

# Equazioni della Fisica Matematica

Appunti per il Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Vincenzo Coscia

Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

Anno accademico 2011/12

# 1 Richiami sugli integrali curvilinei

Una *curva semplice*  $\Gamma$  è l'immagine di un'applicazione:

$$\gamma : s \in I \subset \mathbf{R} \rightarrow \gamma(s) \equiv (x(s), y(s), z(s)) \in \Gamma \subset \mathbf{R}^3 \quad (1.1)$$

biunivoca e  $C^1$  a tratti. L'applicazione  $\gamma$  si dice una *parametrizzazione* di  $\Gamma$ . Una curva semplice, dunque, non interseca se stessa. Se  $I = [a, b]$ , i punti  $\gamma(a) = P$  e  $\gamma(b) = Q$  si dicono *estremi* di  $\Gamma$ . Una curva semplice  $\Gamma$  possiede due possibili *orientazioni*, la prima da  $P$  a  $Q$  e la seconda da  $Q$  a  $P$ . Una curva semplice  $\Gamma$  assieme ad una delle sue possibili orientazioni si dice una *curva semplice orientata*.

Sia  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$  una parametrizzazione di  $\Gamma$  e sia  $h : I' = [a', b'] \rightarrow I$  un'applicazione biunivoca e  $C^1$  dall'intervallo  $I' \subset \mathbf{R}$  sull'intervallo  $I \subset \mathbf{R}$ . L'applicazione:

$$\sigma := \gamma \circ h : I' \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad (1.2)$$

$$\sigma : t \in I' \xrightarrow{h} s \in I \xrightarrow{\gamma} \sigma(t) = \gamma(h(s)) \in \Gamma \subset \mathbf{R}^3$$

si dice una *riparametrizzazione* di  $\Gamma$ . In pratica, una riparametrizzazione di  $\Gamma$  consiste in uno scaling dell'intervallo nel quale varia il parametro. Nella definizione (1.2) è implicito il fatto che il riscaldamento trasforma gli estremi  $a'$  e  $b'$  dell'intervallo  $I'$  negli estremi  $a$  e  $b$  dell'intervallo  $I$ . A questo proposito, si possono avere i due casi seguenti:

$$\begin{aligned} (i) \quad \sigma(a') &= (\gamma \circ h)(a') = \gamma(a) \quad \text{e} \quad \sigma(b') = (\gamma \circ h)(b') = \gamma(b) \\ (ii) \quad \sigma(a') &= (\gamma \circ h)(a') = \gamma(b) \quad \text{e} \quad \sigma(b') = (\gamma \circ h)(b') = \gamma(a). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Nel caso (i) si dice che la riparametrizzazione *mantiene l'orientazione* su  $\Gamma$ , nel caso (ii) che essa *inverte l'orientazione*.

Quale che sia la parametrizzazione  $\gamma$  della curva semplice  $\Gamma$  sull'intervallo  $[a, b]$ , se avviene che  $\gamma(a) = \gamma(b)$  si dice che  $\Gamma$  è una *curva semplice chiusa*.

**Definizione 1.1.** Sia  $\Gamma$  una curva semplice e  $\gamma : s \in [a, b] \rightarrow \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)) \in \Gamma \subset \mathbf{R}^3$  una sua parametrizzazione. Sia  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  tale che la funzione composta  $s \rightarrow f(x(s), y(s), z(s))$  risulti continua in  $I = [a, b]$ . Si definisce *integrale di  $f$  lungo  $\Gamma$*  la quantità:

$$\int_{\Gamma} f dl \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(\gamma(s)) |\gamma'(s)| ds, \quad (1.4)$$

dove  $|\gamma'(s)| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2}$ . La formula (1.4) si può giustificare in termini di limite di somme di Riemann. Infatti, la quantità  $|\gamma'(s)|$  è il limite:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\gamma(s + \Delta s) - \gamma(s)|}{\Delta s} = \frac{|\Delta \gamma(s)|}{\Delta s}. \quad (1.5)$$

Il numeratore del rapporto incrementale nella (1.5) rappresenta la lunghezza della corda lungo  $\Gamma$  tra i punti  $\gamma(s)$  e  $\gamma(s + \Delta s)$ .

Suddividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in un numero finito  $N$  di intervalli (non necessariamente uguali) di lunghezza  $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), con  $s_0 = a$  e  $s_N = b$ , e poniamo  $\gamma_i = \gamma(s_i)$  e  $\gamma_{i+1} = \gamma(s_{i+1})$ . La curva  $\Gamma$  resta quindi suddivisa in archi le cui lunghezze sono  $|\Delta \ell_i| = \widehat{\gamma_i \gamma_{i+1}}$ , mentre le lunghezze delle corrispondenti corde sono  $|\Delta \gamma_i| = \overline{\gamma_i \gamma_{i+1}}$ . Ponendo :

$$f_i = \min_{\Delta s_i} f(x), \quad F_i = \max_{\Delta s_i} f(x)$$

restano definite le somme:

$$s_N = \sum_{i=0}^{N-1} f_i |\Delta \ell_i|, \quad S_N = \sum_{i=0}^{N-1} F_i |\Delta \ell_i|. \quad (1.6)$$

le quali approssimano l'integrale di  $f$  lungo  $\Gamma$  rispettivamente per difetto e per eccesso:

$$s_N \leq \int_{\gamma} f dl \leq S_N,$$

per ogni  $N$ . Facendo tendere  $N \rightarrow \infty$  la lunghezza della corda tende a quella dell'arco corrispondente, per cui in (1.6) si può prendere  $|\Delta \gamma_i|$  in luogo di  $|\Delta \ell_i|$ . Moltiplicando e dividendo per  $\Delta s_i$  in  $s_N$  e  $S_N$  e tenendo conto che  $f$  è continua<sup>1</sup> si ha:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s)) |\gamma'(s)| ds,$$

e quindi la (1.4).

Se  $f = 1$  nella (1.4), l'integrale  $\int_{\gamma} dl = \int_a^b |\gamma'(s)| ds$  fornisce la *lunghezza* della curva  $\Gamma$ .

**Definizione 1.2.** Sia  $\Gamma$  una curva semplice e  $\gamma : s \in [a, b] \rightarrow \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)) \in \Gamma \subset \mathbf{R}^3$  una sua parametrizzazione. Si indichi con  $d\ell$  uno spostamento infinitesimo lungo  $\Gamma$  a sia  $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  un campo vettoriale tale che, dette  $f_x, f_y, f_z$  le componenti di  $\mathbf{f}$ , le funzioni composte  $s \mapsto f_x(x(s), y(s), z(s))$ ,  $s \mapsto f_y(x(s), y(s), z(s))$  e  $s \mapsto f_z(x(s), y(s), z(s))$  siano continue in  $[a, b]$ . La quantità:

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\ell \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds \quad (1.7)$$

---

<sup>1</sup>In realtà è sufficiente che sia continua a tratti

si dice *integrale curvilineo di  $\mathbf{f}$  lungo  $\Gamma$* .

Un esempio di integrale curvilineo è il lavoro compiuto da una forza  $(P, \mathbf{F})$  quando il suo punto di applicazione  $P$  si sposta dal punto  $A$  al punto  $B$  lungo la traiettoria  $\Gamma$ .

Data la parametrizzazione  $\gamma(s)$  di  $\Gamma$ , l'espressione:

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\gamma(s + \Delta s) - \gamma(s)}{\Delta s},$$

fornisce un vettore tangente a  $\Gamma$ . Il *versore tangente*, quindi, si ottiene come<sup>2</sup>:

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}. \quad (1.8)$$

Moltiplicando e dividendo per  $|\gamma'|$  e tenendo conto della (1.8) la (1.7) diventa:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(s)) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) |\gamma'(s)| ds \quad (1.9)$$

Dunque, calcolare l'integrale curvilineo del campo vettoriale  $\mathbf{f}$  lungo la curva  $\Gamma$  equivale a calcolare l'integrale lungo  $\Gamma$  della componente  $f_{\tau} = \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}$  di  $\mathbf{f}$  tangente alla curva.

**Teorema 1.1.** *Sia  $I' = [a', b'] \subset \mathbf{R}$ ,  $h : I' \rightarrow I = [a, b]$  biunivoca e  $C^1$  e sia  $\sigma = \gamma \circ h : I' \rightarrow \mathbf{R}^3$  una riparametrizzazione di  $\Gamma$ . Allora:*

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \begin{cases} \int_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\ell}, & \text{se } \sigma \text{ mantiene l'orientazione su } \Gamma, \\ - \int_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\ell}, & \text{se } \sigma \text{ inverte l'orientazione su } \Gamma. \end{cases} \quad (1.10)$$

*Dimostrazione.* L'integrale curvilineo di  $\mathbf{f}$  lungo  $\Gamma$  parametrizzata secondo la  $\sigma$  è:

$$\int_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{a'}^{b'} \mathbf{f}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt. \quad (1.11)$$

Ora, dal teorema di derivazione delle funzioni composte si ha:

$$\sigma'(t) = (\gamma \circ h)'(t) = \gamma'(h(t))h'(t)$$

Sostituendo quest'ultima e la  $\sigma(t) = \gamma(h(t))$  in (1.11) ed effettuando il cambio di variabile  $s = h(t)$  (e quindi  $ds = h'(t)dt$ ) si trova:

---

<sup>2</sup>A seconda della parametrizzazione prescelta può capitare che  $|\gamma'| = 1$ . Ciò accade, per esempio, se  $s$  è l'ascissa curvilinea, ovvero la misura dell'arco orientato lungo  $\Gamma$ . Inoltre, qui supponiamo che  $\gamma'(s) \neq \mathbf{0}$  per ogni  $s \in [a, b]$

$$\int_{a'}^{b'} \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t) dt = \int_{h(a')}^{h(b')} \mathbf{f}(\boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s) ds =$$

$$\begin{cases} \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s) ds = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\ell}, & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \text{ mantiene l'orientazione su } \Gamma, \\ \int_b^a \mathbf{f}(\boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s) ds = - \int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\ell}, & \text{se } \boldsymbol{\sigma} \text{ inverte l'orientazione su } \Gamma. \end{cases}$$

□

Il Teorema (1.1) afferma, in pratica, che l'integrale curvilineo di una funzione su una curva  $\Gamma$  è indipendente, a meno del segno, dalla parametrizzazione di quest'ultima.

## 2 Teoremi integrali

Una regione  $D$  del piano è detta di tipo 1 (Figura 1) se è costituita dai punti  $x, y$  tali che:

$$a \leq x \leq b, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),$$

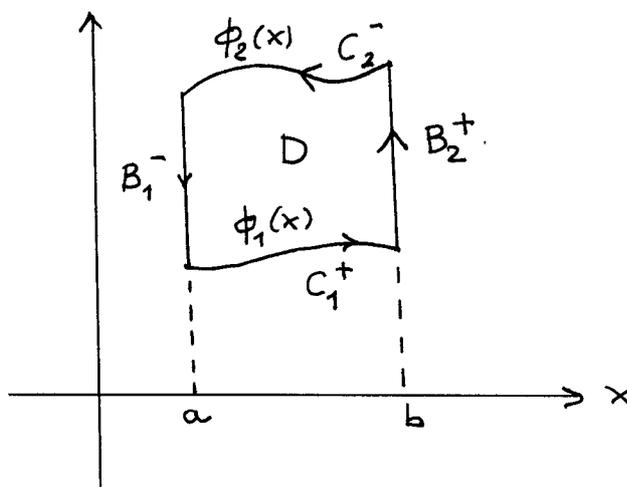


Figura 1: Regione di tipo 1

di tipo 2 (Figura 2), invece, se:

$$c \leq y \leq d, \quad \phi_3(y) \leq x \leq \phi_4(y).$$

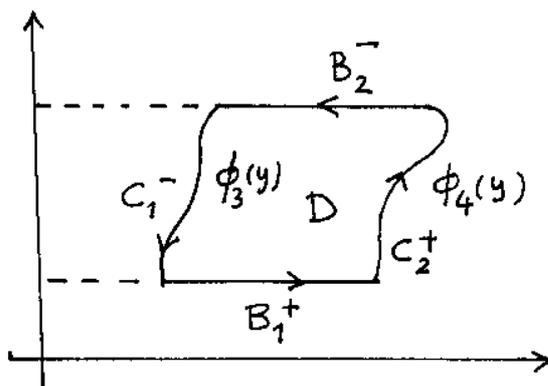


Figura 2: Regione di tipo 2

Una regione di tipo 3 è una regione che risulta sia di tipo 1 sia di tipo 2.

