, [2, 14] per più dettagli e informazioni, [20] per gli esercizi e le applicazioni. Va detto che per la trasformata di Fourier l'integrale più adatto non è quello secondo Riemann ma quello di Lebesgue; si veda ad esempio [8] per una presentazione elementare della trasformata di Fourier in questo ambiente.

Una motivazione all'introduzione della trasformata di Fourier è la seguente. Se f è una funzione T -periodica allora la sua serie di Fourier in forma complessa si può scrivere

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i2\pi k\nu x},$$

per $\nu = \frac{1}{T}$. La funzione f è dunque "ricostruita" tramite la somma infinita delle funzioni oscillanti $c_k e^{i2\pi k\nu x}$ di frequenza $\nu_k = k\nu$, con $k \in \mathbb{Z}$; tali frequenze sono multipli interi della frequenza fondamentale ν . In modo approssimativo, la trasformata di Fourier generalizza la formula qui sopra al caso di frequenze arbitrarie, senza supporre più la periodicità della funzione f : la somma viene rimpiazzata da un integrale fatto rispetto alla frequenza.

6.1 Definizione e prime proprietà

In questa sezione definiamo la trasformata di Fourier di una funzione f di variabile reale a valori reali; le ipotesi che faremo su f non sono tanto le più generali quanto le più semplici.

Definizione 6.1.1 *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti; essa è detta assolutamente integrabile se il suo valore assoluto è integrabile, cioè se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty. \quad (6.1)$$

L'integrale qui sopra è un integrale generalizzato, da intendersi come limite di integrali di Riemann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R |f(x)| dx.$$

In particolare l'integrale è convergente se il limite a destra esiste finito. L'ipotesi di continuità a tratti assicura che l'integrale di Riemann $\int_{-R}^R |f(x)| dx$ esiste finito per ogni $R > 0$. Si può provare che se f è assolutamente integrabile allora essa è anche integrabile, [7].

Esempio 6.1.1

- La funzione xe^{-x^2} è continua e assolutamente integrabile:

$$\int_{-R}^R |xe^{-x^2}| dx = 2 \int_0^R xe^{-x^2} dx = \left[-e^{-x^2} \right]_0^R = \left(1 - e^{-R^2} \right) \rightarrow 1, \quad \text{per } R \rightarrow +\infty,$$

e perciò

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = 1.$$

- La funzione $\sin x$ è continua ma non è assolutamente integrabile: l'integrale del suo valore assoluto è divergente. Notiamo infatti che la funzione $|\sin x|$ è π -periodica; nell'intervallo $[0, R]$ essa avrà completato $\left[\frac{R}{2\pi}\right] > \frac{R}{2\pi} - 1$ cicli, in quanto $[x] > x - 1$. Inoltre $\int_0^\pi \sin x \, dx = 2$ e dunque

$$\int_{-R}^R |\sin x| \, dx = 2 \int_0^R |\sin x| \, dx \geq 4 \left[\frac{R}{2\pi}\right] > 4 \left(\frac{R}{2\pi} - 1\right) \rightarrow +\infty.$$

Analogamente, ogni funzione f non nulla di periodo T non è assolutamente integrabile.

Definizione 6.1.2 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti e assolutamente integrabile; la trasformata di Fourier di f è la funzione $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$[\mathcal{F}(f)](x) = \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} \, dx. \quad (6.2)$$

Osservazione 6.1.1

- Si ricordi che

$$e^{-i2\pi\nu x} = \cos(2\pi\nu x) - i \sin(2\pi\nu x).$$

In particolare $|e^{-i2\pi\nu x}| = 1$; come al solito si usa il simbolo $|\cdot|$ per indicare sia il modulo di un numero complesso (come in questo caso) che il valore assoluto (come in (6.1)). La funzione integranda in (6.2) è dunque a valori complessi; la definizione dell'integrale è però simile a quella relativa a funzioni reali e in particolare esso gode di analoghe proprietà. In particolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) \, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(2\pi\nu x) \, dx. \quad (6.3)$$

- A causa dell'assoluta integrabilità di f il valore $\hat{f}(\nu)$ è finito per ogni $\nu \in \mathbb{R}$:

$$|\hat{f}(\nu)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} \, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-i2\pi\nu x}| \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx.$$

Questo vuol dire che la trasformata di Fourier \hat{f} di f assume valori, nel piano complesso, compresi nel cerchio di centro l'origine e raggio $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx$. Si noti inoltre che

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx. \quad (6.4)$$

- Se x ha le dimensioni fisiche di un tempo allora la variabile ν , comparando nell'argomento della funzione esponenziale complessa, deve avere le dimensioni fisiche di una frequenza. Nel seguito, pur continuando a indicare con x la variabile indipendente, converrà aver sempre presente questa interpretazione.

Proposizione 6.1.1 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti assolutamente integrabile. Allora

$$\text{se } f \text{ è pari: } \hat{f}(\nu) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) \, dx, \quad (6.5)$$

$$\text{se } f \text{ è dispari: } \hat{f}(\nu) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(2\pi\nu x) \, dx. \quad (6.6)$$

Inoltre se f è pari (dispari) allora \hat{f} è pari (risp., dispari).

Dimostrazione. Le formule seguono immediatamente da (6.3). Se poi f è pari allora

$$\hat{f}(-\nu) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(-2\pi\nu x) \, dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) \, dx = \hat{f}(\nu)$$

e analogamente se f è dispari. □

Le trasformate (6.5), (6.6) prendono rispettivamente il nome di *trasformata coseno* e *trasformata seno*. Sono di frequente impiego nelle applicazioni.

Enunciamo ora senza dimostrazione alcune prime proprietà della trasformata di Fourier.

Teorema 6.1.1 *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti e assolutamente integrabile. Allora*

(i) *la trasformata di Fourier \hat{f} è continua;*

(ii) $\lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$.

Si noti l'effetto regolarizzante dell'integrazione: \hat{f} è continua anche se f è discontinua. Il seguente risultato richiede ipotesi un po' più forti del precedente; anche in questo caso omettiamo la dimostrazione.

Teorema 6.1.2 *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 a tratti e assolutamente integrabile. Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}. \quad (6.7)$$

Si noti che qui sopra l'integrazione viene fatta rispetto alla variabile ν ; inoltre l'esponentiale complessa ha segno opposto a quella in (6.2). Conseguenza del Teorema 6.1.2 è che nei punti in cui f è continua si ha

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu.$$

Se f non è continua scriveremo al solito, come per le serie di Fourier, $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu \sim f(x)$ invece della (6.7). Il Teorema 6.1.2 motiva la seguente definizione.

Definizione 6.1.3 *Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua a tratti e assolutamente integrabile. La trasformata di Fourier inversa di g è la funzione*

$$[\mathcal{F}^{-1}(g)](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu.$$

Naturalmente per la funzione complessa g essere assolutamente integrabile significa che il suo modulo complesso $|g|$ è integrabile. Si passa formalmente dalla definizione di \mathcal{F} a quella di \mathcal{F}^{-1} scambiando x con ν e i con $-i$. Se g è pari o dispari si definiscono in modo ovvio le trasformate coseno e seno inverse.

Osservazione 6.1.2 Se sia le operazioni $\mathcal{F}(f)$ che $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ hanno senso e f è continua si ha dunque

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f,$$

ovvero

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx \iff f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu. \quad (6.8)$$

Possiamo ora fare un primo confronto schematico tra serie e trasformata di Fourier; usiamo la notazione $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ e la forma complessa di una serie di Fourier.

	serie di Fourier	trasformata di Fourier
ipotesi	f T -periodica, C^1 a tratti	f ass. integrabile, C^1 a tratti
rappresentazione di f	$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i2\pi k\nu x}$	$f(x) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu$
“coefficienti”	$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i2\pi k\nu x} dx$	$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx$
proprietà dei coefficienti	$c_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$	$\hat{f}(\nu) \rightarrow 0$ per $\nu \rightarrow \pm\infty$

La formula (6.7), e l'interpretazione che abbiamo già dato dei coefficienti di Fourier c_k , permette di interpretare $\hat{f}(\nu)$ in maniera intuitiva come l'“ampiezza” necessaria al termine oscillante $e^{i2\pi\nu x}$ per “ricostruire” $f(x)$ tramite integrazione. Si noti inoltre l'analogia tra $c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx$ e $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, “ampiezze” del termine non oscillante.

6.2 Esempi

Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}$, per brevità useremo talvolta nel seguito la notazione

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases} \quad (6.9)$$

La funzione χ_E è detta *funzione caratteristica dell'insieme E* ed è indicata con la lettera greca *chi*. Negli esempi seguenti la terminologia è quella comunemente adottata nella teoria dei segnali [2, 14] ma di uso comune in tutti i rami delle scienze applicate.

Esempio 6.2.1 (Seno cardinale) Introduciamo preliminarmente una funzione che si incontra spesso negli esempi relativi alle trasformate di Fourier: la funzione *seno cardinale*

$$\text{sinc } x \doteq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad (6.10)$$

intendendo $\text{sinc } 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \text{sinc } x = 1$, si veda Figura 6.1. Questa convenzione sarà usata in seguito per espressioni analoghe. La funzione sinc si annulla nei punti $\pm 1, \pm 2, \dots$. Essa non è periodica a causa dello smorzamento dovuto al denominatore πx . Fuori dall'origine, ad esempio negli intervalli $[2, +\infty)$ o $(-\infty, -2]$ (ciò è dovuto al fatto che $\text{sinc}(0) = 1$), le sue oscillazioni hanno lunghezza d'onda (distanza tra due massimi o due minimi successivi) pari a 2.

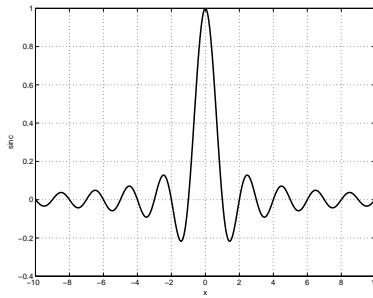


Figura 6.1: La funzione seno cardinale.

Esempio 6.2.2 (Impulso rettangolare) Sia p_T la funzione definita da

$$p_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si tratta di una funzione C^1 a tratti, pari, detta *impulso rettangolare di durata T*; usando la notazione (6.9) si ha $p_T(x) = \chi_{[-T/2, T/2]}$. Usando la (6.5) si trova (Figura 6.2)

$$\widehat{p}_T(\nu) = 2 \int_0^{T/2} \cos(2\pi\nu x) dx = T \frac{\sin(\pi T\nu)}{\pi T\nu} = T \text{sinc}(T\nu). \quad (6.11)$$

L'espressione a destra ha senso solo se $\nu \neq 0$; ma da (6.4) si trova subito che $\widehat{p}_T(0) = T = \lim_{\nu \rightarrow 0} \widehat{p}_T(\nu)$ in quanto $\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi T\nu)}{\pi T\nu} = 1$. Ritroviamo così la proprietà di continuità di \widehat{p}_T .

Fuori dall'origine, le oscillazioni di \widehat{p}_T hanno lunghezza d'onda $\frac{2}{T}$ e dunque aumentano col crescere di T ; la funzione \widehat{p}_T si annulla nei punti $\pm \frac{1}{T}, \pm \frac{2}{T}, \dots$. Il termine T che compare a fattore in (6.11) governa solo la scala verticale.

Esempio 6.2.3 (Impulso unitario) Sia $u_T(x) = \frac{1}{T} p_T(x)$ la funzione *impulso unitario di durata T*, ovvero

$$u_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{se } -\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

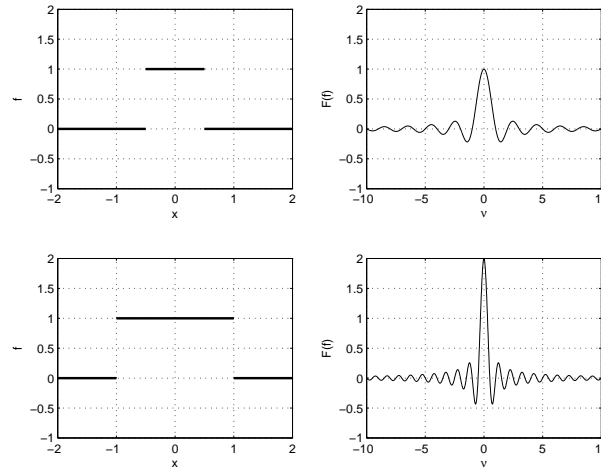


Figura 6.2: La funzione $f(x) = p_T(x)$ e la sua trasformata di Fourier; sopra $T = 1$, sotto $T = 2$.

Il nome viene dal fatto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_T(x) dx = 1.$$

Da (6.11)

$$\widehat{u}_T(\nu) = \frac{\sin(\pi T\nu)}{\pi T\nu} = \text{sinc}(T\nu).$$

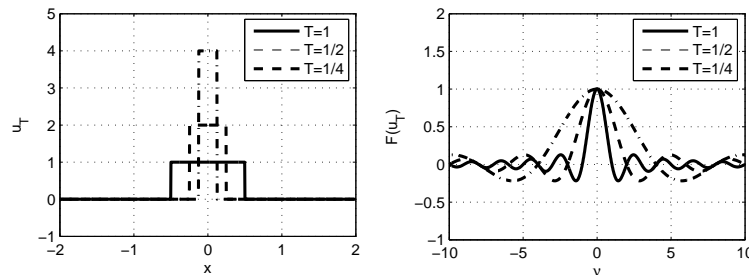


Figura 6.3: La $u_T(x)$ e la sua trasformata di Fourier.

Esempio 6.2.4 (Impulso δ) Consideriamo la funzione impulso unitario $u_T(x)$. Se $x \neq 0$ si ha $\lim_{T \rightarrow 0} u_T(x) = 0$ mentre $\lim_{T \rightarrow 0} u_T(0) = +\infty$. Inoltre si ha che $\int_{-\infty}^{+\infty} u_T(x) dx = 1$ per ogni $T > 0$. In modo impreciso possiamo definire dunque una “funzione”

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Non si tratta certamente di una funzione nel senso usuale del termine (in questo caso i valori assunti devono essere reali) ma la notazione è comoda e la funzione δ è di larghissimo uso nelle applicazioni. Essa è anche detta *funzione di Dirac*, e da qui viene la notazione con la lettera δ . La proprietà di avere l'integrale unitario, che caratterizza la funzione δ insieme alla sua definizione, è “motivata” dall'analoga proprietà delle funzioni approssimanti.