**Teorema 2.1.** Sia  $D$  una regione di tipo 1 e sia  $P(x, y)$  una funzione definita nella chiusura  $\bar{D}$  di  $D$  e di classe  $C^1$ . Allora:

$$-\int_{C^+} P dx = \int_D \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (2.1)$$

dove  $C^+$  è il contorno di  $D$  orientato positivamente in senso antiorario.

*Dimostrazione.* Il risultato si ottiene immediatamente calcolando l'integrale a secondo membro della (2.1), tenendo presente la Figura 1. Infatti:

$$\begin{aligned} \int_D \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \\ & \int_a^b [P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x))] dx = - \int_{C_2^-} P dx - \int_{C_1^+} P dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Il risultato si ottiene immediatamente osservando che, poichè gli integrali curvilinei della  $P$  in  $dx$  lungo  $B_1^-$  e lungo  $B_2^+$  sono nulli, questi si possono sommare a secondo membro della (2.2) per ottenere infine la (2.1).  $\square$

In modo del tutto analogo si dimostra il seguente:

**Teorema 2.2.** *Sia  $D$  una regione di tipo 2 e sia  $Q(x, y)$  una funzione definita nella chiusura  $\bar{D}$  di  $D$  e di classe  $C^1$ . Allora:*

$$\int_{C^+} Q dy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy. \quad (2.3)$$

Osservando infine che una regione di tipo 3 è nello stesso tempo sia di tipo 1 sia di tipo 2, si ottiene il seguente:

**Teorema 2.3. (di Green in  $\mathbf{R}^2$ )** *Sia  $D$  una regione di tipo 3 e siano  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  funzioni definite nella chiusura  $\bar{D}$  di  $D$  e di classe  $C^1$ . Allora:*

$$\int_{C^+} (P dx + Q dy) = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.4)$$

Vediamo alcune immediate conseguenze del Teorema 2.3. Consideriamo il campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{e}_1 + Q(x, y) \mathbf{e}_2$  definito e di classe  $C^1$  in  $\bar{D}$ . Stante la (1.7), l'integrale curvilineo (circuitazione) di  $\mathbf{F}$  lungo la curva chiusa  $C^+$ , contorno di  $D$ , è:

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{C^+} (P dx + Q dy). \quad (2.5)$$

Peraltro, la componente lungo  $\mathbf{e}_3$  del rotore di  $\mathbf{F}$  è:

$$\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (2.6)$$

Confrontando le (2.5) e (2.6) con la (2.4) si ottiene il:

**Teorema 2.4. (di Stokes in  $\mathbf{R}^2$ )** *Sia  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{e}_1 + Q(x, y) \mathbf{e}_2$  definito e di classe  $C^1$  in  $\bar{D} \subset \mathbf{R}^2$ . Allora:*

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_D (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3) dx dy. \quad (2.7)$$

Si può dimostrare che un risultato simile al Teorema 2.4 vale nel caso in cui  $D$  è una superficie bidimensionale "immersa" in  $\mathbf{R}^3$  ed avente contorno  $C^+$  (vedi Figura 3).

In questo caso al versore  $\mathbf{e}_3$  nella (2.7) va sostituito il versore  $\mathbf{n}$  della normale esterna a  $D$  in ogni punto:

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_D (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dx dy. \quad (2.8)$$

Quest'ultima relazione esprime il teorema di Stokes in  $\mathbf{R}^3$ .

Ricaviamo ora un'altra conseguenza del teorema di Green. Sia  $D$  una regione di  $\mathbf{R}^2$  il cui contorno  $C$  è individuato parametricamente dalla:

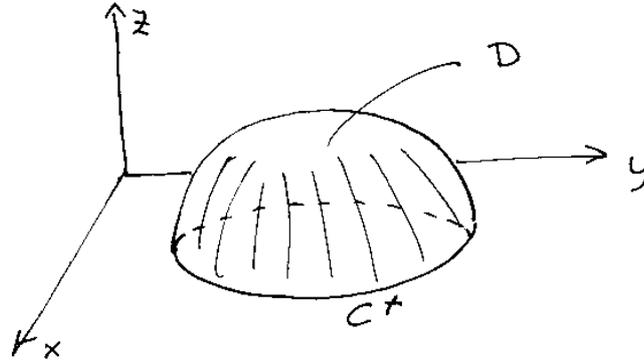


Figura 3: Regione  $D$  immersa in  $\mathbf{R}^3$

$$\gamma : s \in I = [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \gamma(s) \equiv (x(s), y(s)) \in C \subset \mathbf{R}^2$$

del tipo della (1.1). L'espressione:

$$\mathbf{n} = \frac{y'(s)\mathbf{e}_1 - x'(s)\mathbf{e}_2}{\sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}}, \quad (2.9)$$

fornisce il versore della normale esterna<sup>3</sup> a  $D$  in ogni punto di  $C$ . Siano ora  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  di classe  $C^1$  in  $D$  ed andiamo a considerare il campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y) = P\mathbf{e}_1 + Q\mathbf{e}_2$ . L'integrale della componente normale esterna di  $\mathbf{F}$  su  $C$  si calcola, come ricordato nella (1.4):

$$\begin{aligned} \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, dl &= \int_a^b \frac{P(x(s), y(s))y'(s) - Q(x(s), y(s))x'(s)}{\sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}} \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} \, ds = \\ &= \int_a^b \{P(x(s), y(s))y'(s) - Q(x(s), y(s))x'(s)\} \, ds = \int_C (P(x, y)dy - Q(x, y)dx). \end{aligned}$$

Confrontando quest'ultima relazione con la (2.4) si ottiene:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dl = \int_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \, dxdy = \int_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.$$

che esprime il teorema della divergenza di Gauss in  $\mathbf{R}^2$ . Più in generale, se  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  ha contorno  $\partial\Omega \subset \mathbf{R}^2$  ed  $\mathbf{F}$  è un campo vettoriale sufficientemente regolare in  $\bar{\Omega}$ , il teorema della divergenza si esprime attraverso la relazione:

<sup>3</sup>Stiamo qui supponendo che  $C$  sia sufficientemente regolare da possedere la normale in ogni suo punto.

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV. \quad (2.10)$$

### 3 Derivazione dell'equazione del calore

Sia  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ,  $\Omega'$  un qualsiasi sottoinsieme spaziale di  $\Omega$  ( $\Omega' \subset \Omega$ ),  $\Gamma' = \partial\Omega'$  il bordo di  $\Omega'$  e  $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$ . L'energia interna contenuta in  $\Omega'$  al tempo  $t$  è data da:

$$E_{\Omega'}(t) = \int_{\Omega'} \rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) dV, \quad (3.1)$$

dove  $\rho$  è la densità,  $c$  il calore specifico<sup>4</sup> e  $u$  la temperatura. Detta  $f(\mathbf{x}, t)$  l'energia prodotta (o sottratta) da eventuali sorgenti (pozzi) di calore presenti in  $\Omega'$  ed indicati rispettivamente con  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  il flusso di calore attraverso l'unità di superficie<sup>5</sup> e con  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  il versore della normale esterna a  $\Gamma'$ , l'equazione del bilancio dell'energia interna in  $\Omega'$  (primo principio della termodinamica) è:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega'} \rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\Omega'} f(\mathbf{x}, t) dV - \int_{\Gamma'} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA. \quad (3.2)$$

Poichè  $\Omega'$  è un dominio spaziale, il primo membro della (3.2) diventa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega'} \rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\Omega'} \rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV. \quad (3.3)$$

Utilizzando il teorema di Gauss (2.10), l'ultimo integrale a secondo membro della (3.2) diventa:

$$\int_{\Gamma'} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA = \int_{\Omega'} \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (3.4)$$

Sostituendo (10.13) e (10.14) in (3.2) troviamo:

$$\int_{\Omega'} \left( \rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - f(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \right) dV = 0,$$

da cui, stante l'arbitrarietà di  $\Omega' \subset \Omega$ , segue:

$$\rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = f(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t). \quad (3.5)$$

E' ora necessario introdurre una relazione costitutiva che legghi il flusso di calore

<sup>4</sup>Il calore specifico è la quantità di energia che occorre fornire (sottrarre) all'unità di massa perchè la sua temperatura aumenti (diminuisca) di un grado Kelvin

<sup>5</sup>Il flusso di calore si intenderà positivo se entrante in  $\Omega'$

$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  al campo di temperatura  $u(\mathbf{x}, t)$ . Il legame costitutivo più adoperato è la legge di Fick-Fourier:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\chi \nabla u(\mathbf{x}, t), \quad (3.6)$$

dove  $\chi$  è la conducibilità termica. Supponendo quest'ultima costante e sostituendo (3.6) in (3.5) troviamo:

$$\rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = f(\mathbf{x}, t) + \chi \nabla \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) + \chi \Delta u(\mathbf{x}, t). \quad (3.7)$$

Supponendo  $\rho$  e  $c$  indipendenti dal punto, dividendo ambo i membri della (3.7) per  $\rho c (\neq 0)$  e ponendo  $a^2 = \chi/\rho c > 0$  e  $Q(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)/\rho c$  troviamo finalmente:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) + Q(\mathbf{x}, t). \quad (3.8)$$

## 4 Derivazione dell'equazione delle onde

Sia  $\Omega$  il dominio (aperto e connesso) bidimensionale immerso in  $\mathbf{R}^3$  occupato dalla membrana e sia  $\Gamma$  il suo bordo. Le ipotesi che si fanno sono:

- lo spessore della membrana è nullo (in realtà piccolo rispetto alle altre due dimensioni);
- gli spostamenti sono esclusivamente verticali, cioè l'equazione della membrana a  $t$  fissato è:

$$z = u(x, y);$$

- piccole deformazioni, cioè:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \ll 1;$$

- la tensione è tangente in ogni punto alla membrana.

Facciamo, poi, un'altra ipotesi non essenziale ma che semplifica i calcoli, e cioè:

- la tensione è costante in modulo (ovvero le proprietà elastiche della membrana sono indipendenti da  $\mathbf{x} \in \Omega$ ).

Indichiamo con  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v(x, y, t) \mathbf{e}_3$  la velocità della membrana (diversa da zero soltanto nella direzione  $z$ ), con  $\rho$  la sua densità (costante), con  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  la forza specifica di volume e con  $T_0$  il modulo (costante) della tensione. Il bilancio della

quantità di moto nella direzione verticale  $z$  relativo ad un sottoinsieme materiale *qualsiasi*  $\Omega_0 \subset \Omega$  di contorno  $\Gamma_0$  fornisce::

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_3 dA = \int_{\Omega_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_3 dA + \int_{\Gamma_0} T_0(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_3 dl, \quad (4.1)$$

dove con  $\mathbf{t}$  ed  $\mathbf{n}$  si sono indicati i versori tangente e normale a  $\Gamma$  e con  $dA$  e  $dl$  gli elementi di superficie e di linea negli integrali. Per le ipotesi fatte, la tensione è equilibrata dappertutto tranne che sul bordo  $\Gamma_0$  di  $\Omega_0$ . Dovendo la tensione appartenere in ogni punto al piano tangente alla membrana, su  $\Gamma_0$  essa risulterà ortogonale tanto a  $\mathbf{t}$  quanto ad  $\mathbf{n}$ , per cui la sua direzione sarà data (su  $\Gamma_0$ ) dal versore  $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$ . Utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds<sup>6</sup> ( $\Omega_0$  è una superficie materiale), l'equazione di continuità:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

ed il fatto che  $\mathbf{v}$  ha direzione soltanto lungo  $z$  e dipende spazialmente soltanto da  $x$  ed  $y$ , il primo membro della (4.1) diventa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_3 dA = \int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dA = \int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} dA.$$

Ora, utilizzando la proprietà ciclica del prodotto misto, l'ultimo termine a secondo membro della (4.1) si può scrivere come:

$$\int_{\Gamma_0} T_0(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_3 dl = \int_{\Gamma_0} T_0(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{t} dl$$

che, utilizzando il teorema di Stokes (2.8), diventa:

$$\int_{\Omega_0} T_0 \nabla \times [(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3)] \cdot \mathbf{n} dA.$$

Ora, siccome l'equazione della membrana è il grafico di una funzione  $u$  da  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}$ , se ne può dare la rappresentazione:

$$g(x, y, z) := z - u(x, y) = 0.$$

Dunque, l'espressione cartesiana del versore normale  $\mathbf{n}$  risulta:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{-\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1}} \approx -\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,$$

---

<sup>6</sup>Vedi Appendice A.

per l'ipotesi di piccole deformazioni. Ora:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3 = \left( -\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \right) \times \mathbf{e}_3 = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_1,$$

$$\nabla \times [(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3)] = \left( \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left( \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_1 \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathbf{e}_3 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \mathbf{e}_3,$$

$$\nabla \times [(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3)] \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Sostituendo a secondo membro della (4.1) e ponendo  $f(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_3$  si ottiene:

$$\int_{\Omega_0} \left\{ \rho \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - f - T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right\} dA = 0.$$

Poichè questa identità vale *qualunque* sia  $\Omega_0 \subset \Omega$  si deve necessariamente avere:

$$\rho \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f,$$

ovvero, ponendo  $F(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)/\rho(\mathbf{x}, t)$  ( $\rho > 0$ ):

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \Delta u + F.$$

Se, infine, la membrana è omogenea ( $\rho = \text{costante}$ ), ponendo  $a^2 = T_0/\rho$  si ottiene l'equazione di d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + F. \quad (4.2)$$

## 5 Considerazioni sulla buona posizione dei problemi alle derivate parziali

Cominciamo con l'osservare che se la funzione incognita  $u$  è indipendente dal tempo (caso stazionario), allora le (4.2) e (3.8) si riducono ambedue all'equazione di Poisson:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (5.1)$$

dove  $f(\mathbf{x})$  è una funzione assegnata in  $\Omega$ .

Se non vi sono forze esterne nella (4.2) o sorgenti di calore nella (3.8) otteniamo rispettivamente l'equazione omogenea di d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta u(\mathbf{x}, t), \quad (5.2)$$

e l'equazione omogenea del calore:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(\mathbf{x}, t), \quad (5.3)$$

mentre l'equazione di Poisson (5.1) si riduce all'equazione di Laplace:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0. \quad (5.4)$$

Per le equazioni (5.2) e (5.3), come del resto per le loro varianti inomogenee (4.2) e (3.8), possono porsi diversi tipi di problemi. Il primo problema che può essere considerato è il problema ai valori iniziali, detto anche problema di Cauchy. Tenendo conto che l'equazione di d'Alembert è del secondo ordine nel tempo, il problema di Cauchy per la (5.2) è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{array} \right. \quad (5.5)$$

dove  $g(\mathbf{x})$  e  $h(\mathbf{x})$  rappresentano rispettivamente lo spostamento e la velocità dei punti della membrana al tempo  $t = 0$ . Per l'equazione del calore, del primo ordine nel tempo, il problema di Cauchy diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

dove  $g(\mathbf{x})$  rappresenta la temperatura iniziale in  $\Omega$ .

Se il dominio  $\Omega$  è limitato, oltre ai dati iniziali è necessario assegnare anche dei dati sul contorno  $\partial\Omega$  di  $\Omega$ . In questo caso si parla di problema ai valori iniziali ed al contorno (VIC). A seconda del tipo di dato che si assegna su  $\partial\Omega$  si distinguono diversi tipi di problemi VIC. Il problema di Dirichlet corrisponde ad assegnare su  $\partial\Omega$  il valore della funzione incognita  $u(\mathbf{x}, t)$ . Nel problema di Neumann, invece, si assegna sul contorno di  $\Omega$  il valore della derivata  $\partial u / \partial n = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t)$  nella direzione normale a  $\partial\Omega$ . Infine, nel problema di Robin, detto anche problema misto, si assegnano dati di Dirichlet su un sottoinsieme  $\Gamma_1$  di  $\partial\Omega$  e dati di Neumann sulla restante porzione  $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$  di  $\partial\Omega$ .

Consideriamo, per fissare le idee, il problema di Dirichlet per l'equazione del calore:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) = u^*(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0, \end{array} \right. \quad (5.7)$$

dove  $u^*(\mathbf{x}, t)$  è il dato di Dirichlet sul contorno di  $\Omega$ . Per questo come per gli altri problemi ai valori iniziali o ai valori iniziali e al contorno si pone la questione preliminare della *buona posizione*. Questa consiste nel provare che il problema:

- ammette una soluzione;

che:

- la soluzione è univocamente determinata;

e che:

- la soluzione dipende con continuità dai dati.

## 6 Buona posizione del problema ai valori iniziali. Teorema di Cauchy-Kowalevskaya

Nello studio delle equazioni differenziali ordinarie un classico risultato, normalmente esposto nei Corsi di Analisi Matematica, riguarda la buona posizione del problema ai valori iniziali, o problema di Cauchy. Se ci limitiamo a considerare un'equazione del primo ordine di forma normale, questo problema è formulato come segue:

*Determinare la/le soluzioni dell'equazione:*

$$u' = f(x, u), \quad (6.1)$$

*che assume/assumono nel punto  $x_0$  il valore:*

$$u(x_0) = u_0. \quad (6.2)$$

Se il problema (6.1)-(6.2) è ben posto, allora di soluzioni ve ne è una ed una soltanto. A proposito, sussiste il ben noto:

**Teorema 6.1. (Teorema di Cauchy)** *Sia la  $f$  che compare nella (6.1) una funzione continua dei suoi argomenti e lipschitziana rispetto ad  $u$  in un intorno del "dato iniziale"  $(x_0, u_0)$ . Allora, è possibile determinare un  $\delta > 0$  tale che il problema ai valori iniziali (6.1)-(6.2) ammette una ed una sola soluzione nell'intervallo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .*

Il risultato precedente è fondamentale nello studio delle equazioni ordinarie perchè fornisce delle condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità *locali* della soluzione di (6.1)-(6.2). Quando si passa a studiare le equazioni alle derivate parziali, è spontaneo chiedersi se vi è un risultato analogo per il corrispondente problema ai valori iniziali.

Come abbiamo visto ai paragrafi precedenti, le classi di equazioni alle derivate parziali più importanti nella fisica matematica sono di ordine due. Per questa ragione, limitiamoci a considerare la più generale equazione alle derivate parziali *lineare* del secondo ordine:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y), \quad (6.3)$$

nella funzione incognita  $u(x, y)$ . I termini  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono i *coefficienti* mentre  $\Phi$  è il *termine noto*, cioè è assegnato come funzione dei suoi argomenti. A differenza del caso di un'equazione ordinaria, per formulare il problema di Cauchy relativo alla (6.3) l'incognita  $u$  non è assegnata in un punto  $(x_0, y_0)$  ma lungo una curva  $\Gamma$  nel piano  $xy$  di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad s \in [a, b] \subset \mathbf{R}, \quad (6.4)$$

essendo  $s$  l'ascissa curvilinea lungo  $\Gamma$ . Poichè la (6.3) è di ordine due non basta assegnare  $u$  lungo  $\Gamma$  ma occorre assegnare, sempre lungo  $\Gamma$ , anche la derivata normale della  $u$ . Il problema è dunque:

*Determinare la/le soluzioni della (6.3) tale/tali che:*

$$\begin{aligned} u(x(s), y(s)) &= \varphi(s), \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x(s), y(s)) &= \psi(s), \end{aligned} \quad s \in [a, b] \subset \mathbf{R}, \quad (6.5)$$

dove  $\mathbf{n}(s)$  è il versore della normale principale a  $\Gamma$  nel punto  $(x(s), y(s))$ , per  $s \in [a, b]$ .

L'idea è la seguente. Indicato con  $P_0$  un punto della curva  $\Gamma$  di coordinate  $x(s_0), y(s_0) \equiv (x_0, y_0)$ , cerchiamo una soluzione del problema (6.3)-(6.5) nella forma di una serie di potenze:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u(P_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{P_0} (y - y_0) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{P_0} (x - x_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{P_0} (x - x_0)(y - y_0) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{P_0} (y - y_0)^2 \\
&+ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{P_0} (x - x_0)^3 + \dots \dots \dots
\end{aligned}
\tag{6.6}$$

Se si riesce a dimostrare che (i) una soluzione della forma (6.6) esiste e che (ii) per ogni punto  $P_0 \in \Gamma$  la serie (6.6) ha raggio di convergenza non nullo  $\ell(P_0)$  allora, al variare del punto iniziale  $P_0 \in \Gamma$ , si determina una regione (vedi Figura 4) attorno a  $\Gamma$  nella quale una soluzione del problema (6.3)-(6.5) esiste.



Figura 4: *Ciascuno dei cerchi individua una regione in cui la serie (6.6) converge. In questo modo si determina un intorno di  $\Gamma$  in cui vi è una soluzione di (6.3)-(6.5).*

Condizione necessaria perchè la serie (6.6) abbia senso è che, per ogni  $P_0 \in \Gamma$ , le derivate della  $u$  di tutti gli ordini che appaiono nella serie esistano, cioè siano calcolabili a partire dai dati (6.5).

In un qualsiasi punto di  $\Gamma$  (cioè per qualsiasi  $s \in [a, b]$ ) i vettori:

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right), \quad \mathbf{n} = \left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds}\right),$$

sono rispettivamente i versori tangente e normale a  $\Gamma$  in  $P(s)$ . Lungo  $\Gamma$  si ha dunque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial s} = \nabla u \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{ds} = \psi. \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Il determinante della matrice dei coefficienti del sistema (6.7) è:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = |\boldsymbol{\tau}|^2 = 1,$$

e dunque da (6.7) si calcolano le derivate prime  $\partial u/\partial x$  e  $\partial u/\partial y$  della  $u$  lungo  $\Gamma$ . Poniamo ora per brevità:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (6.8)$$

La (6.3) si scrive:

$$Ar + Bs + Ct = \Phi,$$

dove a questo punto sia i coefficienti  $A, B, C$  che il termine noto  $\Phi$  sono *noti* lungo  $\Gamma$ . Inoltre, le relazioni:

$$dp = r dx + s dy,$$

$$dq = s dx + t dy,$$

sono delle identità valide dappertutto e, in particolare, lungo  $\Gamma$ , laddove i termini  $dx$  e  $dy$  sono *noti*. Dal sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ar + Bs + Ct = \Phi, \\ r dx + s dy = dp, \\ s dx + t dy = dq, \end{array} \right. \quad (6.9)$$

dove le quantità  $A, B, C, dp, dq$  sono valutate lungo  $\Gamma$  è possibile calcolare le derivate seconde  $r, s, t$  di  $u$  lungo  $\Gamma$  a condizione che il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = A(dy)^2 - B dx dy + C(dx)^2, \quad (6.10)$$

non si annulli in nessun punto di  $\Gamma$ . Supponendo verificata questa condizione (cioè  $\Delta \neq 0$  per ogni  $P \in \Gamma$ ), ponendo:

$$r_x = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad s_x = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = r_y, \quad t_x = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = s_y, \quad t_y = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3},$$

e derivando rispetto ad  $x$  lungo  $\Gamma$  le equazioni del sistema (6.9) si trova:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ar_x + Bs_x + Ct_x = \Phi_x + \Psi, \\ r_x dx + s_x dy = dr, \\ s_x dx + t_x dy = ds. \end{array} \right. \quad (6.11)$$