Si noti infine che $\lim_{T \rightarrow 0} \widehat{u}_T(\nu) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi T\nu)}{\pi T\nu} = 1$ da cui, formalmente,

$$\widehat{\delta}(\nu) \equiv 1.$$

Proprio perché abbiamo ragionato formalmente questa formula non contraddice il punto (ii) del Teorema 6.1.1. Questi argomenti formali hanno un riscontro rigoroso nell'ambito della *teoria delle distribuzioni* (di cui la δ è un esempio).

Esempio 6.2.5 Sia f_n la funzione definita per $n \in \mathbb{N}$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x) & \text{se } |x| \leq n, \\ 0 & \text{se } |x| > n, \end{cases}$$

si veda la Figura 6.4. Le funzioni f_n sono dispari; applicando la formula di Werner

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

si ha

$$\begin{aligned} \widehat{f_n}(\nu) &= -2i \int_0^{+\infty} \sin(2\pi\nu x) \sin(2\pi x) dx \\ &= i \int_0^n \cos[2\pi(\nu + 1)x] dx - i \int_0^n \cos[2\pi(\nu - 1)x] dx \\ &= i \begin{cases} \mp n & \text{se } \nu = \pm 1 \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[2n\pi(\nu + 1)]}{\nu + 1} - \frac{\sin[2n\pi(\nu - 1)]}{\nu - 1} \right] & \text{se } \nu \neq \pm 1 \end{cases} \\ &= in (\text{sinc}(2n(\nu + 1)) - \text{sinc}(2n(\nu - 1))). \end{aligned}$$

Si noti che la funzione $\widehat{f_n}$ è continua; questo era noto a priori e in particolare dunque si potevano calcolare i valori $\widehat{f_n}(\pm 1)$ calcolando i limiti $\lim_{\nu \rightarrow \pm 1} \widehat{f_n}(\nu)$. Si veda il grafico della parte immaginaria della trasformata di f_n in Figura 6.4.

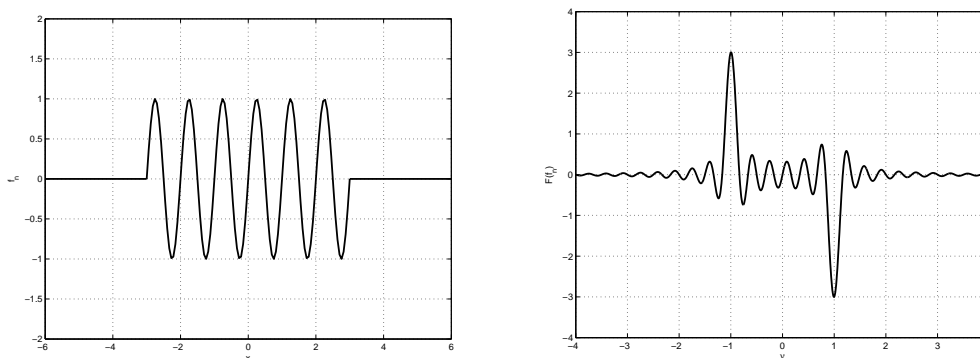


Figura 6.4: La funzione f_n (a sinistra) e la parte immaginaria della sua trasformata di Fourier (a destra). Qui $n = 3$.

In riferimento al confronto fatto sopra tra le serie di Fourier e la trasformata di Fourier, si noti che la lunghezza d'onda della parte oscillante della funzione f_n è 1; il massimo e il minimo di $\widehat{f_n}$ sono assunti nei punti ± 1 .

Osservazione 6.2.1 La definizione (6.2) che abbiamo dato di trasformata di Fourier, e che mette in evidenza la sua similitudine con le serie di Fourier, può variare leggermente a seconda degli autori. Ad esempio è abbastanza comune la definizione (che mettiamo tra virgolette per non confonderla con la (6.2))

$$\text{“ } \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\nu x} dx \text{ ”}.$$

Esercizio 6.2.1 Provare che la funzione $f(x) = e^{-|x|}$ è assolutamente integrabile. E' assolutamente integrabile la funzione $e^{-|x|} \cos x$? E' assolutamente integrabile la funzione $g(x) = x$? Quanto vale $\int_{-R}^R x dx = 0$?

Risposta. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = 2$; sì: $e^{-|x|} \cos x \leq e^{-|x|}$; no; 0.

Esercizio 6.2.2 Provare che $\text{sinc}(x)$ non è assolutamente integrabile.

Risposta. Si ha $\text{sinc}''(x) = -\frac{\sin(\pi x)}{x^3}$; dunque in ogni intervallo $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, la funzione $|\text{sinc}|$ è convessa. Pertanto ogni corda sta sotto al suo grafico, e dunque il triangolo di vertici $(n, 0)$, $(n+1, 0)$, $(n + \frac{1}{2}, \text{sinc}(n + \frac{1}{2}))$ sta interamente sotto il grafico della funzione $|\text{sinc}|$. L'area del triangolo è $\frac{1}{2}|\text{sinc}(n + \frac{1}{2})| = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(n + \frac{1}{2})} \geq \frac{1}{2\pi(n+1)}$. Di conseguenza $\int_n^{n+1} |\text{sinc} x| dx \geq \frac{1}{2\pi(n+1)}$. Poiché la serie di termine generale $\frac{1}{2\pi(n+1)}$ è divergente, si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc} x| dx = +\infty$.

Esercizio 6.2.3 Dare un esempio di una funzione continua assolutamente integrabile che non tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$.

Risposta. Ad esempio: $f(x) = 0$ se $x < 1$; in ogni intervallo $[n, n+1]$, $n = 1, 2, \dots$, f è nulla in $[n + \frac{1}{n^3}, n+1]$ e in $[n, n + \frac{1}{n^3}]$ il suo grafico è il triangolo equilatero di base $[n, n + \frac{1}{n^3}]$ e altezza n .

Esercizio 6.2.4 Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione f definita da $f(x) = 0$ se $|x| > T/2$, $f(x) = -1$ se $-T/2 \leq x \leq 0$, $f(x) = 1$ se $0 < x \leq T/2$.

Risposta. f è dispari; si trova $\hat{f}(\nu) = -iT \frac{1 - \cos(\pi T \nu)}{\pi T \nu}$.

6.3 Operazioni con la trasformata di Fourier

In questa sezione studiamo le proprietà della trasformata di Fourier rispetto alle operazioni di traslazione, dilatazione-compressione, derivazione.

Lemma 6.3.1 (Linearità) La trasformata di Fourier è lineare: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathcal{F}(af + bg)(\nu) = a\mathcal{F}(f)(\nu) + b\mathcal{F}(g)(\nu).$$

La dimostrazione è conseguenza dell'analogia proprietà di linearità dell'integrale.

Lemma 6.3.2 Valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \text{formula del ritardo: } \mathcal{F}(f(x - x_0))(\nu) &= e^{-i2\pi x_0 \nu} \mathcal{F}(f)(\nu), \quad x_0 \in \mathbb{R} \\ \text{formula di riscalamento: } \mathcal{F}(f(ax))(\nu) &= \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\nu}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. La formula del ritardo segue facendo il cambiamento di variabili $y = x - x_0$ nell'integrale. Analogamente per la formula di riscalamento si fa il cambiamento di variabili $y = ax$, osservando che gli estremi di integrazione non cambiano se $a > 0$, mentre si invertono se $a < 0$. \square

Osservazione 6.3.1 I nomi dati a queste formule sono evidenti (si veda le Figure 6.5 e 6.6).

- Se $x_0 > 0$ allora il grafico della funzione $f(x - x_0)$ è traslato verso destra di x_0 ; se x rappresenta una variabile temporale ciò vuol dire che esso è ritardato di x_0 . La trasformata di Fourier è la stessa a meno del fattore oscillante $e^{-i2\pi x_0 \nu}$; si noti che le oscillazioni aumentano col ritardo. In Figura 6.5 si è rappresentata solo la parte reale della trasformata.
- La funzione $f(ax)$ ha lo stesso grafico di $f(x)$ ma rispetto ad un asse delle ascisse riscalato di $1/a$: se $a > 1$ il grafico risulta compresso, se $0 < a < 1$ risulta dilatato. Si noti l'effetto sulla trasformata di Fourier: se f è compressa di $a > 1$ allora \hat{f} è dilatata di $1/a$ e riscalata verticalmente di $1/a$; analogamente se $0 < a < 1$.
- Per $a < 0$ la formula del riscalamento inverte il verso dell'asse x . In particolare

$$\widehat{f(-x)}(\nu) = \hat{f}(-\nu). \quad (6.12)$$

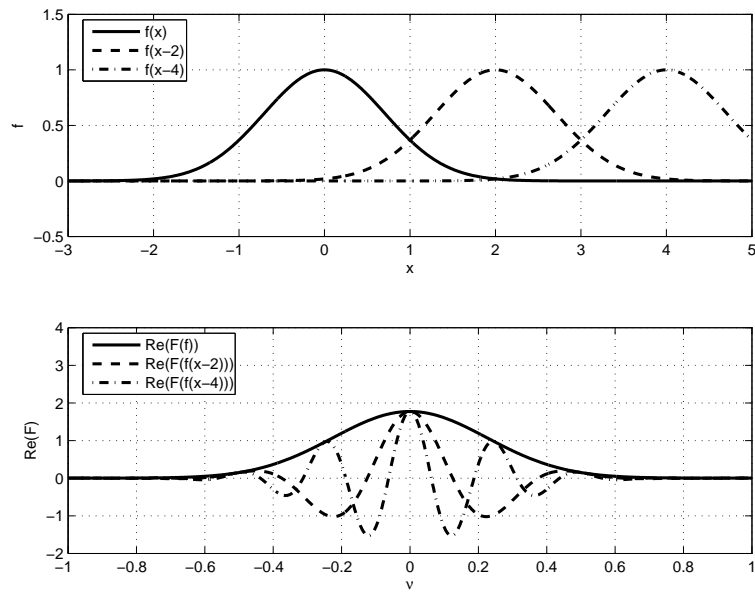


Figura 6.5: La funzione f , alcune sue ritardate e le relative trasformate di Fourier.

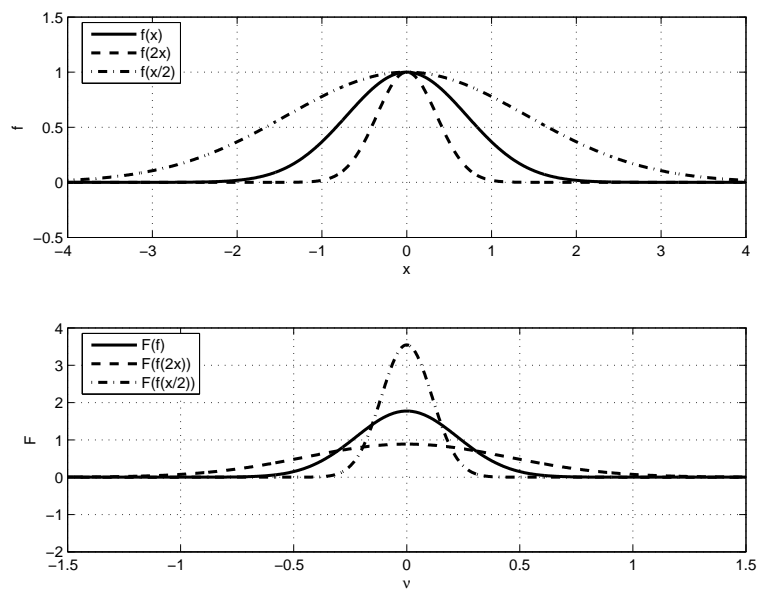


Figura 6.6: La funzione f , una sua compressa, dilatata e le relative trasformate di Fourier.

Osservazione 6.3.2 Le formule del ritardo e di riscalamento si possono fondere nell'unica formula

$$\mathcal{F}(f(ax - x_0))(\nu) = \frac{1}{|a|} e^{-i2\pi \frac{x_0}{a} \nu} \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right). \quad (6.13)$$

Naturalmente la (6.13) può essere dimostrata direttamente per cambiamento di variabili, ma la deduciamo dal Lemma 6.3.2. Poniamo $g(x) = f(ax)$; si ha allora $f(ax - x_0) = g(x - \frac{x_0}{a})$; applicando prima la formula del ritardo e poi quella di riscalamento a g si ha

$$\mathcal{F}(f(ax - x_0))(\nu) = \mathcal{F}\left(g\left(x - \frac{x_0}{a}\right)\right)(\nu) = e^{-i2\pi \nu \frac{x_0}{a}} \mathcal{F}(g)(\nu) = e^{-i2\pi \nu \frac{x_0}{a}} \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\nu}{a}\right).$$

Esempio 6.3.1 Per la formula del ritardo $\widehat{p_T(x-2)}(\nu) = T e^{-i4\pi\nu} \text{sinc}(T\nu)$.

Esempio 6.3.2 Calcoliamo per $a > 0$ la trasformata di Fourier delle funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ e^{-ax} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = e^{-a|x|}, \quad h(x) = \text{sgn}(x)e^{-a|x|}.$$

Possiamo fare direttamente il calcolo della trasformata di Fourier di f , ma calcoliamo dapprima per semplicità la trasformata di

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\nu) &= \int_0^{+\infty} e^{-(1+i2\pi\nu)x} dx = -\frac{1}{1+i2\pi\nu} \left[e^{-(1+i2\pi\nu)x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+i2\pi\nu} \\ &= \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2} - i \frac{2\pi\nu}{1+4\pi^2\nu^2}. \end{aligned}$$

Poiché $f(x) = f_1(ax)$, dalla formula di riscalamento si ha

$$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{a} \hat{f}_1\left(\frac{\nu}{a}\right) = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2} - i \frac{2\pi\nu}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}.$$

Si ha poi $g(x) = f(x) + f(-x)$ e dunque, per la linearità e (6.12),

$$\hat{g}(\nu) = \hat{f}(\nu) + \hat{f}(-\nu) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}.$$

Infine $h(x) = f(x) - f(-x)$ da cui

$$\hat{h}(\nu) = \hat{f}(\nu) - \hat{f}(-\nu) = -i \frac{4\pi\nu}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}.$$

Esempio 6.3.3 (La gaussiana) Consideriamo la funzione gaussiana di valor medio $\mu \in \mathbb{R}$ e deviazione standard $\sigma > 0$:

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Poiché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad (6.14)$$

si deduce per cambiamento di variabili $y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mu,\sigma)(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = 1, \end{aligned}$$

per ogni μ, σ . Calcoliamo dapprima la trasformata di Fourier della funzione e^{-x^2} . Posto

$$F(\nu) = \mathcal{F}(e^{-x^2})(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i2\pi\nu x} dx, \quad (6.15)$$

deriviamo entrambi i membri rispetto a ν ; a destra in particolare deriviamo formalmente sotto il segno di integrale (si può dimostrare che questo procedimento è corretto). Integrando quindi per parti si trova

$$\begin{aligned} F'(\nu) &= -i2\pi\nu \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} e^{-i2\pi\nu x} dx \\ &= -i2\pi\nu \left\{ \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} e^{-i2\pi\nu x} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i2\pi\nu x} (-i2\pi\nu) dx \right\} \\ &= -2\pi^2\nu F(\nu). \end{aligned}$$

Pertanto, tenendo conto di (6.14) la funzione $F(\nu)$ deve soddisfare il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} F'(\nu) + 2\pi^2\nu F(\nu) = 0 \\ F(0) = \sqrt{\pi}. \end{cases}$$

Si tratta di una equazione a variabili separabili con fattore integrante $e^{\pi^2\nu^2}$. Pertanto

$$\mathcal{F}(e^{-x^2})(\nu) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2\nu^2}.$$

Posto $f(x) = e^{-x^2}$ si trova subito che

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} f\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma}}\right).$$

Pertanto da (6.13) segue

$$\mathcal{F}(G_{\mu,\sigma})(\nu) = e^{-i2\pi\mu\nu} e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}.$$

Se $\mu = 0$ l'espressione a destra si riduce a $e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}$; essa è simile a una gaussiana ma non si tratta di una gaussiana; ad esempio il suo integrale non vale 1 e in 0 essa vale 1 per ogni σ . Si veda la Figura 6.7.