Qui  $\Psi$ , che raggruppa tutti le quantità che non contengono derivate terze, e i termini  $A, B, C, dr, ds$  sono calcolati lungo  $\Gamma$ , e quindi sono *noti*. Ancora una volta, se il determinante dei coefficienti del sistema (6.11) è diverso da zero in ogni punto di  $\Gamma$  sarà possibile calcolare, in ogni  $P \in \Gamma$ , le derivate terze  $r_x, s_x, t_x$  di  $u$  lungo  $\Gamma$ . La derivata terza mancante, cioè  $t_y$ , si potrà calcolare, sotto la stessa condizione, derivando le equazioni del sistema (6.9) rispetto ad  $y$  invece che rispetto ad  $x$ . In ogni caso, è immediato verificare che la condizione perchè si possano calcolare *tutte* le derivate terze di  $u$  lungo  $\Gamma$  è che:

$$\Delta = A(dy)^2 - Bdx dy + C(dx)^2 \neq 0, \quad \text{per ogni } P \in \Gamma. \quad (6.12)$$

Iterando il procedimento sin qui descritto (i calcoli sono un po' noiosi ma semplici) si verifica che la condizione (6.12) è necessaria per il calcolo delle derivate di qualsiasi ordine della  $u$  lungo la curva  $\Gamma$ . Supponendo dunque la (6.12) verificata, tutti i termini della serie di potenze (6.6) sono ben definiti e quindi ha senso cercare una soluzione del problema (6.3)-(6.5) avente quella forma. Possiamo a questo punto enunciare il:

**Teorema 6.2. (Teorema di Cauchy-Kowalevskaya)** *Supponiamo che i coefficienti  $A, B, C$  ed il termine noto  $\Phi$  della (6.3) siano funzioni analitiche dei loro argomenti, che la curva  $\Gamma$  sia analitica (cioè siano analitiche le sue equazioni parametriche (6.4)), che i dati (6.5) siano analitici e che la condizione (6.12) risulti verificata in ogni punto  $P \in \Gamma$ . Allora, in ogni punto di  $\Gamma$ , la serie (6.6) ha raggio di convergenza diverso da zero. Dunque, il problema di Cauchy (6.3)-(6.5) ammette una soluzione analitica in un intorno della curva  $\Gamma$ . Inoltre, tale soluzione è anche l'unica soluzione (analitica) di (6.3)-(6.5).*

L'equazione:

$$\Delta = A(dy)^2 - Bdx dy + C(dx)^2 = 0, \quad (6.13)$$

definisce in ogni punto due (in generale) direzioni che rappresentano le tangenti a due (in generale) famiglie di curve lungo le quali  $\Delta = 0$ . Tali curve vengono dette curve caratteristiche o, più semplicemente, *caratteristiche*. Lungo le caratteristiche è impossibile calcolare le derivate della  $u$ . Condizione necessaria,

quindi, perchè l'equazione (6.3) sia risolvibile è che  $\Gamma$  non risulti tangente in nessun punto ad una curva caratteristica.

La condizione  $\Delta = 0$  può essere riscritta come:

$$C \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 - B \left( \frac{dx}{dy} \right) + A = 0, \quad (6.14)$$

e quindi le caratteristiche hanno, in ogni punto, una tangente di coefficiente angolare:

$$\lambda \equiv \frac{dx}{dy} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}.$$

Si distinguono i seguenti casi:

- $B^2 - 4AC > 0$  In questo caso le caratteristiche sono due famiglie di curve reali nel piano  $xy$ . L'equazione si dice *iperbolica*.
- $B^2 - 4AC = 0$  La condizione  $\Delta = 0$  definisce, in questo caso, una famiglia di caratteristiche reali. L'equazione si dice *parabolica*.
- $B^2 - 4AC < 0$  In questo caso non vi sono caratteristiche reali. L'equazione si dice *ellittica*.

**Esempio 6.1.** L'equazione delle onde:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (6.15)$$

ha  $A = a^2$ ,  $B = 0$ ,  $C = -1$  e quindi  $B^2 - 4AC = 4a^2 > 0$ . Dunque, l'equazione delle onde è iperbolica.

L'equazione del calore:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \Phi \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (6.16)$$

ha  $A = a^2$ ,  $B = C = 0$  e quindi  $B^2 - 4AC = 0$ . Dunque, l'equazione del calore è parabolica.

Infine, l'equazione di Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \equiv \Phi(x, y), \quad (6.17)$$

ha  $A = C = 1$ ,  $B = 0$  e quindi  $B^2 - 4AC = -4 < 0$ . Dunque, l'equazione di Poisson (come quella di Laplace) è ellittica.

**Esempio 6.2.** La classificazione di un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine data nell'esempio precedente può non essere uniforme, nel senso che una stessa equazione può avere caratteristiche diverse in diverse regioni. Un esempio è l'equazione di Tricomi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (6.18)$$

usata nello studio del moto di un gas con velocità prossima a quella del suono. Si verifica immediatamente che l'equazione (6.18) è iperbolica nel semipiano  $x < 0$ , parabolica sull'asse  $x = 0$  ed ellittica nel semipiano  $x > 0$ .

## 7 Problema di Cauchy per l'equazione delle onde 1D. Soluzione di d'Alembert

In questo paragrafo studieremo il problema di Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x, 0) = F(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = G(x), \end{array} \right. \quad -\infty < x < +\infty \quad (7.1)$$

Qui  $F(x)$  e  $G(x)$  rappresentano rispettivamente lo spostamento e la velocità iniziali. Le caratteristiche dell'equazione iperbolica (7.1)<sub>1</sub> sono le rette di coefficiente angolare:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{4a^2}}{-2} = \mp a.$$

Nelle applicazioni risulta più pratico usare, per rappresentare le caratteristiche, un piano cartesiano che presenta la variabile spaziale  $x$  sulle ascisse ed il tempo  $t$  sulle ordinate. In questa maniera, le curve caratteristiche sono le rette raffigurate in Figura 5. Per ogni punto  $x_0$  passano due rette caratteristiche i cui coefficienti angolari sono  $\pm 1/a$  (nel piano  $tx$ ).

Introduciamo le nuove variabili:

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. \quad (7.2)$$

Non è difficile verificare che, nelle nuove variabili (7.2), i termini dell'equazione indefinita (7.1)<sub>1</sub> diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned}$$

Sostituendo in (7.1)<sub>1</sub> e tenendo conto che  $a \neq 0$ , si trova che l'equazione indefinita delle onde nelle variabili  $\xi, \eta$  si scrive:

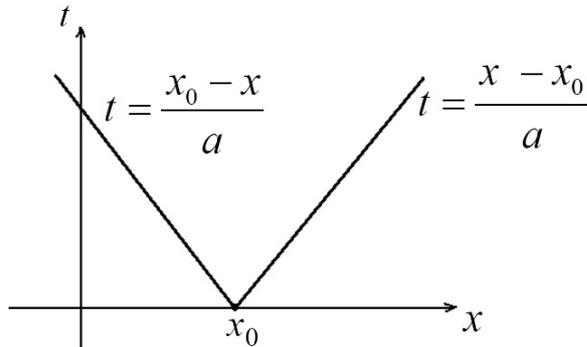


Figura 5: *Caratteristiche per l'equazione delle onde in una dimensione spaziale. Per ogni punto  $x_0$  passano due rette caratteristiche.*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (7.3)$$

È immediato verificare che la soluzione generale della (7.3) è:

$$u = f(\xi) + g(\eta),$$

ovvero, tornando alle variabili originali  $x, t$ :

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad (7.4)$$

dove  $f$  e  $g$  sono funzioni *arbitrarie* dei loro argomenti. La (7.4) rappresenta la soluzione generale dell'equazione delle onde indefinita in una dimensione spaziale. Per trovare la soluzione del problema ai valori iniziali (7.1) occorre specificare le due funzioni arbitrarie  $f$  e  $g$  in termini degli assegnati dati iniziali (7.1)<sub>2,3</sub>. Ponendo  $t = 0$  nella (7.4) e tenendo conto delle (7.1)<sub>2,3</sub> si trova:

$$f(x) + g(x) = F(x), \quad (7.5)$$

$$-af'(x) + ag'(x) = G(x).$$

Integriamo la (7.5)<sub>2</sub> tra un punto qualsiasi  $x_0$  ed  $x$ :

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x G(s) ds + K, \quad (7.6)$$

dove la costante di integrazione  $K$  dipende soltanto da  $x_0$ . Confrontando la (7.6) con la (7.5)<sub>1</sub> si trova:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{F(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x G(s) ds - \frac{K}{2}, \\
 g(x) &= \frac{F(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x G(s) ds + \frac{K}{2},
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

Tenendo conto della (7.4), sostituendo nelle (7.7)<sub>1,2</sub> rispettivamente gli argomenti  $x - at$  e  $x + at$  si trova:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{F(x - at) + F(x + at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} G(s) ds + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} G(s) ds \\
 &= \frac{F(x - at) + F(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} G(s) ds.
 \end{aligned}
 \tag{7.8}$$

Quest'ultima espressione è la soluzione del problema di Cauchy (7.1) e prende il nome di *soluzione di d'Alembert*.

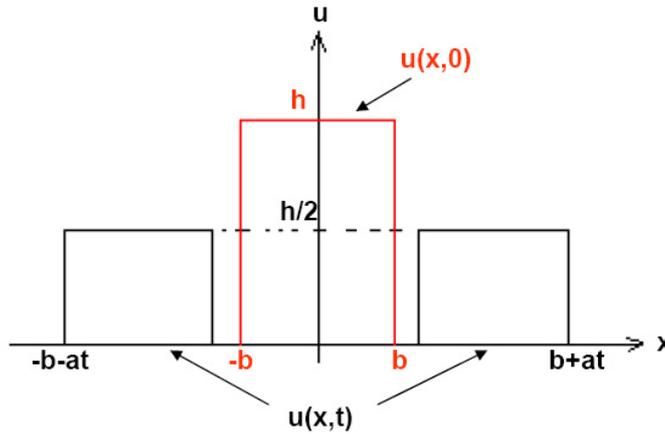


Figura 6: Dato iniziale (7.9) (in rosso); soluzione (7.10) all'istante generico  $t > 0$  (in nero).

**Esempio 7.1.** Supponiamo che i dati (7.1)<sub>2,3</sub> siano:

$$u(x, 0) = F(x) = \begin{cases} h, & \text{per } -b \leq x \leq b, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}
 \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = G(x) = 0, \quad \infty < x < +\infty$$

La soluzione (7.8) corrispondente a questi dati è:

$$u(x, t) = \frac{F(x - at) + F(x + at)}{2}. \quad (7.10)$$

Il dato iniziale e la soluzione sono rappresentati in Figura 6. Come si vede, la soluzione consiste di due “onde” aventi la stessa forma del dato iniziale ma di ampiezza pari alla sua metà, l’una (quella corrispondente a  $F(x - at)/2$ ) che viaggia verso destra con velocità uguale ad  $a$  e l’altra (quella corrispondente a  $F(x + at)/2$ ) che viaggia verso sinistra con la stessa velocità  $a$ . Si osservi che la velocità di propagazione corrisponde all’inverso della pendenza delle rette caratteristiche nel piano  $(x, t)$ .

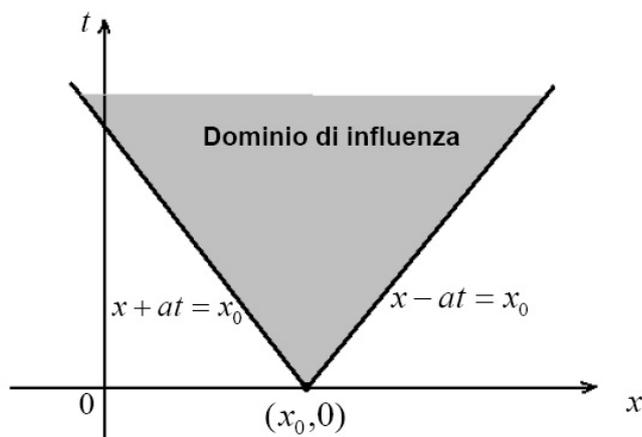


Figura 7: *Dominio di influenza dei dati iniziali nel punto  $(x_0, 0)$ .*

Se, diversamente dall’Esempio 7.1, la velocità iniziale fosse non nulla, l’effetto sarebbe quello di un’onda che si propaga con velocità  $\leq a$  in entrambe le direzioni. In definitiva, i dati iniziali di un problema del tipo (7.1) conducono ad una soluzione sotto forma di un’onda che si propaga nelle due opposte direzioni con velocità uguale ad  $a$  (se  $G(x) = 0$ ) e comunque non superiore ad  $a$  (se  $G \neq 0$ ). Questo fatto è visualizzato nel *piano caratteristico*  $x, t$ . Un dato iniziale (di posizione e/o di velocità) nel punto  $(x_0, 0)$  influenza la soluzione soltanto nella regione ombreggiata di Figura 7, che viene chiamata *dominio di influenza* del punto  $(x_0, 0)$ . Più in generale, se  $F$  e  $G$  sono nulle per  $|x| > b$ , allora  $u(x, t)$  è uguale a zero per  $|x| > b + at$ , per modo che il dominio di influenza dell’intervallo  $|x| \leq b$  è il settore  $|x| \leq b + at$ . Questa osservazione va sotto il nome di *principio di causalità*.

## 8 Problema di Cauchy per l'equazione di diffusione 1D. Nucleo del calore

In questo paragrafo studieremo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (8.1)$$

dove  $f(x)$  è il dato iniziale (tipicamente, la temperatura iniziale). Per determinare la soluzione di (8.1) faremo uso delle trasformazioni integrali, in particolare della trasformata di Fourier. A tale scopo, la condizione da richiedere sulla  $u(x, t)$  è che essa risulti assolutamente integrabile in  $-\infty < x < +\infty$  per ogni  $t \geq 0$ , cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)| dx < +\infty, \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Calcoliamo dunque la trasformata di Fourier della (8.1)<sub>1</sub>:

$$a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-ikx} dx. \quad (8.2)$$

Indicando con  $\hat{u}(k, t)$  la trasformata della  $u(x, t)$ , sfruttando le proprietà delle trasformate di Fourier delle derivate la (8.2) si può scrivere come:

$$-a^2 k^2 \hat{u}(k, t) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k, t), \quad (8.3)$$

la quale, integrata rispetto a  $t$  fornisce:

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) e^{-a^2 k^2 t}, \quad (8.4)$$

per ogni  $-\infty < k < +\infty$ . Il dato iniziale nella (8.4) si ricava dalla trasformata di Fourier del dato (8.1)<sub>2</sub>:

$$\hat{u}(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx = \hat{f}(k).$$

In questo modo si ha:

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-a^2 k^2 t}. \quad (8.5)$$

Ricordiamo che il prodotto di convoluzione tra due funzioni  $\phi(x)$  e  $\psi(x)$  è definito come:

$$(\phi * \psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x - \xi) \psi(\xi) d\xi. \quad (8.6)$$

Il teorema di convoluzione afferma che se  $\varphi$  e  $\psi$  sono assolutamente integrabili in  $(-\infty, +\infty)$ , allora:

$$\widehat{(\phi * \psi)} = \hat{\phi} \hat{\psi}. \quad (8.7)$$

La (8.5) ci dice che la  $\hat{u}$  si presenta proprio sotto la forma di prodotto tra due trasformate di Fourier, la trasformata  $\hat{f}$  del dato iniziale  $f$  e la trasformata:

$$\hat{G}(k, t) \equiv e^{-a^2 k^2 t}. \quad (8.8)$$

La ricerca della soluzione di (8.1) è quindi ricondotto alla determinazione dell'antitrasformata della  $\hat{G}(k, t)$  definita dalla (8.8), ovvero:

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 k^2 t} e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \left( k^2 - \frac{ixk}{a^2 t} \right)} dk. \quad (8.9)$$

Completando il quadrato all'esponente della funzione integranda nella relazione precedente e portando fuori dall'integrale le quantità indipendenti da  $k$ , si trova:

$$G(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \left( k - \frac{ix}{2a^2 t} \right)^2} dk = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t s^2} ds, \quad (8.10)$$

dove si è effettuato il cambiamento di variabili  $s = k - (ix/2a^2 t)$ . Ora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}}, \quad (8.11)$$

avendo calcolato l'integrale gaussiano:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Sostituendo (8.11) nella (8.10) si trova:

$$G(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{2a^2 t}}. \quad (8.12)$$

La  $G(x, t)$  così' ottenuta prende il nome di *nucleo del calore*. Ora, utilizzando il teorema di convoluzione possiamo finalmente scrivere la soluzione del problema di Cauchy (8.1) come prodotto di convoluzione tra il nucleo del calore ed il dato iniziale:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} f(\xi) d\xi. \quad (8.13)$$

**Esempio 8.1.** Consideriamo il problema (8.1) con il dato iniziale:

$$u(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (8.14)$$

La soluzione (8.13) in questo caso è:

$$u(x, t) = \frac{T_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi. \quad (8.15)$$

Effettuando il cambio di variabile:

$$\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} = s,$$

la (8.15) diventa:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{T_0}{2a\sqrt{\pi t}} 2a\sqrt{t} \int_{x/2a\sqrt{t}}^{-\infty} e^{-s^2} ds = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-s^2} ds + \int_0^{x/2a\sqrt{t}} e^{-s^2} ds \right] \\ &= \frac{T_0}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right], \end{aligned} \quad (8.16)$$

dove si è usato il risultato  $\int_{-\infty}^0 \exp(-s^2) ds = \sqrt{\pi}/2$  e dove la *funzione dell'errore*  $\operatorname{erf}(y)$  è definita come:

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz, \quad \text{per ogni } y \in \mathbf{R}.$$

In Figura 8 si può vedere il grafico sia del dato iniziale (8.14) che della soluzione.

**Osservazione 8.1.** L'Esempio 7.1 mostra chiaramente come l'equazione delle onde propaghi nel tempo la soluzione senza che questa cambi la propria regolarità. In particolare, in quel caso il dato iniziale discontinuo risulta in una soluzione che si mantiene discontinua ad ogni  $t > 0$ . Diversamente, l'Esempio 8.1 mostra come l'equazione del calore “regolarizzi” immediatamente (non appena  $t > 0$ ) il dato iniziale. In quel caso, il dato discontinuo a  $t = 0$  diventa  $C^\infty$  per  $t > 0$ .

**Osservazione 8.2.** Se si considera un dato iniziale per (8.1) del tipo:

$$u(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{se } |x| \leq b, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (8.17)$$

la corrispondente soluzione è:

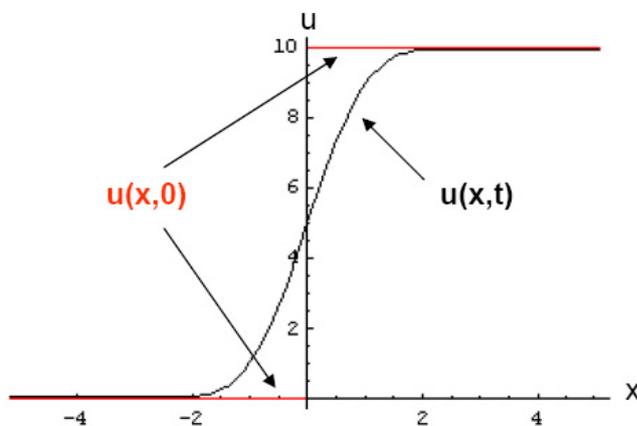


Figura 8: Dato iniziale (8.14) (in rosso); soluzione (8.16) all'istante  $t = \pi$  per  $a = 1; T_0 = 10$  (in nero).

$$u(x, t) = \frac{T_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-b}^{+b} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi. \quad (8.18)$$

Per ogni  $t > 0$ , piccolo quanto si vuole, la funzione (8.18) risulta positiva per ogni  $x$ , grande quanto si vuole (in valore assoluto). In altre parole, anche se inizialmente (per  $t = 0$ ) la temperatura  $u$  è diversa da zero *soltanto* nell'intervallo  $(-b, b)$ , all'istante  $t = 0^+$  essa risulta diversa da zero a distanze *arbitrariamente* grandi da questo intervallo. Questa osservazione porta a concludere che il nostro modello matematico prevede che il calore si propaghi con velocità infinita. Un altro modo di giungere a questa stessa conclusione consiste nell'osservare che, come si è visto nell'Esempio 6.1, le caratteristiche dell'equazione del calore sono rette orizzontali nel piano  $x, t$ . Poichè la pendenza delle caratteristiche in questo piano è l'inverso della velocità di propagazione, quest'ultima risulta essere infinita.

## 9 Problemi ai valori iniziali e al contorno. Separazione delle variabili

Consideriamo il seguente problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione del calore in una dimensione spaziale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (9.1)$$

Cerchiamo una soluzione diversa da zero del problema nella forma:

$$u(x, t) = U(x)T(t), \quad (9.2)$$

ovvero come prodotto di una funzione  $U(x)$  della sola variabile spaziale per una funzione  $T(t)$  della sola variabile temporale. Sostituendo la (9.2) nella prima delle (9.1) e dividendo ambo i membri per  $U(x)T(t) \neq 0$  troviamo:

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{U''}{U}. \quad (9.3)$$

Ora, il primo membro della (9.3) dipende soltanto da  $t$  mentre il secondo membro soltanto da  $x$ . Derivando la (9.3) rispetto a  $t$ , quindi, si trova che la derivata del primo membro è zero, cioè il primo membro della (9.3) è costante. Ma siccome sussiste la (9.3), se ne deduce che primo e secondo membro sono uguali ad una stessa costante  $\mu$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T'}{a^2 T} = \mu, \\ \frac{U''}{U} = \mu. \end{array} \right. \quad (9.4)$$

Prendendo in esame la seconda delle (9.4), dalle condizioni al contorno di Dirichlet sulla  $u(x, t)$  (vedi la terza delle (9.1)) si mutuano le condizioni in  $x = 0$  e  $x = L$  per la  $U(x)$  e si arriva a scrivere il seguente problema ai limiti:

$$\left\{ \begin{array}{l} U'' = \mu U, \\ U(0) = U(L) = 0. \end{array} \right. \quad (9.5)$$

Esaminiamo le possibili soluzioni di (9.5) a seconda del segno della costante  $\mu$ .

- $\mu = \lambda^2 > 0$

In questo caso la soluzione di (9.5)<sub>1</sub> è:

$$U(x) = c_1 e^{-\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} = a_1 \cosh(\lambda x) + a_2 \sinh(\lambda x), \quad (9.6)$$

dove  $c_1$ ,  $c_2$  e  $a_1$ ,  $a_2$  sono costanti arbitrarie<sup>7</sup>. Quando si sostituiscono i dati ai limiti (9.5)<sub>2</sub> nella (9.6) si verifica immediatamente che questi possono essere

<sup>7</sup>Si può passare dalla forma esponenziale della soluzione a quella in termini di funzioni

assunti dalla  $U$  soltanto se  $c_1 = c_2 = 0$  (oppure  $a_1 = a_2 = 0$  se si usa l'espressione della  $U$  in termini di funzioni iperboliche). Ma questo vorrebbe dire che  $U(x) = 0$  e, di conseguenza,  $u(x, y) = 0$ . Dunque,  $\mu$  non può essere positiva.

- $\mu = 0$

In questo caso la soluzione di (9.5)<sub>1</sub> è:

$$U(x) = c_1 + c_2 x,$$

con  $c_1$  e  $c_2$  costanti arbitrarie. Imponendo in quest'ultima relazione i dati (9.5)<sub>2</sub> si trova ancora una volta  $c_1 = c_2 = 0$ . Quindi,  $\mu$  non può neanche essere nulla.