Si noti che $\lim_{\sigma \rightarrow 0} G_{\mu,\sigma}(x) = \delta(x)$; infatti il limite puntuale dà esattamente $+\infty$ se $x = 0$ e 0 altrimenti; inoltre le funzioni approssimanti hanno integrale unitario.

Per concludere, osserviamo che in (6.15) avremmo potuto adoperare la trasformata coseno, in quanto la funzione e^{-x^2} è pari; i calcoli seguenti sarebbero stati analoghi a quelli fatti sopra.

Nel teorema seguente indichiamo la derivata di una funzione $f = f(x)$ con $D_x f$ sia per chiarezza di notazioni che per evidenziare lo scambio di derivate con prodotti effettuato dalla trasformata di Fourier. Analogamente, la derivata della trasformata $\hat{f} = \hat{f}(\nu)$ sarà indicata con $D_\nu \hat{f}$. Gli indici per le derivate saranno omessi nel seguito: sarà chiaro rispetto a quale variabile viene eseguita la derivata.

Teorema 6.3.1 *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile; supponiamo che sia f che f' siano assolutamente integrabili e f infinitesima a $\pm\infty$. Allora*

$$\widehat{D_x f}(\nu) = i2\pi \cdot \nu \hat{f}(\nu) \quad (6.16)$$

$$\widehat{x f}(\nu) = \left(\frac{i}{2\pi}\right) \cdot D_\nu \hat{f}(\nu). \quad (6.17)$$

Osservazione 6.3.3 A meno di costanti moltiplicative, la trasformata di Fourier trasforma dunque derivate in prodotti e viceversa. Si noti che la derivata in (6.16) è eseguita rispetto alla variabile x , mentre in (6.17) è rispetto alla variabile ν .

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima (6.16). Si ha, integrando per parti (ora $D = D_x$),

$$\begin{aligned} \widehat{D f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i \nu x} dx = [f(x) e^{-2\pi i \nu x}]_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi i \nu \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \nu x} dx \\ &= 2\pi i \nu \hat{f}(\nu) \end{aligned}$$

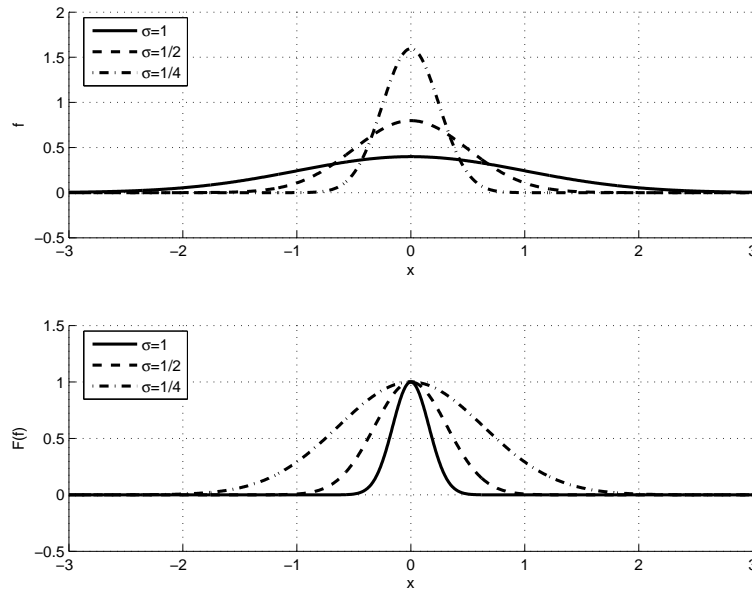


Figura 6.7: La funzione gaussiana e la sua trasformata.

poiché il fattore $e^{-2\pi i\nu x}$ è limitato mentre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ per ipotesi.

Per quanto riguarda (6.17) osserviamo che, integrando per parti come sopra (ora $D = D_\nu$),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[D\hat{f}](x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} D\hat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu x} d\nu = \left[\hat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - 2\pi ix \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu x} d\nu \\ &= -2\pi ix \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f](x) \\ &= -2\pi ix f(x), \end{aligned}$$

in quanto \hat{f} è infinitesima a $\pm\infty$ per le usuali proprietà delle trasformate di Fourier. Applicando la trasformata di Fourier a entrambi i membri dell'identità si ha (ora $D = D_\nu$)

$$D\hat{f}(\nu) = -2\pi i \cdot \widehat{x f}(\nu)$$

da cui (6.17). □

Corollario 6.3.1 Sotto ipotesi analoghe a quelle del Teorema 6.3.1 valgono le seguenti formule:

$$\widehat{D^n f}(\nu) = (i2\pi)^n \cdot \nu^n \hat{f}(\nu) \quad (6.18)$$

$$\widehat{x^n f}(\nu) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \cdot D^n \hat{f}(\nu). \quad (6.19)$$

Dimostrazione. Basta iterare (6.16) e (6.17). □

Osservazione 6.3.4 Il Teorema 6.3.1 vale anche per funzioni continue ovunque (nella dimostrazione di (6.17) serve per avere $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f] = f$) e derivabili tranne che in un numero finito di punti angolosi.

Esempio 6.3.4 Si consideri la funzione *impulso triangolare di durata $2T$* , si veda la Figura 6.8:

$$q_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > T \\ 1 + \frac{x}{T} & \text{se } -T \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{x}{T} & \text{se } 0 \leq x \leq T. \end{cases}$$

La terminologia è leggermente diversa da quella usata per la funzione impulso rettangolare; essa è motivata dal fatto che così l'area sottesa dal grafico di q_T è T . Il calcolo della trasformata di

Fourier di q_T può essere fatto direttamente come segue:

$$\begin{aligned}\widehat{q_T}(\nu) &= 2 \int_0^T \left(1 - \frac{x}{T}\right) \cos(2\pi x\nu) dx \\ &= \left[2 \left(1 - \frac{x}{T}\right) \frac{\sin(2\pi x\nu)}{2\pi\nu}\right]_0^T + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin(2\pi x\nu)}{\pi\nu} dx \\ &= \frac{1}{2T(\pi\nu)^2} (1 - \cos(2\pi T\nu)) = T \operatorname{sinc}^2(T\nu),\end{aligned}$$

in quanto $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.

Ritroviamo ora lo stesso risultato procedendo in altro modo. La funzione q_T è continua ovunque e derivabile ad eccezione dei punti $\pm T$ e 0; la sua derivata è

$$\begin{aligned}q_T'(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > T \\ \frac{1}{T} & \text{se } -T < x < 0 \\ -\frac{1}{T} & \text{se } 0 < x < T \end{cases} \\ &= \frac{1}{T} \left(p_T \left(x + \frac{T}{2}\right) - p_T \left(x - \frac{T}{2}\right) \right).\end{aligned}$$

Applicando la formula del ritardo e (6.11) si ottiene

$$\begin{aligned}\widehat{q_T}'(\nu) &= \frac{1}{T} (e^{i\pi T\nu} \widehat{p_T}(\nu) - e^{-i\pi T\nu} \widehat{p_T}(\nu)) \\ &= \frac{2i}{T} \frac{e^{i\pi T\nu} - e^{-i\pi T\nu}}{2i} \widehat{p_T}(\nu) \\ &= 2i \sin(\pi T\nu) \operatorname{sinc}(T\nu).\end{aligned}$$

Si noti che $\widehat{q_T}'$ è puramente immaginaria: infatti q_T è pari e dunque q_T' è dispari. Per l'Osservazione 6.3.4 e (6.16) si ha $\widehat{q_T}'(\nu) = i2\pi\nu \widehat{q_T}(\nu)$ e dunque

$$\widehat{q_T}(\nu) = \frac{\widehat{q_T}'(\nu)}{i2\pi\nu} = \frac{\sin(\pi T\nu)}{\pi\nu} \operatorname{sinc}(T\nu) = T \operatorname{sinc}^2(T\nu).$$

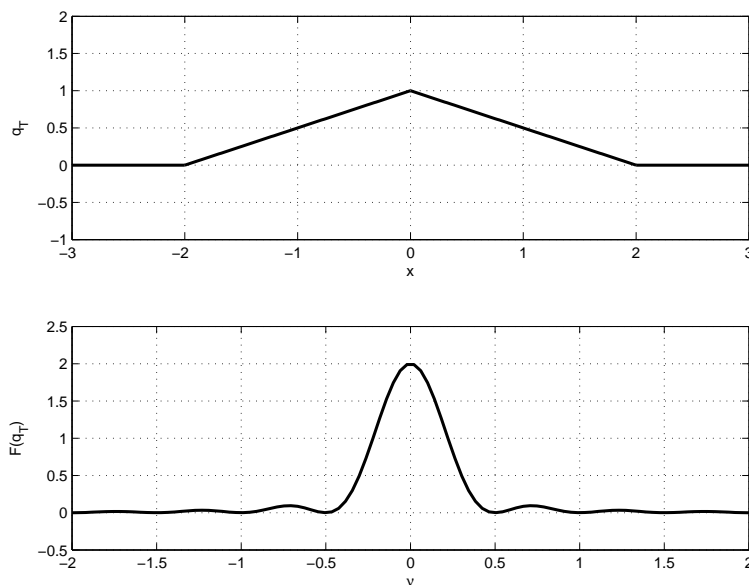


Figura 6.8: La funzione impulso triangolare e la sua trasformata di Fourier; qui $T = 3$.

Esempio 6.3.5 Facciamo vedere ora che, nonostante l'Osservazione 6.3.4, il Teorema 6.3.1 non vale più se l'ipotesi di continuità non è soddisfatta. Consideriamo infatti la funzione

$$d_T(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si tratta di una funzione C^1 a tratti, dispari. La trasformata di Fourier di d_T è dunque calcolata direttamente usando la trasformata seno:

$$\widehat{d_T}(\nu) = -2i \int_0^{+\infty} d_T(x) \sin(2\pi\nu x) dx = i \frac{T}{2\pi\nu} [\cos(T\pi\nu) - \text{sinc}(T\nu)]. \quad (6.20)$$

Si noti ora che $d_T'(x) = p_T(x)$ per $x \neq \pm \frac{T}{2}$. Applicando *formalmente* il risultato del Teorema 6.3.1 otterremo

$$\widehat{d_T'}(\nu) = i2\pi\nu \widehat{d_T}(\nu)$$

e poiché

$$\widehat{d_T'}(\nu) = \widehat{p_T}(\nu) = T \text{sinc}(T\nu)$$

ne dedurremo

$$\widehat{d_T}(\nu) = -i \frac{T}{2\pi\nu} \text{sinc}(T\nu).$$

Questo risultato è diverso (poiché sbagliato) da quello ottenuto in (6.20).

Concludiamo citando il seguente risultato che è l'analogo per la trasformata di Fourier del Teorema di Parseval.

Teorema 6.3.2 (Parseval) *Se f è una funzione C^1 a tratti e sia f^2 che $|\hat{f}|^2$ hanno integrali convergenti, allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu.$$

6.4 Tabella

Riportiamo in questa sezione le trasformate di Fourier delle funzioni considerate sopra.

f	\hat{f}
$p_T(x)$	$T \text{sinc}(T\nu)$
$u_T(x)$	$\text{sinc}(T\nu)$
$q_T(x)$	$T \text{sinc}^2(T\nu)$
$\delta(x)$	1
$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}$

Capitolo 7

Vibrazioni

7.1 Introduzione

Il problema che si vuole affrontare è quello dello studio del moto unidimensionale di un punto materiale soggetto ad una forza elastica attrattiva, in presenza o meno di termini di resistenza. L'esempio da tenere in mente è quello di una massa puntiforme vincolata ad una molla elastica e frenata da un ammortizzatore [13], ma numerosi fenomeni ingegneristici possono essere modellizzati partendo da questi semplici modelli: ad esempio le oscillazioni di un edificio in conseguenza di venti o di terremoti [6], i flussi di corrente in circuiti elettrici LRC.

Consideriamo un punto P di massa m su una retta, e sia $y = y(t)$ la sua distanza al tempo t da un punto di riferimento fisso O ; analizzeremo i seguenti modelli.

- *Vibrazioni non smorzate.* Se sul punto agisce una forza centrale proporzionale alla distanza da O , l'equazione del moto è

$$my'' = -ky \quad (7.1)$$

dove $k > 0$ è la costante di proporzionalità della forza. Questa equazione si scrive anche

$$y'' + \omega_o^2 y = 0 \quad (7.2)$$

dove la costante $\omega_o = \sqrt{k/m} > 0$ è la *pulsazione caratteristica o naturale o propria* dell'oscillatore. E' questo il caso delle *vibrazioni libere non smorzate*. Se sul punto agisce inoltre una forza centrale $F(t)$ dipendente dal tempo (una *forzante*), allora l'equazione del moto è $my'' = -ky + F(t)$, ovvero, posto $f(t) = F(t)/m$,

$$y'' + \omega_o^2 y = f(t). \quad (7.3)$$

E' il caso delle *vibrazioni forzate non smorzate*.