- $\mu = -\lambda^2 < 0$

In questo caso la soluzione di (9.5)<sub>1</sub> è:

$$U(x) = c_1 e^{-i\lambda x} + c_2 e^{i\lambda x} = a_1 \cos(\lambda x) + a_2 \sin(\lambda x), \quad (9.7)$$

con  $c_1, c_2$  e  $a_1, a_2$  costanti arbitrarie<sup>8</sup>. Utilizzando, per fissare le idee, la forma reale della  $U(x)$  e imponendo che questa assuma il valore nullo per  $x = 0$  si ha che  $a_1 = 0$  nella (9.7). Ora, è possibile imporre che la  $U$  si annulli anche per  $x = L$  evitando di ottenere una soluzione banale richiedendo che:

$$\sin(\lambda L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \equiv \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.8)$$

Dunque, per  $\mu = -\lambda^2$  il problema ai limiti (9.5) ammette le infinite soluzioni (definite a meno di una costante moltiplicativa):

$$U_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.9)$$

Ora, tenendo conto che le  $U_n(x)$  sono definite ciascuna a meno di una costante moltiplicativa e che il seno è una funzione dispari, possiamo limitarci nella (9.9) a considerare soltanto gli indici  $n$  positivi. Dunque, le soluzioni indipendenti di (9.5) sono:

$$U_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.10)$$

Sostituendo i valori di  $\lambda$  da (9.8) nella seconda delle (9.4) si ottengono le soluzioni della parte temporale:

iperboliche utilizzando le formule:

$$\cosh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}, \quad \sinh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}.$$

<sup>8</sup>Si può passare dalla forma esponenziale della soluzione a quella in termini di funzioni circolari utilizzando le formule:

$$\cos(\lambda x) = \frac{e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}}{2}, \quad \sin(\lambda x) = \frac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i}.$$

$$T_n(t) = \exp \left[ - \left( \frac{n\pi a}{L} \right)^2 t \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.11)$$

anche queste definite a meno di costanti moltiplicative. Sostituendo (9.10) e (9.11) in (9.2) osserviamo che ogni funzione del tipo:

$$u_n(x, t) = U_n(x)T_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.12)$$

risolve (9.1)<sub>1-3</sub>. È ragionevole supporre che la più generale soluzione di (9.1)<sub>1-3</sub> si otterrà attraverso una combinazione lineare di funzioni del tipo (9.12). Ora, dalla linearità di (9.1)<sub>1</sub> si ha che ogni combinazione lineare *finita* di soluzioni  $u_n(x, t)$  è soluzione, cioè che per ogni intero  $N$  fissato, la funzione:

$$\sum_{n=1}^N B_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N B_n U_n(x) T_n(t), \quad (9.13)$$

con  $B_n$  costanti arbitrarie, è soluzione. Tuttavia, non è immediato che anche la funzione:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N(x, t) = u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) e^{-(n\pi a)^2 t / L^2}, \quad (9.14)$$

sia soluzione. Su questo delicato punto torneremo più avanti. Assumendo che (9.14) sia effettivamente una soluzione della (9.1)<sub>1</sub>, i coefficienti  $B_n$  si determinano imponendo il dato iniziale (9.1)<sub>2</sub>:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (9.15)$$

Da quest'ultima relazione appare chiaro che i  $B_n$  altro non sono se non i coefficienti di Fourier in termini di soli seni della funzione  $f(x)$  la quale, affinché possa essere sviluppata in serie di Fourier in accordo con la (9.15), dovrà essere prolungata dall'intervallo  $(0, L)$  a tutto  $\mathbf{R}$  in maniera periodica e dispari. In questa maniera, i  $B_n$  si ottengono da:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.16)$$

Sostituendo (9.16) in (9.14) si ottiene finalmente la soluzione del problema (9.1):

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^L f(\xi) \sin \left( \frac{n\pi \xi}{L} \right) d\xi \right] \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) e^{-(n\pi a)^2 t / L^2}. \quad (9.17)$$

Esaminiamo ora la questione, lasciata in sospeso, della possibilità che la serie formale (9.14) possa essere effettivamente soluzione della (9.1)<sub>1</sub>. In altri termini, si tratta di verificare che tale serie possa essere derivata termine a termine una

volta rispetto al tempo  $t$  e due volte rispetto allo spazio  $x$ . Una condizione sufficiente perchè la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad (9.18)$$

con  $f_n$  definita nell'intervallo  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  e ivi di classe  $C^1$  per ogni  $n$ , sia derivabile termine a termine in  $[a, b]$  è che la serie delle derivate:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad (9.19)$$

risulti uniformemente convergente in  $[a, b]$ . Il teorema sulla convergenza totale (il criterio M di Weierstrass) assicura che se:

$$|f'_n(x)| \leq M_n \quad n = 1, 2, \dots$$

con  $M_n$  numeri reali non negativi, e se la serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty,$$

è convergente, allora la serie (9.19) converge uniformemente. Dunque, calcolando la derivata rispetto a  $t$  del termine generale della serie (9.14) e prendendone il modulo si ha:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left\{ B_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) e^{-(n\pi a)^2 t/L^2} \right\} \right| &= \left| - \left( \frac{n\pi a}{L} \right)^2 B_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) e^{-(n\pi a)^2 t/L^2} \right| \leq \\ &\leq \left( \frac{n\pi a}{L} \right)^2 |B_n| e^{-(n\pi a)^2 t/L^2} \equiv M_n. \end{aligned}$$

che, per ogni  $t > 0$ , è il termine generale di una serie numerica convergente. Si conclude quindi che la serie (9.14) converge uniformemente per ogni  $t > 0$ . Alla stessa maniera si dimostra che la (9.14) è derivabile termine a termine due volte rispetto ad  $x$  per ogni  $t > 0$ .

Le considerazioni sin qui svolta per il problema di Dirichlet relativo all'equazione del calore si applicano, con poche variazioni, anche al problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (9.20)$$

relativo all'equazione delle onde nel dominio 1D spaziale  $0 \leq x \leq L$ . Cerchiamo una soluzione non banale della forma  $u(x, t) = U(x)T(t)$ . Sostituendo nella (9.20)<sub>1</sub> e ripercorrendo i passaggi illustrati precedentemente si arriva a due equazioni ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{T''}{a^2 T} = \mu, \\ \frac{U''}{U} = \mu. \end{cases} \quad (9.21)$$

Confrontando queste ultime con le (9.4) si conclude che per quanto riguarda la parte spaziale  $U(x)$  della soluzione tutto è esattamente uguale al caso precedente, mentre la parte temporale  $T(t)$  è, in questo caso, una delle soluzioni dell'equazione:

$$T'' + (a\lambda)^2 T = 0, \quad (9.22)$$

e cioè, tenuto conto della (9.8):

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.23)$$

con  $A_n$  e  $B_n$  costanti. La parte spaziale  $U(x)$  della soluzione  $u(x, t)$  è, come prima, data dalle (9.10). Dunque, otteniamo l'insieme di soluzioni di (9.20):

$$u_n(x, t) = \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.24)$$

Per ogni  $N$  intero fissato, la funzione:

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (9.25)$$

è anch'essa soluzione della (9.20)<sub>1</sub> in corrispondenza dei dati al contorno (9.20)<sub>4</sub>. Facendo formalmente il limite  $n \rightarrow +\infty$  si ottiene:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (9.26)$$

che supporremo, per il momento, sia anch'essa soluzione. Le costanti  $A_n$  e  $B_n$  nella (9.26) si determinano dai dati iniziali. Ponendo  $t = 0$  nella (9.26) si trova:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (9.27)$$

la quale, tenendo conto di (9.20)<sub>2</sub>, fornisce:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.28)$$

Peraltro, calcolando la derivata rispetto a  $t$  della (9.26) e ponendo quindi  $t = 0$  si trova:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{L}\right) B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (9.29)$$

la quale, tenendo conto di (9.20)<sub>3</sub>, fornisce:

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.30)$$

Ora si tratta di dimostrare che la serie (9.26), con i coefficienti dati dalle (9.28) e (9.30) è effettivamente soluzione del problema (9.20). A tale scopo, occorre dimostrare che essa è derivabile termine a termine due volte sia rispetto al tempo sia rispetto allo spazio. Per il teorema della convergenza totale occorre provare che i termini generali delle serie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \end{aligned} \quad (9.31)$$

siano maggiorati in valore assoluto dai termini generali di due serie numeriche convergenti. Prendendo, per esempio, il valore assoluto del termine generale della (9.31)<sub>1</sub> si trova:

$$\begin{aligned} &\left| - \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq \\ &\leq \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \left| A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right| \leq \\ &\leq \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 (|A_n| + |B_n|). \end{aligned} \quad (9.32)$$

Allo stesso modo, il valore assoluto del termine generale della (9.31)<sub>2</sub> è maggiorato come segue:

$$\begin{aligned} & \left| - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \left[ A_n \cos \left( \frac{n\pi at}{L} \right) + B_n \sin \left( \frac{n\pi at}{L} \right) \right] \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq \\ & \leq \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 (|A_n| + |B_n|). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Dalle (9.32) e (9.33) risulta chiaro che affinché le serie (9.31) risultino uniformemente convergenti è necessario richiedere che i valori assoluti dei coefficienti  $A_n$  e  $B_n$  tendano a zero abbastanza rapidamente quando  $n \rightarrow \infty$ , per esempio come:

$$|A_n| \leq \frac{C_1}{n^\alpha}, \quad |B_n| \leq \frac{C_2}{n^\alpha}, \quad (9.34)$$

con  $C_1$  e  $C_2$  costanti e con  $\alpha \geq 4$ . Vediamo sotto quali condizioni sui dati iniziali  $f(x)$  e  $g(x)$  sono soddisfatte le (9.34). Integrando per parti ripetutamente la (9.28) si trova facilmente:

$$\begin{aligned} A_n = & -\frac{2}{n\pi} [(-1)^n f(L) - f(0)] + \frac{2L^2}{(n\pi)^3} [(-1)^n f''(L) - f''(0)] + \\ & + \frac{2L^3}{(n\pi)^4} \int_0^L f^{(4)}(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Allo stesso modo, integrando più volte per parti la (9.30) si ottiene:

$$\begin{aligned} B_n = & -\frac{2L}{(n\pi)^2 a} [(-1)^n g(L) - g(0)] + \frac{2L^3}{(n\pi)^4 a} [(-1)^n g''(L) - g''(0)] - \\ & - \frac{2L^3}{(n\pi)^4 a} \int_0^L g'''(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Le relazioni (9.35) e (9.36) portano a concludere che affinché le (9.34) risultino soddisfatte occorre richiedere parecchia regolarità ai dati iniziali, e cioè che  $f(x)$  possieda almeno le derivate fino alla quarta e  $g(x)$  quelle almeno fino alla terza continue nell'intervallo  $[0, L]$  e inoltre che risulti:

$$f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0,$$

$$g(0) = g(L) = 0.$$

Queste ipotesi sono molto severe e restrittive ed è ben difficile che in molti problemi applicativi siano verificate. Ciò comporta la necessità, che sarà anal-

izzata più avanti in queste note, di riformulare il problema (9.20) in modo da ammettere la possibilità di soluzioni meno regolari.

## 10 Risultati di buona posizione: L'equazione del calore

Il metodo della separazione delle variabili fornisce, nel caso di equazioni omogenee e di geometrie opportune, una soluzione al problema ai valori iniziali ed al contorno. Tale soluzione è regolare se i dati (in particolare i dati iniziali) lo sono.