- *Vibrazioni smorzate.* Se oltre alla forza centrale agisce sul punto anche una forza proporzionale alla velocità (resistenza di tipo viscoso) l'equazione (7.1) diventa

$$my'' = -ky - hy'$$

con $h > 0$. Si ottiene

$$y'' + 2\delta y' + \omega_o^2 y = 0 \quad (7.4)$$

dove $\delta = h/2m$. La lettera δ sta per ricordare lo *smorzamento* (damping) di cui è responsabile il termine $2\delta y'$. E' il caso delle *vibrazioni smorzate libere*. L'equazione in presenza di una forzante diventa

$$y'' + 2\delta y' + \omega_o^2 y = f(t). \quad (7.5)$$

E' il caso delle *vibrazioni smorzate e forzate*¹.

¹Ringrazio Enrico Montagnana per avermi segnalato varie imprecisioni in una versione precedente.

7.2 Preliminari

Ricordiamo qui alcuni fatti elementari che useremo in seguito.

Osservazione 7.2.1 Consideriamo la funzione $f(t) = A \cos(\omega_o t + \phi)$, per $A \geq 0$, $\omega_o \geq 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$. La costante A è l'ampiezza, ω_o la pulsazione, ϕ lo spostamento di fase. La funzione f è periodica di periodo $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ e frequenza $\nu_o = \frac{1}{T_o} = \frac{\omega_o}{2\pi}$. Il moto rappresentato dalla funzione è detto armonico. Nel caso $f(t) = A(t) \cos(\omega_o t + \phi)$, dove A è una funzione non periodica, la funzione f non è più periodica e la quantità $\frac{2\pi}{\omega_o}$ è detta lunghezza d'onda.

La differenza tra frequenza e pulsazione sta nel fatto che la frequenza è riferita alla funzione f mentre la pulsazione è riferita alla funzione coseno.

Lemma 7.2.1 Dati $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli, esistono due uniche costanti $A > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi)$ tali che

$$c_1 \cos(\omega_o t) + c_2 \sin(\omega_o t) = A \cos(\omega_o t + \phi). \quad (7.6)$$

Dimostrazione. Si ha $A \cos(\omega_o t + \phi) = A \cos(\omega_o t) \cos \phi - A \sin(\omega_o t) \sin \phi = c_1 \cos(\omega_o t) + c_2 \sin(\omega_o t)$ se e soltanto se $A \cos \phi = c_1$, $-A \sin \phi = c_2$, per l'indipendenza lineare di seno e coseno. Dunque

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \begin{cases} \cos \phi = \frac{c_1}{A} \\ \sin \phi = -\frac{c_2}{A}. \end{cases} \quad (7.7)$$

Il punto $(\frac{c_1}{A}, -\frac{c_2}{A})$ sta sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, dunque (7.7) identifica un solo valore $\phi \in [0, 2\pi)$. Più precisamente se $c_1 = 0$ allora $\phi = \frac{\pi}{2}$ se $c_2 < 0$ mentre $\phi = \frac{3\pi}{2}$ se $c_2 > 0$. Se $c_1 > 0$ allora $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\phi = -\arcsin \frac{c_2}{A}$. Se $c_1 < 0$ allora $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, dunque $\phi = \pi + \bar{\phi}$, con $\bar{\phi} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; perciò $\sin \phi = -\sin \bar{\phi}$ e $\phi = \pi + \arcsin \frac{c_2}{A}$. In conclusione

$$\phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } c_1 = 0, c_2 < 0, \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } c_1 = 0, c_2 > 0, \\ -\arcsin \frac{c_2}{A} & \text{se } c_1 > 0, \\ \pi + \arcsin \frac{c_2}{A} & \text{se } c_1 < 0. \end{cases}$$

□

Osservazione 7.2.2 Poiché $\cos \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$, si ha anche $c_1 \cos(\omega_o t) + c_2 \sin(\omega_o t) = A \sin(\omega_o t + \psi)$, con $\psi = \phi + \frac{\pi}{2}$.

7.3 Vibrazioni non smorzate

In questa sezione consideriamo le equazioni (7.2) e (7.3).

7.3.1 Vibrazioni non smorzate libere

L'integrale generale di (7.2) è $y(t, c_1, c_2) = c_1 \cos(\omega_o t) + c_2 \sin(\omega_o t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Esso può essere espresso in forma complessa come $C e^{i\omega_o t}$, $C \in \mathbb{C}$, ma per semplicità ne considereremo sempre la forma reale di sopra. Tramite il Lemma 7.2.1 l'integrale generale si scrive

$$y(t, A, \phi) = A \cos(\omega_o t + \phi). \quad (7.8)$$

Il moto (7.8) è pertanto armonico periodico di frequenza caratteristica $\frac{\omega_o}{2\pi}$, periodo caratteristico $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$.

Il problema ai valori iniziali per (7.2) è

$$\begin{cases} y'' + \omega_o^2 y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0. \end{cases} \quad (7.9)$$

Si trovano in tal caso per A e ϕ i valori

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_o^2}}, \quad \begin{cases} \cos \phi = \frac{y_0}{A} \\ \sin \phi = -\frac{v_0}{A\omega_o}. \end{cases} \quad (7.10)$$

Osservazione 7.3.1 La formula (7.10) permette alcune semplici considerazioni sul moto (vedi Figura 7.1(a)).

- (i) L'ampiezza è tanto più grande quanto più grandi sono $|y_0|$ e $|v_0|$.
- (ii) Se $v_0 = 0$ allora l'ampiezza coincide con $|y_0|$ e il moto ha luogo nell'intervallo di estremi $-y_0$ e y_0 ; altrimenti, qualunque sia il segno della velocità iniziale, l'ampiezza del moto risultante è maggiore di quella relativa al moto con $v_0 = 0$.
- (iii) Se $v_0 \neq 0$ l'ampiezza è inversamente proporzionale alla pulsazione caratteristica: a parità di dati iniziali, ad alte pulsazioni caratteristiche corrispondono "piccole" ampiezze. Se $v_0 = 0$ l'ampiezza non dipende dalla frequenza caratteristica.

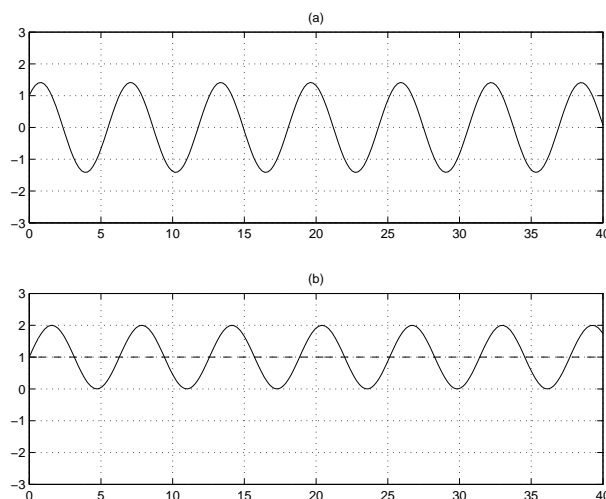


Figura 7.1: Vibrazioni non smorzate. Qui: $\omega_o = 1$, $y_0 = 1$, $v_0 = 1$, $B = 1$. (a): oscillazioni libere; si trova $A = \sqrt{2}$, $\phi = -\pi/4$. (b): oscillazioni forzate, $\omega = 0$; in tratteggio la forzante; si trova $A = 1$, $\phi = -\pi/2$.

7.3.2 Vibrazioni non smorzate forzate

Consideriamo ora l'equazione (7.3) per una forzante $f(t) = B \cos(\omega t)$, con $B \neq 0$, (il caso $f(t) = B \sin(\omega t)$ è assolutamente analogo) cioè

$$y'' + \omega_o^2 y = B \cos(\omega t). \quad (7.11)$$

Come introduzione all'argomento studiamo dapprima il caso della forzante costante, cioè il caso $\omega = 0$. Dunque $f(t) = B$; si trova $\bar{y}(t) = B/\omega_o^2$. L'integrale generale del moto è dunque

$$y(t, A, \phi) = A \cos(\omega_o t + \phi) + \frac{B}{\omega_o^2}. \quad (7.12)$$

I dati iniziali impongono ora

$$\begin{aligned} A \cos \phi + \frac{B}{\omega_o^2} &= y_0 \\ -A \omega_o \sin \phi &= v_0. \end{aligned}$$

Deducendo $\cos \phi$ e $\sin \phi$, dalla relazione $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ si trovano per A e ϕ i valori

$$A = \sqrt{\left(y_0 - \frac{B}{\omega_o^2}\right)^2 + \frac{v_0^2}{\omega_o^2}}, \quad \begin{cases} \cos \phi = \frac{y_0 - \frac{B}{\omega_o^2}}{A} \\ \sin \phi = -\frac{v_0}{A \omega_o}. \end{cases} \quad (7.13)$$

In particolare, se ad esempio $y_0 > 0$, l'ampiezza del moto risulta maggiore di quella del moto libero se e soltanto se $B < 0$ o $B > 2y_0\omega_o^2$.

Consideriamo ora il caso in cui $\omega \neq 0$. Bisogna distinguere i due ulteriori casi $\omega = \omega_o$ o $\omega \neq \omega_o$, cioè se $i\omega$ è radice o meno del polinomio caratteristico.

Caso $\omega \neq \omega_o$: battimenti

Un integrale particolare va cercato sotto la forma $\bar{y}(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ con c_1, c_2 da determinare o, equivalentemente, come $\bar{y}(t) = C \cos(\omega t + \psi)$ con C, ψ da determinare. Con calcoli diretti si trova

$$\bar{y}(t) = \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

da cui si ha l'integrale generale di (7.11):

$$y(t, A, \phi) = A \cos(\omega_o t + \phi) + \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2} \cos(\omega t). \quad (7.14)$$

Si noti che si ritrovano i risultati precedenti relativi al caso $\omega = 0$. Il moto è la somma di due moti periodici, uno di periodo $T_o = 2\pi/\omega_o$, l'altro di periodo $T_f = 2\pi/\omega$, con $T_o \neq T_f$. E' questo il fenomeno dei *battimenti*. Si noti che il Lemma 7.2.1 non si applica qui e dunque intenderemo il termine "ampiezza" nel senso

$$\sup_t |y(t, A, \phi)|.$$

Il moto è limitato, poiché $|y(t, A, \phi)| \leq A + \frac{B}{|\omega_o^2 - \omega^2|}$. In altre parole l'ampiezza è limitata; essa è tanto più grande quanto più ω è vicino a ω_o . Questo è evidente nel caso considerato in Figura 7.2: il caso (a) ha ampiezza minore del caso (c) in quanto $|1^2 - (\frac{1}{3})^2| > |1^2 - (\frac{4}{3})^2|$.

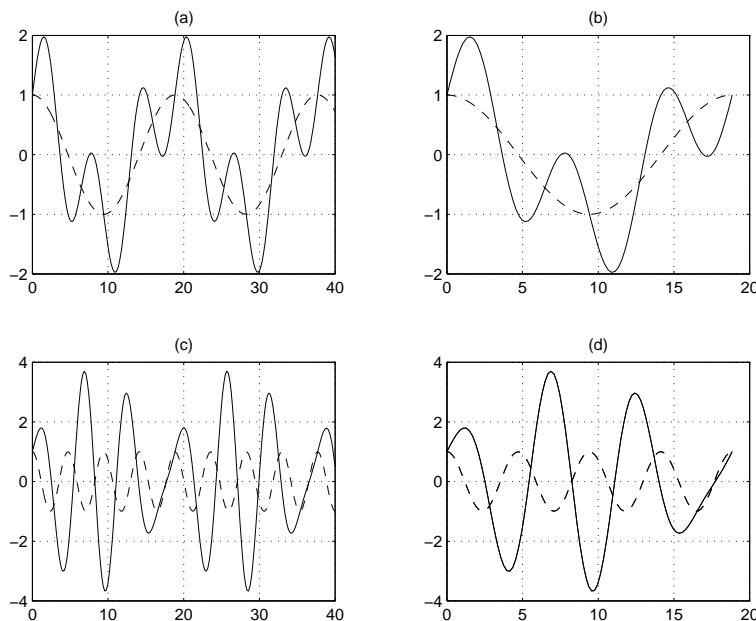


Figura 7.2: Vibrazioni non smorzate. Qui: $\omega_o = 1$, $y_0 = 1$, $v_0 = 1$, $B = 1$. In tratteggio la forzante. (a): oscillazioni forzate, $\omega = 1/3$, moto periodico $T = 6\pi$. (b): un periodo del moto. (c): oscillazioni forzate, $\omega = 4/3$, moto periodico $T = 6\pi$. (d): un periodo del moto.

Possiamo continuare l'analisi del moto considerando i due seguenti sottocasi.

- (i) $\frac{\omega}{\omega_o} \in \mathbb{Q}$. In questo caso il moto risultante è periodico, vedi Figura 7.3(b). Infatti in tal caso $\frac{\omega}{\omega_o} = \frac{m}{n}$, con m, n primi tra loro, dunque $\frac{n}{\omega_o} = \frac{m}{\omega}$ e così $\frac{2\pi}{\omega_o} n = \frac{2\pi}{\omega} m$. Poiché il primo moto si ripete a multipli di $\frac{2\pi}{\omega_o}$ e il secondo a multipli di $\frac{2\pi}{\omega}$, il periodo della somma dei moti sarà $T = \frac{2\pi n}{\omega_o} = \frac{2\pi m}{\omega}$. E' propriamente *questo* il fenomeno dei battimenti.
- (ii) $\frac{\omega}{\omega_o} \notin \mathbb{Q}$. In questo caso il moto non è periodico, ma viene detto *quasi-periodico*, vedi Figura 7.3(c). Si tratta di un caso di interesse unicamente teorico: nelle applicazioni le frequenze sono sempre approssimate con numeri razionali, dunque il quoziente $\frac{\omega}{\omega_o}$ è razionale come nel caso precedente e il moto è periodico.