Come descritto nel paragrafo 5, affinché il modello matematico sintetizzato nel problema ai valori iniziali ed al contorno sia una buona “traduzione” della realtà fisica che pretende di descrivere occorre verificare, oltre all'esistenza, l'unicità della soluzione e la sua dipendenza continua dai dati. In questo paragrafo ci occuperemo di queste questioni relativamente al problema (5.7) in una dimensione spaziale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (10.1)$$

**Teorema 10.1. (Principio del massimo)** *La soluzione  $u(x, t)$  dell'equazione del calore (10.1)<sub>1</sub> assume il suo valore massimo o all'istante iniziale  $t = 0$  o sul contorno  $x = 0$  e  $x = L$ .*

*Dimostrazione.* Nella dimostrazione è d'aiuto il grafico di Figura 9, il quale mostra il cosiddetto *dominio parabolico* di  $u(x, t)$ , vale a dire la striscia di  $\mathbf{R}^2$  di base  $L$  che rappresenta, nel piano in cui  $x$  è in ascisse e il tempo  $t$  in ordinate, il dominio spazio-temporale della soluzione e di cui il rettangolo<sup>9</sup>  $R$  indicato in figura Figura 9 è la parte che va dall'istante iniziale  $t = 0$  fino al tempo  $t = T$ . Indichiamo con  $M$  il valore del massimo di  $u(x, t)$  sull'unione dei lati  $t = 0$ ,  $x = 0$  e  $x = L$  (base e lati verticali) di  $R$  e mostriamo che per qualsiasi punto  $(x, t) \in \bar{R}$  si ha  $u(x, t) \leq M$ .

A tale scopo introduciamo la funzione ausiliaria:

$$v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon x^2, \quad (10.2)$$

con  $\varepsilon > 0$  qualsiasi. Se riusciamo a dimostrare che  $v(x, t) \leq M + \varepsilon L^2$  in  $\bar{R}$ , dalla (10.2) segue che  $u(x, t) \leq M + \varepsilon (L^2 - x^2)$  in  $\bar{R}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Di conseguenza,  $u(x, t) \leq M$  in  $\bar{R}$  e l'asserto sarà dimostrato.

Ora, sulla base  $t = 0$  di  $R$  si ha:

<sup>9</sup>Con  $R$  intendiamo il rettangolo aperto  $(0, L) \times (0, T)$ , con  $\bar{R}$  il rettangolo chiuso  $[0, L] \times [0, T]$ .

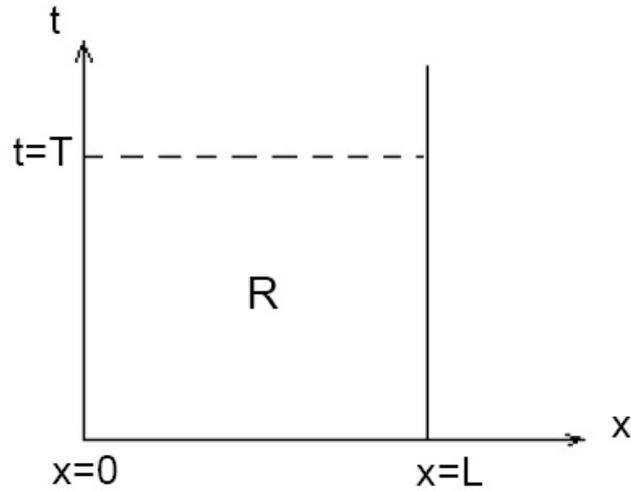


Figura 9: *Dominio parabolico. Il massimo della soluzione dell'equazione del calore è assunto o sulla base del rettangolo  $R$  o sui due lati verticali*

$$v(x, 0) \leq M + \varepsilon L^2,$$

sul lato verticale di sinistra  $x = 0$  di  $R$ :

$$v(0, t) \leq M \leq M + \varepsilon L^2,$$

e sul lato verticale di destra  $x = L$  di  $R$ :

$$v(L, t) \leq M + \varepsilon L^2.$$

Sia ora  $(x, t) \in R$ . Allora:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 (u + \varepsilon x^2)}{\partial x^2} = -2a^2 \varepsilon < 0. \quad (10.3)$$

Se in  $(x, t) \in R$  la  $v(x, t)$  avesse un massimo si dovrebbe avere  $\partial^2 v / \partial x^2 \leq 0$  e  $\partial v / \partial t = 0$ , contro la (10.3). Dunque,  $v$  non ha un massimo in  $R$ .

Sia ora  $(x, T)$  un punto del lato superiore  $t = T$  di  $R$ . Se su tale lato  $v$  avesse un massimo si dovrebbe avere  $\partial^2 v / \partial x^2 \leq 0$  e  $\partial v / \partial t \geq 0$ , ancora in contraddizione con la (10.3). Dunque,  $v$  non ha un massimo neanche sul lato  $t = T$ .

Ma  $v(x, t)$  è una funzione continua, quindi dovrà necessariamente avere un massimo su  $\bar{R}$ , che un insieme chiuso e limitato di  $\mathbf{R}^2$ . Non potendolo assumere all'interno o sul lato superiore,  $v$  assumerà tale massimo sui restanti lati (base e lati verticali) di  $R$ . Perciò si avrà  $v(x, t) \leq M + \varepsilon L^2$  in tutto  $\bar{R}$ , da cui segue l'asserto.  $\square$

**Osservazione 10.1.** Si può dimostrare una versione più “forte” del principio del massimo, la quale afferma che la soluzione  $u(x, t)$  dell’equazione del calore assume il massimo *soltanto* o inizialmente (la base  $t = 0$  di  $R$ ) o sul bordo (i lati  $x = 0$  e  $x = L$ ), a meno che  $u$  non sia costante.

**Teorema 10.2. (Principio del minimo)** *La soluzione  $u(x, t)$  dell’equazione del calore (10.1)<sub>1</sub> assume il suo valore minimo o all’istante iniziale  $t = 0$  o sul contorno  $x = 0$  e  $x = L$ .*

*Dimostrazione.* E’ sufficiente applicare il principio del massimo alla funzione  $-u(x, t)$ .  $\square$

I principi del massimo e del minimo consentono di dimostrare l’unicità della soluzione del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Q(x, t) \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) = A(t), \quad u(L, t) = B(t), \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (10.4)$$

Supponiamo per assurdo che, accanto alla  $u(x, t)$ , vi sia una *differente* soluzione  $v(x, t)$  dello stesso problema ai valori iniziali ed al contorno (10.4). Poniamo  $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ . La  $w$  risolve il problema *omogeneo*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, t > 0, \\ w(x, 0) = 0 \quad 0 < x < L, \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (10.5)$$

Ora,  $w(x, t)$  assume il suo valore massimo o inizialmente o sul bordo  $x = 0$  e  $x = L$ , laddove vale zero. Dunque,  $w(x, t) \leq 0$  per ogni  $0 \leq x \leq L$  e  $t \geq 0$ . Inoltre, essa assume il suo valore minimo negli stessi luoghi e quindi  $w(x, t) \geq 0$  per ogni  $0 \leq x \leq L$  e  $t \geq 0$ . In definitiva è  $w(x, t) = 0$ , cioè  $u(x, t) = v(x, t)$  per ogni  $0 \leq x \leq L$  e  $t \geq 0$ .

L’unicità della soluzione del problema (10.4) si può dimostrare anche in un’altra maniera, cioè usando il **metodo dell’energia**. Moltiplichiamo ambo i membri della (10.5)<sub>1</sub> per  $w$  e integriamo in  $x$  da 0 ad  $L$ :

$$\int_0^L w \frac{\partial w}{\partial t} dx = a^2 \int_0^L w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx. \quad (10.6)$$

Ponendo:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L w^2 dx, \quad (10.7)$$

e integrando per parti il secondo membro della (10.6) si ha:

$$\frac{dE}{dt} = \left[ a^2 w \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^L - a^2 \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (10.8)$$

Il primo termine a secondo membro della (10.8) è nullo per le condizioni al contorno (10.5)<sub>3</sub>. Integrando su  $t$  da 0 a  $t$  si ha:

$$E(t) \leq E(0). \quad (10.9)$$

D'altra parte  $E(0) = 0$  per la condizione iniziale (10.5)<sub>2</sub>. Inoltre, dalla (10.7) si ricava che  $E(t) \geq 0$ . Dunque,

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0,$$

ovvero:

$$E(t) = 0, \quad t > 0. \quad (10.10)$$

La (10.10) può essere soddisfatta soltanto se  $w(x, t) = 0$ , da cui  $u(x, t) = v(x, t)$

**Osservazione 10.2.** Il principio del massimo richiede che la soluzione sia regolare, cioè  $C^2$  in  $x \in (0, L)$  e  $C^1$  in  $(0, T)$ ,  $T > 0$ . Il metodo dell'energia, invece, può essere adoperato anche per soluzioni più deboli, che incontreremo più avanti nel corso delle lezioni. Inoltre, è semplice verificare che il metodo dell'energia permette di dimostrare anche l'unicità della soluzione del problema di Neumann per l'equazione del calore.

I principi del massimo e del minimo consentono anche di dimostrare che la soluzione  $u(x, t)$  del problema (10.4) dipende con continuità dai dati iniziali ed al contorno. Consideriamo i due problemi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = Q(x, t) \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u_1(x, 0) = f_1(x) \quad 0 < x < L, \\ u_1(0, t) = A_1(t), \quad u_1(L, t) = B_1(t), \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (10.11)$$

e:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = Q(x, t) \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u_2(x, 0) = f_2(x) \quad 0 < x < L, \\ u_2(0, t) = A_2(t), \quad u_2(L, t) = B_2(t), \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (10.12)$$

Vogliamo mostrare che le soluzioni  $u_1$  ed  $u_2$  sono "prossime" se lo sono i dati iniziali  $f_1, f_2$  e quelli al bordo  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2$ ). A tale scopo, indichiamo poniamo  $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  e osserviamo che  $w$  risolve il problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < L, t > 0, \\ w(x, 0) = f_1(x) - f_2(x) \equiv f(x) \quad 0 < x < L, \\ w(0, t) = A_1(t) - A_2(t) \equiv A(t), \quad w(L, t) = B_1(t) - B_2(t) \equiv B(t), \quad t > 0. \end{array} \right.$$

Il principio del massimo assicura che:

$$w(x, t) \leq \max \left\{ \sup_{(0, L)} f(x), \sup_{(0, T)} A(t), \sup_{(0, T)} B(t) \right\}, \quad (10.13)$$

mentre da quello del minimo si ha:

$$w(x, t) \geq \min \left\{ \inf_{(0, L)} f(x), \inf_{(0, T)} A(t), \inf_{(0, T)} B(t) \right\}. \quad (10.14)$$

Dalle (10.13) e (10.14) segue immediatamente che se  $f(x)$ ,  $A(t)$  e  $B(t)$  tendono a zero, anche  $w(x, t)$  tende a zero e quindi  $u_2(x, t)$  tende a  $u_1(x, t)$ . Si osservi che la soluzione è uniformemente continua rispetto ai dati in ogni intervallo *limitato*  $(0, T)$  di tempo, mentre nulla si può dire su cosa accade per tempi arbitrariamente grandi. Quest'ultima questione attiene alla *stabilità* della soluzione, che non analizzeremo nel corso di queste lezioni.