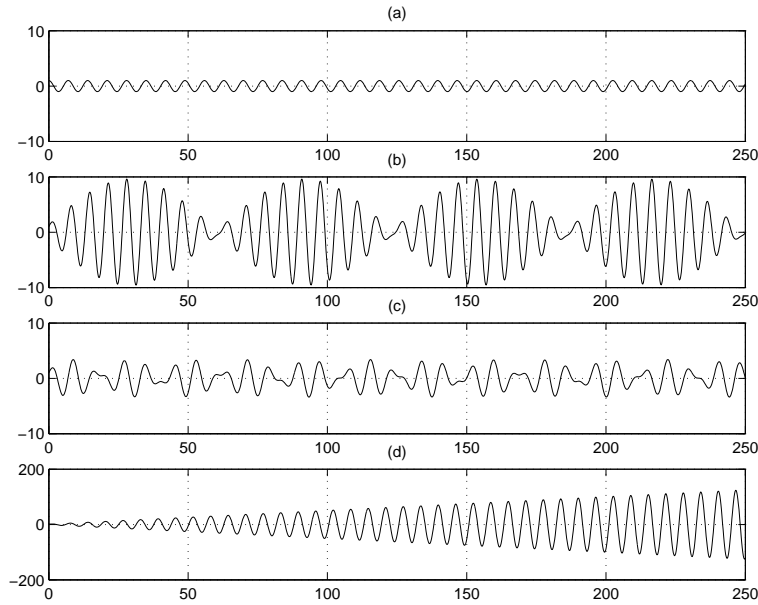


Figura 7.3: Vibrazioni non smorzate. Qui: $\omega_o = 1$, $y_0 = 1$, $v_0 = 1$, $B = 1$. (a): la forzante, $\omega = 1$. (b): battimenti, $\omega = 9/10$. (c): moto non periodico, $\omega = 1/\sqrt{2}$. (d): risonanza, $\omega = 1$; si noti la diversa scala delle ordinate in quest'ultimo caso.

Esempio 7.3.1 Per avere un'idea più precisa del fenomeno dei battimenti, consideriamo il caso particolare

$$y(t) = A \cos(\omega_o t) + A \cos(\omega t), \quad \omega \neq \omega_o,$$

relativo alla somma di due moti oscillatori di uguale ampiezza ma diversa frequenza. Si tratta del caso speciale di una vibrazione non smorzata forzata con forzante $A(\omega_o^2 - \omega^2) \cos(\omega t)$; si confronti con l'espressione generale (7.14). Dalla formula di prostaferesi, si veda la Sezione 7.8,

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

possiamo scrivere

$$y(t) = 2A \cos \frac{(\omega_o - \omega)t}{2} \cdot \cos \frac{(\omega_o + \omega)t}{2} = C(t) \cdot \cos \frac{(\omega_o + \omega)t}{2}.$$

Si veda la Figura 7.4. Il moto è espresso come *prodotto*, e non come somma, di due diversi moti periodici. Fra i due, il termine $\cos \left(\frac{\omega_o + \omega}{2} t \right)$ ha pulsazione $\frac{\omega_o + \omega}{2} = \omega_c$ maggiore ed è dunque relativo ad una lunghezza d'onda *corta*. L'altro termine, $C(t) = 2A \cos \left(\frac{\omega_o - \omega}{2} t \right)$, nel quale abbiamo inglobato l'ampiezza $2A$, è relativo ad una pulsazione $\frac{\omega_o - \omega}{2} = \omega_l$ minore e rappresenta un'onda *lunga* che modula l'ampiezza dell'onda corta.

Questa rappresentazione vale qualunque sia il quoziente ω/ω_o , sia esso razionale o meno. In particolare, anche se il rapporto è razionale, la pulsazione ω_l non coincide necessariamente con la pulsazione *complessiva* del moto, alla quale si è fatto riferimento nel punto (i) qui sopra.

Nel caso di frequenze di note musicali, supponiamo che $\nu_0 = 440\text{Hz} = \text{La}_4$ e $\nu = \frac{3}{2}\nu_0 = 660\text{Hz} = \text{Mi}_5^2$, cioè la quinta di La_4 . In questo caso si ottiene, con notazioni analoghe a quelle di sopra, $\nu_c = \frac{\nu_0 + \nu}{2} = 550\text{Hz} = \text{Do}\sharp_5$, la terza di La_4 , e $\nu_l = \frac{\nu - \nu_0}{2} = 110\text{Hz} = \text{La}_2$, due ottave sotto al La_4 di partenza. Si ricordi che l'accordo di La Maggiore è dato proprio da $\text{La-Do}\sharp\text{-Mi}$.

Caso $\omega = \omega_o$: risonanza

Si cerca $\bar{y}(t) = t[c_1 \cos(\omega_o t) + c_2 \sin(\omega_o t)]$ o $\bar{y}(t) = Ct \cos(\omega_o t + \psi)$. Si trova

$$\bar{y}(t) = \frac{B}{2\omega_o} t \sin(\omega_o t) \quad (7.15)$$

²In base all'accordatura naturale. Secondo l'accordatura temperata, quella usata per accordare un pianoforte, la frequenza ν di una nota che dista n semitoni da una nota data, di frequenza ν_0 , è $\nu = 2^{n/12}\nu_0$. Le due accordature differiscono leggermente.

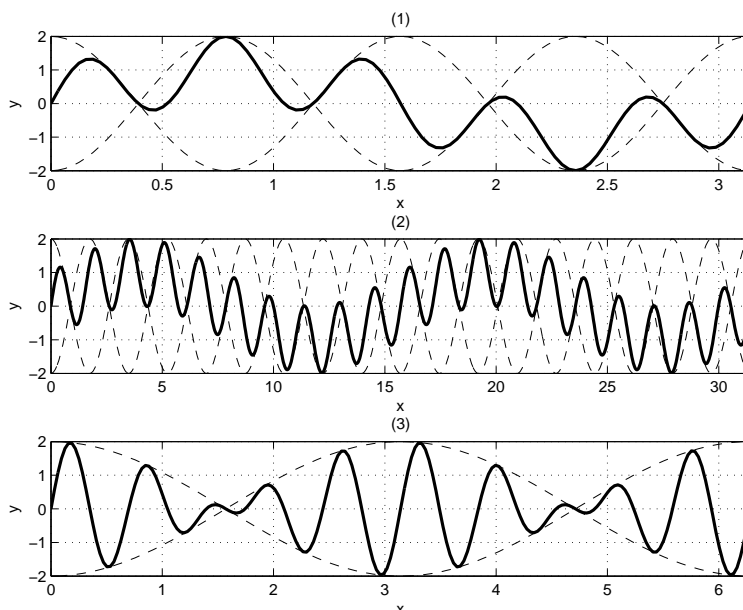


Figura 7.4: Si veda l'Esercizio 7.4.4. Il grafico del moto è rappresentato con una linea continua, l'onda lunga e la sua opposta in tratteggio. Il primo ed il secondo moto sono rappresentati su di un periodo, il terzo su due periodi.

e l'integrale generale di (7.11) è

$$y(t, A, \phi) = A \cos(\omega_o t + \phi) + \frac{B}{2\omega_o} t \sin(\omega_o t).$$

Anche in questo caso il moto è somma di due moti: uno è periodico di periodo T_o , l'altro non è periodico, di lunghezza d'onda T_o . Pertanto il moto complessivo non è più periodico e la sua ampiezza non è limitata per $t \rightarrow +\infty$. E' questo il fenomeno della *risonanza* che può portare a effetti distruttivi; l'esempio più classico è quello del crollo di ponti soggetti al passaggio di soldati che marciano allo stesso passo³.

Osservazione 7.3.2 Si noti come una soluzione particolare dell'equazione (7.11) sia da ricercarsi così:

$$f(t) = B \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \bar{y}(t) = \begin{cases} C \cos(\omega t) & \text{se } \omega \neq \omega_o, \\ Ct \sin(\omega t) & \text{se } \omega = \omega_o, \end{cases}$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è da determinare, a causa della mancanza di un termine con y' nell'equazione. Questa osservazione può risparmiare lunghi calcoli nella ricerca della soluzione particolare.

7.4 Esercizi

Esercizio 7.4.1 Nel caso delle vibrazioni non smorzate libere, ritrovare la conservazione dell'energia tramite l'integrale generale (7.8).

Risposta. L'energia totale E è la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale, dunque $E(t) = \frac{1}{2}m(y'(t))^2 + \frac{1}{2}ky^2(t)$; impiegando (7.8) si trova $E(t) = \frac{m}{2}((y'(t))^2 + \omega_o^2 y^2(t)) = \frac{1}{2}kA^2$.

Esercizio 7.4.2 Si consideri l'equazione $y'' + \omega_o^2 y = B$, relativa ad una forzante costante, con dati iniziali $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$.

7.1 Se la velocità iniziale è nulla, per quali valori di B il moto è stazionario, cioè non dipende dal tempo?

³Il celebre caso del crollo del Tacoma Bridge, spesso citato a questo proposito, sembra invece da imputarsi ad altre cause: si veda ad esempio

<http://www.ketchum.org/bridgecollapse.html>

http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge

7.2 Se la velocità iniziale non è nulla, può il moto essere stazionario?

Risposta.

7.1 Conviene scrivere l'integrale generale dell'equazione omogenea sotto la forma $C_1 \cos(\omega_o t) + C_2 \sin(\omega_o t)$ invece di usare (7.12); la soluzione del problema ai valori iniziali con $v_0 = 0$ è allora $y(t) = \left(y_0 - \frac{B}{\omega_o^2}\right) \cos(\omega_o t) + \frac{B}{\omega_o^2}$.

Il moto è pertanto stazionario se e soltanto se $y_0 - \frac{B}{\omega_o^2} = 0$, cioè se $B = y_0 \omega_o^2$. In tal caso $y(t) = y_0$ per ogni t .

7.2 Se $v_0 \neq 0$, la costante A in (7.13) non può mai annullarsi, dunque il moto non può mai essere stazionario.

Esercizio 7.4.3 Si consideri l'equazione $y'' + \omega_o^2 y = B \cos(\omega t)$ nel caso $B \neq 0$, $\omega \neq \omega_o$. Fissato $t = \bar{t} \neq \frac{\pi}{2\omega_o} + \frac{k\pi}{\omega_o}$ calcolare un asintotico della soluzione $y(\bar{t}, \omega)$ per $\omega \rightarrow \omega_o$.

Risposta. Da (7.14) si ha $y(\bar{t}, \omega) = A \cos(\omega_o \bar{t} + \phi) + \frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2} \cos(\omega \bar{t})$. Per $\omega \rightarrow \omega_o$ il termine $\frac{B}{\omega_o^2 - \omega^2}$ è infinito, e $\omega_o^2 - \omega^2 = (\omega_o - \omega)(\omega_o + \omega) \sim 2\omega_o(\omega_o - \omega)$. Pertanto si ha che $y(\bar{t}, \omega) \sim \frac{B \cos(\omega_o \bar{t})}{2\omega_o} \frac{1}{\omega_o - \omega}$. Si noti che $\cos(\omega_o \bar{t}) \neq 0$ per l'ipotesi su \bar{t} .

Esercizio 7.4.4 In riferimento all'Esempio 7.3.1, usare le formule di prostaferesi per scrivere i seguenti moti come moti armonici con ampiezza variabile:

$$(1) : \sin(2t) + \sin(10t), \quad (2) : \sin(2t) + \sin\left(\frac{1}{5}t\right), \quad (3) : \sin(8t) + \sin(10t).$$

Determinare i periodi delle singole componenti, il periodo totale, la lunghezza d'onda dell'onda lunga, la lunghezza d'onda dell'onda corta e rappresentare graficamente i moti.

Risposta. Si ha

$$\begin{aligned} \sin(2t) + \sin(10t) &= (2 \cos(4t)) \cdot \sin(6t) \\ \sin(2t) + \sin\left(\frac{1}{5}t\right) &= \left(2 \cos\left(\frac{9}{10}t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{11}{10}t\right) \\ \sin(8t) + \sin(10t) &= (2 \cos t) \cdot \sin(9t). \end{aligned}$$

Indicando T_1 il periodo del primo moto, T_2 il periodo del secondo moto, T il periodo complessivo, T_l il periodo dell'onda lunga, T_c il periodo dell'onda corta, si trova:

	T_1	T_2	T	T_l	T_c
(1)	π	$\frac{\pi}{5}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
(2)	π	10π	10π	$\frac{20\pi}{9}$	$\frac{20\pi}{3}$
(3)	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	π	2π	$\frac{2\pi}{9}$

Si noti come il periodo dell'onda lunga dell'ultimo moto pare suggerire che il periodo complessivo sia 2π . Esso è invece π , come si determina dall'espressione (3) o come si verifica direttamente:

$$(2 \cos(t + \pi)) \cdot \sin(9(t + \pi)) = (-2 \cos(t)) \cdot \sin(9t + \pi) = (2 \cos t) \cdot \sin(9t),$$

a causa della simmetria delle funzioni $\cos t$ e $\sin(2\pi t/9)$ rispetto a π .

Esercizio 7.4.5 Si consideri l'equazione con due forzanti $y'' + \omega_o^2 y = B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \cos(\omega_2 t)$. Qual è il suo integrale generale? Se $\omega_o, \omega_1, \omega_2$ sono tutti diversi tra loro e razionali, qual è il periodo del moto risultante?

Risposta. $\bar{y}(t) = \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t)$; se $\frac{\omega_1}{\omega_o} = \frac{m}{n}$, $\frac{\omega_2}{\omega_o} = \frac{p}{q}$, allora il moto relativo alla prima forzante ha periodo $\frac{2\pi n}{\omega_o} = \frac{2\pi m}{\omega_1}$, il moto relativo alla seconda forzante ha periodo $\frac{2\pi q}{\omega_o} = \frac{2\pi p}{\omega_2}$; se $r = \text{m.c.m.}\{n, q\}$ allora il periodo è dato da $\frac{2\pi r}{\omega_o}$.

Esercizio 7.4.6 Si consideri per $t \geq 0$ l'equazione $y'' + \omega_o^2 y = f(t)$, dove f è una forzante continua di periodo $T = 2\pi/\omega$, con $\omega_o \neq n\omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Sviluppare in serie di Fourier la funzione f ; scrivere l'integrale generale dell'equazione, calcolando una soluzione particolare per serie in modo formale (senza verificare la regolarità).

Risposta. L'integrale generale dell'equazione è $y(t, A, \phi) = A \cos(\omega_o t + \phi) + \bar{y}(t)$, dove $\bar{y}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa. La funzione f è definita per $t \geq 0$; la prolunghiamo a \mathbb{R} in modo pari, così da ricadere nel caso dell'equazione (7.11). La funzione così ottenuta, che indichiamo per semplicità ancora con f , è continua in \mathbb{R} . La sua serie di Fourier è allora

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

con

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt.$$

Poiché $n\omega \neq \omega_0$ per $n \in \mathbb{N}$, da (7.12) e (7.14) deduciamo che l'equazione $y'' + \omega_0^2 y = \frac{a_0}{2}$ e l'equazione $y'' + \omega_0^2 y = a_n \cos(n\omega t)$ hanno per soluzioni particolari rispettivamente $\bar{y}_0(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2}$ e $\bar{y}_n(t) = \frac{a_n}{\omega_0^2 - n^2\omega^2} \cos(n\omega t)$. Per linearità (principio di sovrapposizione) si trova

$$\bar{y}(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_0^2 - n^2\omega^2} \cos(n\omega t).$$

La serie ottenuta converge assolutamente; si può dimostrare che se la funzione f prolungata a \mathbb{R} è di classe C^2 allora la funzione \bar{y} è derivabile due volte, e dunque è effettivamente una soluzione dell'equazione.

Esercizio 7.4.7 Estendere il risultato dell'Esercizio 7.4.6 al caso di una forzante f di periodo T generico.

Risposta. sia $T = 2\pi/\omega$. Se $\omega_0 \neq n\omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si è nel caso dell'Esercizio 7.4.6. Supponiamo invece che esista $m \in \mathbb{N}$ tale che $\omega_0 = m\omega$; da (7.15) una soluzione particolare dell'equazione $y'' + \omega_0^2 y = a_m \cos(m\omega t)$ è dunque $\bar{y}_m(t) = \frac{a_m}{2\omega_0^2} t \sin(\omega_0 t)$, da cui

$$\bar{y}(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \frac{a_m}{2\omega_0^2} t \sin(\omega_0 t) + \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_0^2 - n^2\omega^2} \cos(n\omega t).$$

7.5 Vibrazioni smorzate

In questa sezione consideriamo le equazioni (7.4) e (7.5).

7.5.1 Vibrazioni smorzate libere

L'integrale generale di (7.4) è determinato dalle radici del polinomio caratteristico $r^2 + 2\delta r + \omega_0^2$, dunque dal segno del discriminante $\delta^2 - \omega_0^2$ (questo spiega la notazione $\delta = h/(2m)$: i calcoli vengono semplificati). Il problema ai valori iniziali per (7.4) è

$$\begin{cases} y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0. \end{cases} \quad (7.16)$$

Caso $\delta > \omega_0$: smorzamento supercritico

Si veda la Figura 7.5. Le radici del polinomio caratteristico sono reali e distinte:

$$r_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad r_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Dunque $r_1 < r_2 < 0$; si ha inoltre

$$r_2 - r_1 = 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (7.17)$$

L'integrale generale di (7.4) è

$$y(t, c_1, c_2) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \quad (7.18)$$

Il moto non è oscillatorio; inoltre $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, c_1, c_2) = 0$. Si noti che in conseguenza dell'ipotesi di resistenza proporzionale alla velocità lo smorzamento è esponenzialmente rapido. Ovviamente $0 < e^{r_1 t} < e^{r_2 t}$: l'addendo in (7.18) che decresce più rapidamente (in valore assoluto) è dunque $c_1 e^{r_1 t}$, ovvero $y(t, c_1, c_2) \sim c_2 e^{r_2 t}$ per $t \rightarrow +\infty$ se $c_2 \neq 0$. Calcoli diretti danno, per la soluzione del problema ai valori iniziali (7.16),

$$c_1 = \frac{y_0 r_2 - v_0}{r_2 - r_1}, \quad c_2 = \frac{v_0 - y_0 r_1}{r_2 - r_1},$$

dunque

$$y(t) = \frac{1}{r_2 - r_1} \{ (y_0 r_2 - v_0) e^{r_1 t} + (v_0 - y_0 r_1) e^{r_2 t} \}. \quad (7.19)$$

Consideriamo dapprima il caso $y_0 = 0$. Se $v_0 = 0$ la soluzione è identicamente nulla; altrimenti $y(t) = \frac{v_0}{r_2 - r_1} (e^{r_2 t} - e^{r_1 t})$. Il fattore $\frac{v_0}{r_2 - r_1}$ ha il segno di v_0 (a causa di (7.17)), mentre $e^{r_2 t} - e^{r_1 t} \geq 0$;

in particolare la funzione $e^{r_2 t} - e^{r_1 t}$ si annulla in 0, cresce fino al tempo $t^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \log \frac{r_2}{r_1}$ poi decresce a 0 per $t \rightarrow +\infty$. Pertanto il punto P , coincidente con O al tempo $t = 0$, dapprima si allontana da O , si ferma a $t = t^*$ e poi si riavvicina a O per $t \rightarrow +\infty$.

Consideriamo ora il caso $y_0 \neq 0$ e per semplicità supponiamo $y_0 > 0$; esaminiamo in dettaglio le soluzioni al variare della velocità iniziale v_0 .

- *Caso $v_0 > 0$: velocità centrifuga.* Si ha $v_0 - y_0 r_1 > 0$ e $v_0 - y_0 r_2 > 0$, dunque $c_1 < 0$, $c_2 > 0$: i due addendi in (7.19) sono discordi. Il calcolo di $y'(t)$, usando per semplicità l'espressione (7.18), dà

$$y'(t) = e^{r_1 t} \left(e^{(r_2 - r_1)t} c_2 r_2 + c_1 r_1 \right).$$

Pertanto $y'(t) = 0$ se e soltanto se

$$e^{(r_2 - r_1)t} = -\frac{c_1 r_1}{c_2 r_2}. \quad (7.20)$$

Siamo interessati naturalmente a valori di $t > 0$ (a $t = 0$ la derivata vale $v_0 > 0$); a causa di (7.17) il termine di sinistra è maggiore di 1 e dunque condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di $t^* > 0$ tale che $y'(t^*) = 0$ è pertanto che $-\frac{c_1 r_1}{c_2 r_2} > 1$. Un rapido calcolo mostra che questa condizione è soddisfatta, e si trova perciò

$$t^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \log \left(-\frac{c_1 r_1}{c_2 r_2} \right) = \frac{1}{r_2 - r_1} \log \left(\frac{r_1 (v_0 - y_0 r_2)}{r_2 (v_0 - y_0 r_1)} \right). \quad (7.21)$$

La soluzione y è dunque crescente fino a t^* , poi decresce: il punto P dapprima si allontana da O , si ferma a $t = t^*$ e poi si avvicina a O .

- *Caso $v_0 = 0$: velocità nulla.* Da (7.19) si trova

$$y(t) = \frac{y_0}{r_2 - r_1} \{ r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t} \}.$$

Si ha $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ e $-\frac{c_1 r_1}{c_2 r_2} = 1$; questo caso è analogo al precedente. Da (7.21) si ha $t^* = 0$: la soluzione y è sempre decrescente e il punto P si avvicina al punto O .

- *Caso $v_0 < 0$: velocità centripeta.* In questo caso non abbiamo a priori alcuna informazione sul segno di c_1 e c_2 .

Consideriamo dapprima il caso $v_0 = y_0 r_1$, cioè $c_2 = 0$: da (7.19) si trova

$$y(t) = y_0 e^{r_1 t}.$$

La soluzione tende a zero decrescendo.

Supponiamo ora $v_0 \neq y_0 r_1$, cioè $c_2 \neq 0$. Se $y_0 r_1 < v_0 < 0$, allora $c_2 > 0$ e si trova subito che $-\frac{c_1 r_1}{c_2 r_2} < 1$: l'equazione (7.20) non ha soluzioni per tempi positivi e la soluzione è sempre decrescente per $t \geq 0$. Se invece $v_0 < y_0 r_1$, allora $c_2 < 0$ e $-\frac{c_1 r_1}{c_2 r_2} > 1$: la soluzione decresce fino al tempo t^* , dato da (7.21), poi cresce tendendo a zero. Il punto P oltrepassa dapprima O , si ferma al tempo t^* , poi si avvicina a O .

Caso $\delta = \omega_0$: smorzamento critico

Si veda la Figura 7.6. Le radici del polinomio caratteristico sono reali e coincidenti:

$$r_1 = r_2 = -\delta.$$

L'integrale generale di (7.4) è

$$y(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-\delta t} + c_2 t e^{-\delta t}. \quad (7.22)$$

Il moto non è oscillatorio e di nuovo $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, c_1, c_2) = 0$. Per la soluzione del problema ai valori iniziali (7.16) si ha

$$c_1 = y_0, \quad c_2 = v_0 + \delta y_0$$

dunque

$$y(t) = y_0 e^{-\delta t} + (v_0 + \delta y_0) t e^{-\delta t}. \quad (7.23)$$

Come nel caso precedente esaminiamo le soluzioni al variare della velocità iniziale v_0 , supponendo sempre $y_0 \geq 0$.

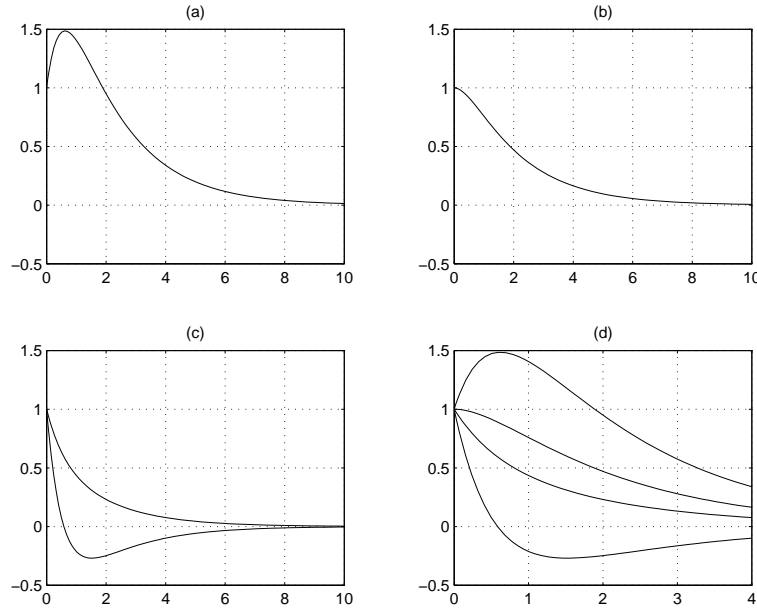


Figura 7.5: Vibrazioni smorzate libere, caso supercritico. Qui: $\omega_o = 1$, $y_0 = 1$, $\delta = 1.2$, $r_2 \sim -0.5366$. (a): $v_0 = 2$. (b): $v_0 = 0$. (c): $v_0 = -1$ e $v_0 = -3$. (d): Ingrandimento dei quattro grafici precedenti vicino a $t = 0$.

- *Caso $v_0 > 0$: velocità centrifuga.* Si trova che $y'(t) = 0$ se e solo se $t = t^*$, con

$$t^* = \frac{v_0}{\delta(v_0 + \delta y_0)}.$$

Si noti che $t^* > 0$. La funzione y è dunque crescente fino a t^* , poi decresce: il punto P dapprima si allontana da O , si ferma a $t = t^*$ e poi si avvicina a O .

- *Caso $v_0 = 0$: velocità nulla.* Da (7.23) si trova

$$y(t) = y_0 e^{-\delta t} + \delta y_0 t e^{-\delta t}.$$

Se $y_0 = 0$ la soluzione è identicamente nulla; se $y_0 > 0$ allora $t^* = 0$ e la funzione y è sempre decrescente per $t \geq 0$.

- *Caso $v_0 < 0$: velocità centripeta.* Se $v_0 = -\delta y_0$ si trova

$$y(t) = y_0 e^{-\delta t}.$$

La soluzione tende decrescendo a zero.

Se $-\delta y_0 < v_0 < 0$ allora da (7.21) abbiamo $t^* < 0$ e la soluzione è sempre decrescente. Se invece $v_0 < -\delta y_0$ la soluzione decresce fino al tempo t^* definito sopra poi cresce tendendo a zero.

Caso $\delta < \omega_o$: smorzamento subcritico

E' questo il caso di gran lunga più importante per le applicazioni; si veda la Figura 7.7. Le radici del polinomio caratteristico sono complesse e coniugate:

$$r_1 = -\delta - i\nu, \quad r_2 = -\delta + i\nu, \quad \nu = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}.$$

L'integrale generale di (7.4), espresso utilizzando il Lemma 7.2.1, è

$$y(t, A, \phi) = A e^{-\delta t} \cos(\nu t + \phi). \quad (7.24)$$

Si noti che la pulsazione $\nu = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$ del termine $\cos(\nu t + \phi)$ non è più quella caratteristica ω_o , ma è *diminuita* a causa di δ :

$$\nu < \omega_o.$$

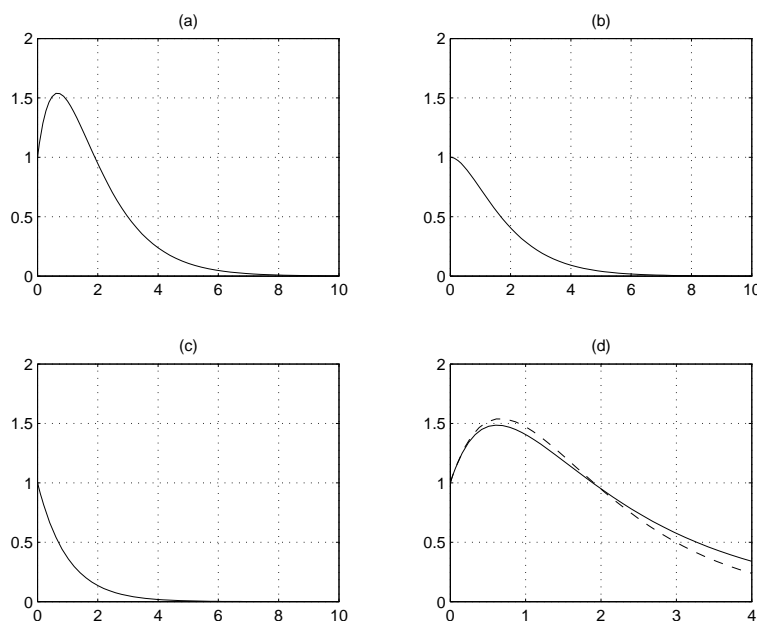


Figura 7.6: Vibrazioni smorzate libere, caso critico. Qui: $\omega_o = 1$, $y_0 = 1$, $\delta = 1$. (a): $v_0 = 2$. (b): $v_0 = 0$. (c): $v_0 = -1$. (d): Ingrandimento vicino a $t = 0$ delle soluzioni relative a $v_0 = 2$ nel caso critico (tratteggiato) e supercritico $\delta = 1.2$.

Lo smorzamento “rallenta” dunque le oscillazioni. Si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, A, \phi) = 0$. Il moto è oscillatorio smorzato: le oscillazioni del coseno sono comprese tra le funzioni $\pm Ae^{-\delta t}$, e il moto non è periodico (a meno del caso banale $A = 0$).

La soluzione del problema ai valori iniziali (7.16) è data dai valori di A e ϕ che risolvono

$$\begin{cases} A \cos \phi = y_0 \\ A(\delta \cos \phi + \nu \sin \phi) = -v_0. \end{cases}$$

Se $y_0 = v_0 = 0$ la soluzione è nulla: $A = 0$. Se $y_0 = 0$, $v_0 \neq 0$ allora: se $v_0 > 0$ si ha $\phi = -\pi/2$, se $v_0 < 0$ si ha $\phi = \pi/2$; in entrambi i casi $A = |v_0|/\nu$. In ogni caso si ha (si confronti con la (7.10))

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + \delta y_0}{\nu}\right)^2}.$$

Ritorniamo all'integrale generale (7.24). Proviamo che la distanza tra due massimi (o due minimi) successivi della soluzione $y(t, A, \phi)$ in (7.24) è $T = 2\pi/\nu$ (maggiore del periodo caratteristico $2\pi/\omega_o$). Infatti in questi punti

$$y'(t, A, \phi) = -Ae^{-\delta t} \{\delta \cos(\nu t + \phi) + \nu \sin(\nu t + \phi)\} = 0.$$

I valori di t tali che $\nu t + \phi = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, non sono punti stazionari; possiamo perciò dividere per $\cos(\nu t + \phi)$ e troviamo $\text{tg}(\nu t + \phi) = -\frac{\delta}{\nu}$, cioè (arctg è una funzione dispari)

$$t_n = -\frac{\text{arctg}(\frac{\delta}{\nu}) + \phi}{\nu} + \frac{n\pi}{\nu}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Questi valori saranno alternativamente punti di minimo e punti di massimo; inoltre $t_{n+2} - t_n = 2\pi/\nu = T$. Si ha di conseguenza

$$\frac{y(t_{n+2}, A, \phi)}{y(t_n, A, \phi)} = e^{-\delta T}.$$

In altre parole, gli spostamenti massimi (minimi) del punto formano una progressione geometrica di ragione $e^{-\delta T} < 1$. Più esplicitamente ancora sia $\bar{t} \geq 0$ il primo punto di massimo, con massimo $y(\bar{t}) = Y$; allora per $t \geq 0$ la successione dei valori massimi è

$$Y, e^{-\delta T}Y, e^{-2\delta T}Y, e^{-3\delta T}Y, \dots$$

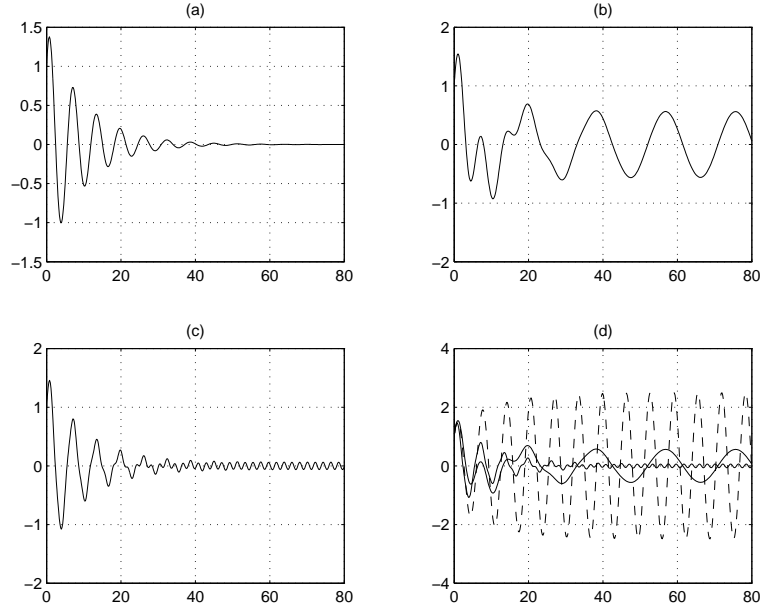


Figura 7.7: Vibrazioni smorzate libere e forzate, caso subcritico. Qui: $\omega_o = 1$, $y_0 = 1$, $v_0 = 1$, $\delta = 0.1$, $B = 1/2$. (a): Oscillazioni libere. (b): Oscillazioni forzate, $\omega = 1/3$. (c): Oscillazioni forzate, $\omega = 3$. (d): I due grafici precedenti (b) e (c) a confronto con la soluzione relativa alla forzante risonante, $\omega = \sqrt{1 - 2 \cdot (0.1)^2} \sim 0.9899$ (tratteggio).

La grandezza

$$\Delta = \delta T = -\log \left(\frac{y(t_{n+2}, A, \phi)}{y(t_n, A, \phi)} \right)$$

è detta *decremento logaritmico*; si calcola facilmente

$$\Delta = \frac{2\pi h}{\sqrt{4km - h^2}}. \quad (7.25)$$

Si noti che Δ non dipende dai dati iniziali ma solo dalle costanti fisiche del sistema. Inoltre, il decremento Δ è determinabile sperimentalmente con facilità, in quanto basta determinare la posizione di due massimi o minimi successivi e quindi calcolarne il logaritmo del rapporto. Poiché anche m e k si possono determinare sperimentalmente con facilità, dalla formula (7.25) si ricava l'espressione della costante di smorzamento h (più difficile da determinare direttamente) in funzione di m , k e Δ :

$$h = 2\Delta \sqrt{\frac{km}{\Delta^2 + 4\pi^2}}.$$

7.5.2 Vibrazioni smorzate forzate

Consideriamo ora l'equazione (7.5) per una forzante $f(t) = B \cos(\omega t)$, cioè

$$y'' + 2\delta y' + \omega_o^2 y = B \cos(\omega t). \quad (7.26)$$

Diversamente dal caso non smorzato $\delta = 0$, nel caso smorzato $\delta > 0$ la quantità $i\omega$ non è mai radice del polinomio caratteristico per $\omega \geq 0$. Si cerca dunque una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \quad (7.27)$$

Con facili calcoli si trova che c_1, c_2 devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} (\omega_o^2 - \omega^2)c_1 + 2\delta\omega c_2 = B \\ (\omega_o^2 - \omega^2)c_2 - 2\delta\omega c_1 = 0. \end{cases}$$

Si trova

$$c_1 = \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} B, \quad c_2 = \frac{2\delta\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} B. \quad (7.28)$$

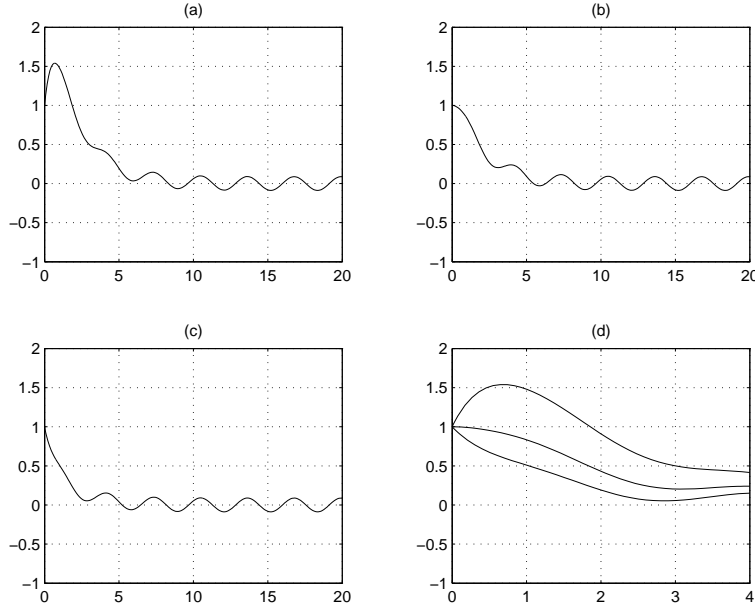


Figura 7.8: Vibrazioni smorzate forzate, caso supercritico. Qui: $\omega_o = 1$, $y_0 = 1$, $\delta = 1.2$, $\nu \sim 0.6633$, $B = 1/2$, $\omega = 2$. (a): $v_0 = 2$. (b): $v_0 = 0$. (c): $v_0 = -1$. (d): Ingrandimento dei tre grafici precedenti vicino a $t = 0$.

Si noti che queste formule comprendono quelle del caso $\omega = 0$. Dal Lemma 7.2.1 si deduce che

$$\bar{y}(t) = \bar{A} \cos(\omega t + \bar{\phi}) \quad (7.29)$$

dove

$$\bar{A} = aB, \quad a = \frac{1}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \begin{cases} \cos \bar{\phi} = \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \\ \sin \bar{\phi} = -\frac{2\delta\omega}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \end{cases}$$

Il termine a è un fattore di incremento o decremento dell'ampiezza forzante. Si noti bene che la soluzione particolare (7.29) vale per tutti i casi considerati sopra (smorzamento supercritico, critico, subcritico). L'integrale generale del moto (7.26) è allora

$$y(t, C_1, C_2) = y_H(t, C_1, C_2) + \bar{y}(t),$$

dove $y_H(t, C_1, C_2)$ è l'integrale generale dell'omogenea e $\bar{y}(t)$ è la soluzione particolare data da (7.27) con le costanti c_1 e c_2 specificate in (7.28) o analogamente da (7.29). Mentre y_H ha una espressione che varia a seconda dei casi supercritico, critico, subcritico, l'espressione di \bar{y} è la stessa per tutti e tre i casi. Si veda la Figura 7.8.

Poiché l'integrale generale dell'omogenea tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$ (in tutti i casi, e comunque scelti i dati iniziali) possiamo approssimare per tempi grandi (*a regime*) ogni soluzione y di (7.26) come

$$y(t) \sim \bar{y}(t) = aB \cos(\omega t + \bar{\phi}), \quad \text{per } t \gg 0.$$

Si noti come, a regime, il moto sia approssimabile ad un moto armonico, in cui l'ampiezza (costante) conserva traccia delle caratteristiche del sistema (ω_o e δ); permane inoltre uno spostamento di fase ($\bar{\phi}$) rispetto alla forzante. E' naturale porsi allora la domanda:

fissata l'ampiezza B della forzante, per quali frequenze della forzante l'ampiezza a regime è massima?

E' questo un problema di fondamentale importanza nei circuiti elettrici. Si tratta di studiare la funzione $a = a(\omega)$, $\omega \geq 0$, per valori fissi dei parametri ω_o e δ . Si ha che $a(0) = 1/\omega_o^2$ e

$$a'(\omega) = -\frac{2\omega}{[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]^{3/2}} [\omega^2 - (\omega_o^2 - 2\delta^2)]. \quad (7.30)$$

Pertanto $a'(\omega) = 0$ se e soltanto se $\omega = 0$ o se

$$\omega^2 = \omega_o^2 - 2\delta^2. \quad (7.31)$$

Si hanno due casi, si vedano le Figure 7.7 e 7.10.

- *Caso* $\delta > \omega_o/\sqrt{2}$. L'equazione (7.31) non ha soluzioni; da (7.30) si ricava che a è una funzione decrescente di ω e dunque l'ampiezza della soluzione a regime è tanto più grande (e prossima a $1/\omega_o$) quanto più la frequenza della forzante è piccola.
- *Caso* $\delta \leq \omega_o/\sqrt{2}$. L'equazione (7.31) ha soluzione $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - 2\delta^2}$. Da (7.30) si deduce che in tale punto la funzione a ha un massimo, che vale

$$a_{\max} = \frac{1}{2\delta\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}}.$$

Si noti che $\omega_o^2 - \delta^2 > \omega_o^2 - 2\delta^2 \geq 0$ e dunque ci si trova necessariamente nel caso subcritico; si veda la Figura 7.9. Inoltre si verifica direttamente che $a_{\max} \geq 1/\omega_o$ e dunque si tratta di un massimo assoluto; ovviamente questo poteva essere dedotto dal segno di $a'(\omega)$. Tale fenomeno prende il nome di *risonanza* anche se è qualitativamente diverso da quello esaminato per le vibrazioni non smorzate. In particolare, in questo caso, l'ampiezza resta limitata e raggiunge il massimo non in corrispondenza della pulsazione caratteristica del sistema, ma per una pulsazione più piccola ($\omega = \sqrt{\omega_o^2 - 2\delta^2}$), che dipende dalla costante di smorzamento.

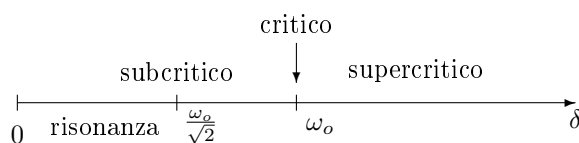


Figura 7.9: Vari regimi al variare dello smorzamento δ .

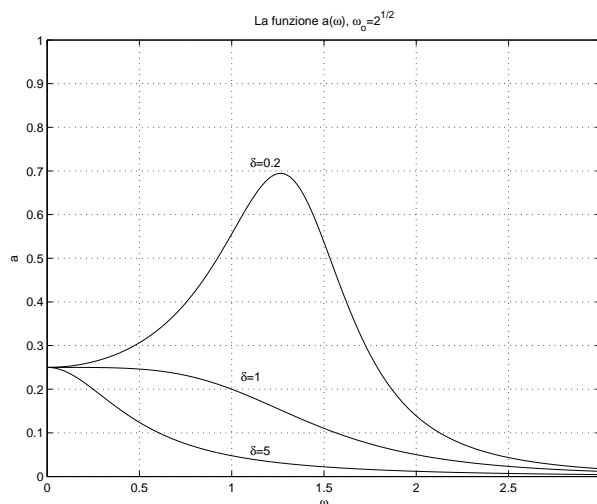


Figura 7.10: Grafico della funzione $a(\omega)$, $\omega_o = \sqrt{2}$.

7.6 Altri modelli

Il modello analitico trattato non è caratteristico soltanto della meccanica delle vibrazioni ma è comune a molti altri fenomeni fisici o ingegneristici.

Esempio 7.6.1 (Circuiti LRC) Consideriamo il caso di un condensatore di capacità C posto in serie con una bobina di induttanza L , una resistenza di valore R e una forza elettromotrice $E(t)$. Sia inoltre q la carica del condensatore e I l'intensità di corrente nel circuito. Le cadute di tensione ai capi del condensatore, della resistenza e della bobina sono rispettivamente $L \frac{dI}{dt}$, RI , q/C ; dalla legge di Kirchhoff (la somma delle cadute di tensione in un circuito chiuso è nulla) si ha

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} - E(t) = 0.$$

Poiché $I = \frac{dq}{dt}$, derivando l'equazione e ponendo $E'(t) = f(t)$ si trova

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = f(t). \quad (7.32)$$

Questa equazione è analoga alla (7.5), in cui $I \sim y$ e

$$L \sim m, \quad R \sim h, \quad \frac{1}{C} \sim k.$$

Esempio 7.6.2 (Pendolo viscoso) Consideriamo un pendolo semplice di lunghezza l che compie piccole oscillazioni in un mezzo in cui la resistenza è proporzionale alla velocità; sia m la massa, θ l'angolo di deviazione dalla verticale. Il bilancio delle forze dà

$$ml\theta'' = -mg \sin \theta - 2kml\theta',$$

ovvero

$$l\theta'' + 2km\theta' + g \sin \theta = 0,$$

dove con $2k$ si è indicata una costante di proporzionalità. Nel caso di piccole oscillazioni possiamo approssimare $\sin \theta \sim \theta$ e pertanto si ottiene, posto $\omega_o^2 = g/l$,

$$\theta'' + 2k\theta' + \omega_o^2\theta = 0,$$

che è analoga a (7.5).

7.7 Esercizi

Esercizio 7.7.1 Risolvere il problema ai valori iniziali $y'' + 2\delta y' + 4y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$ nei seguenti casi:

7.1 $\delta = 0$, $f(t) = \cos(2t)$,

7.2 $\delta = 0$, $f(t) = \cos(\frac{9}{4}t)$.

7.3 $\delta \in (0, 2)$, $f(t) = \cos(2t)$,

Classificare i vari moti, precisare i periodi o le lunghezze d'onda, decomporre quando possibile i moti come nell'Esempio 7.4.4.

Risposta. Si veda la Figura 7.11.

7.1 Vibrazioni non smorzate forzate, caso risonante. Si ha $y_H(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$; si cerca $\bar{y}(t) = t(A_1 \cos(2t) + A_2 \sin(2t))$ e si trova $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{4}$. Perciò l'integrale generale è $y(t, C_1, C_2) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t}{4} \sin(2t)$. Per il problema ai valori iniziali si trova $C_1 = C_2 = 0$, dunque la soluzione è

$$y(t) = \frac{t}{4} \sin(2t),$$

di lunghezza d'onda π .

7.2 Vibrazioni non smorzate forzate, caso dei battimenti. Si ha $y_H(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$; si cerca $\bar{y}(t) = A_1 \cos(\frac{9}{4}t) + A_2 \sin(\frac{9}{4}t)$ e si trova $A_1 = -\frac{16}{17}$, $A_2 = 0$. L'integrale generale è dunque $y(t, C_1, C_2) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) - \frac{16}{17} \cos(\frac{9}{4}t)$. Per il problema ai valori iniziali si trova $C_1 = \frac{16}{17}$, $C_2 = 0$, dunque la soluzione è

$$y(t) = \frac{16}{17} \left(\cos(2t) - \cos\left(\frac{9}{4}t\right) \right).$$

Il primo addendo ha periodo π , il secondo $\frac{8}{9}\pi$. Il periodo totale è dunque 8π ; in tale periodo il primo moto effettua 8 cicli, il secondo 9. Dalle formule di prostaferesi, si veda la Sezione 7.8, si ottiene

$$y(t) = \left(\frac{32}{17} \sin\left(\frac{t}{8}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{17t}{8}\right).$$

L'onda lunga ha periodo 16π , l'onda corta $\frac{16\pi}{17}$.

7.3 Vibrazioni smorzate forzate. Si ha $y_H(t) = e^{-\delta t}(C_1 \cos(\nu t) + C_2 \sin(\nu t))$, con $\nu = \sqrt{4 - \delta^2}$. Si cerca $\bar{y}(t) = A_1 \cos(2t) + A_2 \sin(2t)$ e si trova $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{4\delta}$. Perciò l'integrale generale è $y(t, C_1, C_2) = e^{-\delta t}(C_1 \cos(\nu t) + C_2 \sin(\nu t)) + \frac{1}{4\delta} \sin(2t)$. Per il problema ai valori iniziali si trova $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{2\delta\nu}$, dunque la soluzione è

$$y(t) = -\frac{1}{2\delta\nu} e^{-\delta t} \sin(\nu t) + \frac{1}{4\delta} \sin(2t).$$

La lunghezza d'onda del primo moto è $\frac{2\pi}{\nu}$, del secondo è π . Il regime permanente è rappresentato dal secondo moto.

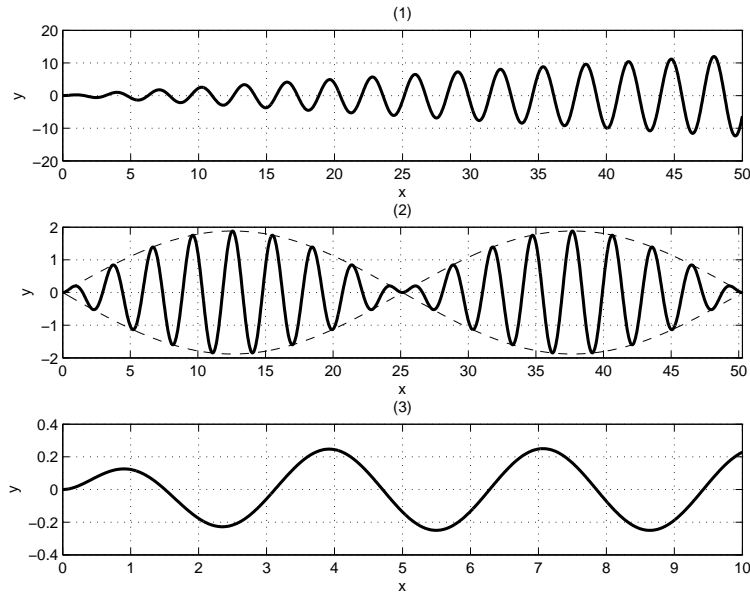


Figura 7.11: Si veda l'Esercizio 7.7.1.

Esercizio 7.7.2 ([9]) Una molla (come quella di sospensione di un autoveicolo) è caricata verticalmente da una massa $m = 300$ kg; il peso corrispondente accorcia la molla di 3 cm. Le vibrazioni della molla sono frenate da un ammortizzatore idraulico con costante di smorzamento $h = 1.2 \cdot 10^4$ N s/m (ricordare che N = newton = kg m/s²; perciò N s/m = kg/s). Determinare il moto della massa m sapendo che al tempo $t = 0$ essa è nella posizione di equilibrio e che si sta abbassando con velocità $v_0 = 1$ m/s. Ripetere i calcoli nel caso $h = 10^4$ N s/m.

Risposta. Si noti che k ha le dimensioni di N/m. Omettiamo per semplicità le unità di misura. Prendiamo l'asse y rivolto verso il basso, con l'origine nella posizione di equilibrio; le condizioni iniziali sono allora $y(0) = 0$, $y'(0) = v_0 = 1$. L'equazione del moto è $my'' = -hy' - ky + mg$. Nel caso statico da $mg = ky$ si deduce $k = \frac{mg}{y} = 9.80 \cdot 10^4$; dunque $\omega_o = 18.07$. Inoltre $B = g = 9.80$, da cui $\frac{B}{\omega_o^2} = 0.03$.

Se $h = 1.2 \cdot 10^4$ allora $\delta = 20 > \omega_o$: smorzamento supercritico. Poiché $\sqrt{\delta^2 - \omega_o^2} = 8.57$, le radici del polinomio caratteristico sono $r_1 = -28.57 < r_2 = -11.43$; una soluzione particolare è $\bar{y}(t) = 0.03$. L'integrale generale del moto è allora $y(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-28.57t} + c_2 e^{-11.43t} + 0.03$. Dalle condizioni iniziali si trovano $c_1 = -0.038$, $c_2 = 0.008$.

Se $h = 1 \cdot 10^4$ allora $\delta = 16.66 < \omega_o$: smorzamento subcritico. Poiché $\nu = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2} = 6.98$, l'integrale generale è $y(t, A, \phi) = A e^{-16.66t} \cos(6.98t + \phi) + 0.03$. Dalle condizioni iniziali si trova $A \cos \phi = -0.03$, $A \sin \phi = -0.07$, da cui $A = 0.076$, $\phi = 4.30$.

Esercizio 7.7.3 Determinare, se esistono, i decrementi logaritmici nei due casi dell'esercizio precedente.

Risposta. Se $h = 1.2 \cdot 10^4$ allora lo smorzamento è supercritico. Se $h = 1 \cdot 10^4$ allora lo smorzamento è subcritico; da (7.25) si trova allora $\Delta \sim 15.2$.

Esercizio 7.7.4 Per un oscillatore smorzato sia $m = 1$ kg, $\Delta = 2$, $T = 0.4$ s (notazioni come nella Sezione 7.5.1). Determinare la costante di smorzamento h .

Risposta. Poiché $\delta T = \Delta$ si trova $\delta = 5$; da $\delta = \frac{h}{2m}$ si trova $h = 10$.

Esercizio 7.7.5 Si consideri per $t \geq 0$ l'equazione $y'' + 2\delta y' + \omega_o^2 y = f(t)$, dove f è una forzante continua di periodo T (si veda l'Esercizio 7.4.6). Scrivere l'integrale generale dell'equazione, calcolando una soluzione particolare per serie in modo formale (senza verificare la regolarità).

Risposta. L'integrale generale dell'equazione è $y(t, A, \phi) = y_H(t, A, \phi) + \bar{y}(t)$, dove $y_H(t, A, \phi)$ è l'integrale generale dell'omogenea associata e $\bar{y}(t)$ una soluzione particolare dell'equazione completa. Prolunghiamo f a \mathbb{R} in modo pari, così da ricadere nel caso dell'equazione (7.26). Si ha

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

con $\frac{a_0}{2}$ e a_n come nell'Esercizio 7.4.6. Da l'equazione $y'' + 2\delta y' + \omega_o^2 y = \frac{a_0}{2}$ e l'equazione $y'' + 2\delta y' + \omega_o^2 y = a_n \cos(n\omega t)$ hanno per soluzioni particolari rispettivamente $\bar{y}_0(t) = \frac{a_0}{2\omega_o^2}$ e $\bar{y}_n(t) = c_{n,1} \cos(n\omega t) + c_{n,2} \sin(n\omega t)$, dove

$$c_{n,1} = \frac{\omega_o^2 - n^2\omega^2}{(\omega_o^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} a_n, \quad c_{n,2} = \frac{2\delta\omega}{(\omega_o^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} a_n.$$

Per linearità si trova

$$\bar{y}(t) = \frac{a_0}{2\omega_o^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n,1} \cos(n\omega t) + c_{n,2} \sin(n\omega t)).$$

La serie ottenuta converge assolutamente; anche in questo caso si può dimostrare che se la funzione f prolungata a \mathbb{R} è di classe C^2 allora la funzione \bar{y} è derivabile due volte, e dunque è effettivamente una soluzione dell'equazione.

7.8 Riepilogo e formule

Costanti fisiche

m	massa del punto
k	costante elastica
h	costante di smorzamento

Costanti del moto

$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$	pulsazione caratteristica
$\frac{\omega_o}{2\pi}$	frequenza caratteristica
$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$	periodo caratteristico
$\delta = \frac{h}{2m}$	costante di smorzamento normalizzata
$\nu = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2} = \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m}$	pulsazione nel caso subcritico
$\Delta = \delta T = \frac{2\pi h}{\sqrt{4km - h^2}}$	decremento logaritmico nel caso subcritico

Vibrazioni non smorzate forzate: $y'' + \omega_o^2 y = B \cos(\omega t)$

$\omega = 0$	moto armonico traslato	
$\omega \neq \omega_o$	battimenti	moto periodico se $\omega/\omega_o \in \mathbb{Q}$ moto non periodico se $\omega/\omega_o \notin \mathbb{Q}$
$\omega = \omega_o$	risonanza	

Vibrazioni smorzate libere: $y'' + 2\delta y' + \omega_o^2 y = 0$

$\delta > \omega_o$	smorzamento supercritico, moto non oscillatorio
$\delta = \omega_o$	smorzamento critico, moto non oscillatorio
$\delta < \omega_o$	smorzamento subcritico, moto oscillatorio smorzato

Formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Formule di Werner:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] C.B. Boyer. *Storia della matematica*. Mondadori, 2000.
- [2] R.N. Bracewell. *The Fourier transform and its applications*. McGraw-Hill, 1986.
- [3] M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: *Matematica*. Zanichelli, 2004.
- [4] M. Bramanti, C.D. Pagani e S. Salsa. *Analisi Matematica 1*. Zanichelli, 2008.
- [5] M. Bramanti, C.D. Pagani e S. Salsa. *Analisi Matematica 2*. Zanichelli, 2009.
- [6] A.K. Chopra. *Dynamics of structures - Theory and application to earthquake engineering*. Prentice Hall, 2001.
- [7] C. Citrini. *Analisi matematica 1*. Boringhieri, 1991.
- [8] C. Citrini. *Analisi matematica 2*. Boringhieri, 1992.
- [9] F. Conti. *Calcolo - Teoria e applicazioni*. McGraw-Hill, 1993.
- [10] B.P. Demidovic. *Esercizi e problemi di analisi matematica*. Editori Riuniti, 2010.
- [11] E. Giusti. *Analisi matematica 2*. Boringhieri, 2003.
- [12] E. Giusti. *Esercizi e complementi di analisi matematica. Volume secondo*. Boringhieri, 1992.
- [13] R. Haberman. *Mathematical models: mechanical vibrations, population dynamics and traffic flow*. SIAM, 1987.
- [14] A. Papoulis. *The Fourier integral and its applications*. McGraw-Hill, 1962.
- [15] A. Quarteroni: *Modellistica numerica per problemi differenziali*. Springer 2006.
- [16] S. Salsa: *Equazioni a derivate parziali - Metodi, modelli e applicazioni*. Springer, 2004.
- [17] S. Salsa e A. Squellati. *Esercizi di Matematica. Volume 2*. Zanichelli, 2008.
- [18] S. Salsa, G. Verzini: *Equazioni a derivate parziali - Complementi ed esercizi*. Springer, 2005.
- [19] I.S. Sokolnikoff, R.M. Redheffer: *Mathematics of physics and modern engineering*. McGraw-Hill, 1958.
- [20] M.R. Spiegel. *Analisi di Fourier*. McGraw-Hill, 1994.