**Osservazione 10.3.** Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty \end{array} \right. \quad (10.15)$$

e limitiamoci a considerare il caso di soluzioni *limitate*, per le quali esiste un numero reale positivo  $M$  tale che:

$$|u(x, t)| \leq M, \quad \text{per ogni } -\infty < x < +\infty \text{ e } t \geq 0. \quad (10.16)$$

Poniamoci il problema di dimostrare l'unicità della soluzione di (10.15). I principi del massimo e del minimo non possono essere adoperati direttamente in quanto la soluzione  $u(x, t)$ , essendo definita su una regione non compatta di  $\mathbf{R}^2$ , potrebbe non ammettere affatto un massimo (o un minimo). Allo stesso modo non è direttamente applicabile il metodo dell'energia in quanto l'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx$  potrebbe non esistere. Per risolvere la questione, al solito supponiamo che (10.15) ammetta due soluzioni limitate distinte  $u_1(x, t)$  e  $u_2(x, t)$ . La funzione  $w(x, y) = u_1 - u_2$  risolve il problema omogeneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ w(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty \end{array} \right. \quad (10.17)$$

e verifica la:

$$|w(x, t)| \leq |u_1(x, t) + u_2(x, t)| \leq 2M, \quad \text{per ogni } -\infty < x < +\infty \text{ e } t \geq 0.$$

Consideriamo ora la regione *finita*:

$$|x| \leq L, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10.18)$$

con  $L, T > 0$ , nonchè la funzione ausiliaria:

$$v(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left( \frac{x^2}{2} + a^2 t \right). \quad (10.19)$$

E' immediato verificare che la (10.19) risolve l'equazione indefinita (10.15)<sub>1</sub> e:

$$v(x, 0) \geq w(x, 0) = 0, \quad v(\pm L, t) \geq 2M \geq |w(\pm L, t)|.$$

Applicando ora il principio del minimo nella regione *limitata* (10.18) una volta alla funzione  $v(x, t) - w(x, t)$  e l'altra alla  $v(x, t) + w(x, t)$  si trova:

$$v(x, t) - w(x, t) \geq 0, \quad v(x, t) + w(x, t) \geq 0,$$

cosicchè:

$$-v(x, t) \leq w(x, t) \leq v(x, t),$$

la quale equivale a:

$$|w(x, t)| \leq v(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left( \frac{x^2}{2} + a^2 t \right). \quad (10.20)$$

Per ogni  $x, t$  fissati, facendo tendere  $L \rightarrow +\infty$  nella (10.20) si ottiene  $w(x, t) = 0$  in tutta la regione  $-\infty < x < +\infty, t \geq 0$ , da cui l'unicità di soluzioni limitate del problema (10.15).

## 11 Risultati di buona posizione: L'equazione delle onde

Acclarato che il metodo della separazione delle variabili fornisce una soluzione, in questo paragrafo ci occuperemo dello studio della buona posizione (unicità e dipendenza continua dai dati) per il problema ai valori iniziali ed al contorno di Dirichlet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad 0 < x < L, \quad (11.1)$$

per l'equazione delle onde in una dimensione spaziale. Come discusso nell'Osservazione 8.1, l'equazione delle onde "trasporta" i dati iniziali lungo le caratteristiche senza alterarne la regolarità. Questo fatto porta intuitivamente a concludere che per questa equazione non vale un principio del massimo (o del minimo). Dunque, l'unicità per il problema (11.1) va dimostrata in altro modo, ad esempio utilizzando il metodo dell'energia.

Al solito, supponiamo che  $u(x, t)$  e  $v(x, t)$  siano due soluzioni distinte del problema (11.1), cioè corrispondenti agli *stessi* dati iniziali ed al contorno, e poniamo  $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ . La  $w(x, t)$  risolve il problema omogeneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, t > 0, \\ w(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t > 0. \end{array} \right. \quad 0 < x < L, \quad (11.2)$$

Moltiplichiamo la (11.2)<sub>1</sub> per  $\partial w / \partial t$  e integriamo tra 0 ed  $L$ :

$$\int_0^L \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx = a^2 \int_0^L \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx. \quad (11.3)$$

Il primo membro della (11.3) si può riscrivere come:

$$\int_0^L \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx,$$

mentre il secondo membro si integra per parti per dare:

$$\int_0^L \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = \left[ \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial w}{\partial t \partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

In questo modo, la (11.3) diventa:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = a^2 \left[ \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^L - a^2 \int_0^L \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} dx. \quad (11.4)$$

Il primo termine a secondo membro della (11.4) si annulla per le (11.2)<sub>4</sub>. Introdotta la funzione non negativa:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (11.5)$$

detta *energia*, la (11.4) si può riscrivere come:

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0, \quad (11.6)$$

dalla quale segue che:

$$E(t) = E(0). \quad (11.7)$$

Ma per le (11.2)<sub>2,3</sub> è  $E(0) = 0$ . Dunque:

$$E(t) = 0, \quad \text{per ogni } t \geq 0. \quad (11.8)$$

Da quest'ultima osservazione e dalla definizione (11.5) dell'energia, si ha  $\partial w / \partial t = \partial w / \partial x = 0$  per ogni  $t \geq 0$  e, tenuto conto dei dati, segue finalmente  $w(x, t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$  e quindi l'unicità.

**Osservazione 11.1.** Le considerazioni precedenti conducono, in maniera del tutto analoga, alla dimostrazione dell'unicità anche nel caso del problema di Neumann per l'equazione delle onde in una dimensione spaziale.

## 12 L'equazione di Laplace

In questo paragrafo prenderemo in esame l'equazione cui si riducono le equazioni del calore e quella delle onde nel caso *stazionario*. Se la funzione incognita  $u$  è indipendente dal tempo, sia la (5.3) che la (5.2) si riducono all'equazione di Laplace:

$$\Delta u(x, y, z) = 0, \quad (12.1)$$

alla quale si riducono sia l'equazione del calore (5.3) che quella delle onde (5.2) nel caso *stazionario*. Se siamo in presenza di sorgenti, le (3.8) che la (4.2) si riducono all'equazione di Poisson:

$$\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z), \quad (12.2)$$

dove  $f(x, y, z)$  è una funzione assegnata (necessariamente indipendente da  $t$ ).

Le equazioni di Laplace e di Poisson intervengono in situazioni fisiche nelle quali è possibile definire un potenziale. In fluidodinamica, per esempio, se un fluido incompressibile (p. es., acqua) si muove di moto stazionario, il suo campo di velocità  $\mathbf{v}$  è indipendente dal tempo, cioè  $\mathbf{v}(x, y, z)$ . Se, inoltre, il moto è irrotazionale (assenza di vortici), allora  $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , da cui segue che esiste una funzione “potenziale”  $\Phi(x, y, z)$  tale che  $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ . Infine, la condizione di incompressibilità  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , assieme alla relazione precedente, porta a concludere che il potenziale  $\Phi$  verifica l’equazione:

$$\Delta\Phi = 0, \quad (12.3)$$

che va sotto il nome di *teorema di Bernoulli*.

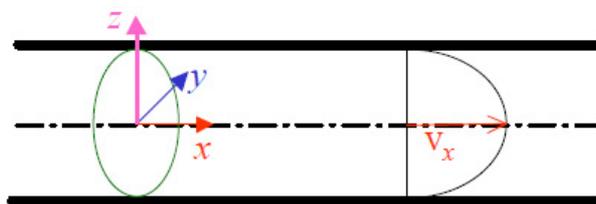


Figura 10: *Moto permanente stazionario in un tubo cilindrico*

Ancora in idraulica, quando si studia il moto permanente stazionario di un fluido viscoso (di viscosità  $\mu$  e densità  $\rho$  costanti) in un condotto cilindrico, le equazioni di Navier-Stokes, proiettate lungo le direzioni  $x, y, z$  indicate in Figura 10, portano a concludere che l’unica componente non nulla  $v_x$  del campo di velocità  $\mathbf{v}$ , che dipende solo dalle variabili  $y, z$  (il moto è permanente), è soluzione dell’equazione di Poisson:

$$\Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\gamma J}{\mu}, \quad (12.4)$$

dove  $\gamma = g\rho$  e dove:

$$J = \frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right),$$

è la derivata (costante) del carico piezometrico.

Infine, in elettrostatica, il campo elettrico  $\mathbf{E}(x, y, z)$  generato da una distribuzione stazionaria assegnata  $\rho(x, y, z)$  di cariche elettriche soddisfa (in unità c.g.s.) le equazioni:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (12.5)$$

Dalla (12.5)<sub>1</sub> segue che esiste una funzione  $\psi(x, y, z)$ , detta *potenziale elettrostatico*, tale che  $\mathbf{E} = \nabla\psi$ . Quest’ultima, assieme alla (12.5)<sub>2</sub>, implica che il potenziale  $\psi$  è soluzione dell’equazione di Poisson:

$$\Delta\psi = 4\pi\rho.$$

Per le equazioni di Laplace e di Poisson si possono porre, nel loro dominio  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) i problemi al contorno di Dirichlet, che consiste nell'assegnare il valore della funzione incognita  $u$  sul bordo  $\partial\Omega$  di  $\Omega$  o il problema di Neumann, nel quale si assegna su  $\partial\Omega$  il valore  $u_n = \mathbf{n} \cdot \nabla u$  della derivata di  $u$  nella direzione della normale  $\mathbf{n}$  ad ogni punto di  $\partial\Omega$ .

Se  $u$  risolve l'equazione di Laplace:

$$\Delta u = 0,$$

in  $\Omega$ , essa si dice una *funzione armonica* in  $\Omega$ .

**Teorema 12.1. (Principio del massimo)** *Sia  $u$  una funzione armonica continua in  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Allora,  $u$  assume il suo valore massimo su  $\partial\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Utilizzando la notazione vettoriale  $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$  per i punti di  $\bar{\Omega}$ , il teorema afferma che esiste almeno un punto  $\mathbf{x}_M \in \partial\Omega$  tale che:

$$u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{x}_M), \quad (12.6)$$

per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Consideriamo la funzione ausiliaria:

$$v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon|\mathbf{x}|^2 > 0 \quad \text{in } \Omega,$$

con  $\varepsilon > 0$  qualsiasi. Poichè  $u$  è armonica in  $\Omega$ , si ha:

$$\Delta v = \varepsilon\Delta(x^2 + y^2 + z^2) = 6\varepsilon > 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (12.7)$$

Ora, supponiamo che vi sia un punto  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  che sia di massimo per la funzione  $v$ . In questo caso, si avrebbe:

$$\Delta v(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial^2 v(\mathbf{x}^*)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(\mathbf{x}^*)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v(\mathbf{x}^*)}{\partial z^2} \leq 0,$$

in contraddizione con la (12.7). Dunque,  $v$  non può avere un massimo in  $\Omega$ . Peraltro,  $v$  è continua in  $\bar{\Omega}$  e quindi, a norma del teorema di Weierstrass, possiede almeno un massimo in  $\bar{\Omega}$  che necessariamente deve appartenere a  $\partial\Omega$ . Detto  $\mathbf{x}_0$  un tale punto, si ha:

$$u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}_0) = u(\mathbf{x}_0) + \varepsilon|\mathbf{x}_0|^2 \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon\ell^2,$$

per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$ , dove  $\ell$  è la massima distanza di  $\partial\Omega$  dall'origine del riferimento. Essendo  $\varepsilon$  arbitrario, si ha:

$$u(\mathbf{x}) \leq \max_{\partial\Omega} u, \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (12.8)$$

Il massimo di  $u$  nella (12.8) viene assunto in un qualche punto  $\mathbf{x}_M \in \partial\Omega$ . Dunque:

$$u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{x}_M), \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (12.9)$$

e l'asserto è dimostrato. □

In maniera del tutto analoga si prova il

**Teorema 12.2. (Principio del minimo)** *Sia  $u$  una funzione armonica continua in  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Allora,  $u$  assume il suo valore minimo su  $\partial\Omega$ .*

**Osservazione 12.1.** I Teoremi 12.1 e 12.2 affermano che vi sono *dei* punti  $\mathbf{x}_M$  e  $\mathbf{x}_m$  in  $\partial\Omega$  nei quali  $u$  assume massimo e minimo. Non è escluso che vi siano più punti di  $\partial\Omega$  con queste proprietà. Allo stesso modo, non è escluso che  $u$  possa essere *costante* in  $\bar{\Omega}$ .

I teoremi precedenti consentono immediatamente di provare la unicità della soluzione per il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson. Supponiamo che il problema:

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = h, & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.10)$$

ammetta due soluzioni *distinte*  $u$  e  $v$  in corrispondenza degli *stessi* dati. La funzione  $w = u - v$  risolve allora il problema *omogeneo*:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{in } \Omega, \\ w = 0, & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ma dai principi del massimo e del minimo si ha:

$$0 = w(\mathbf{x}_m) \leq w(\mathbf{x}) \leq w(\mathbf{x}_M) = 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \Omega,$$

e quindi  $u = v$  in  $\Omega$ .

## 12.1 La formula di Poisson

Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un disco  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = h, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.11)$$

Data la geometria del problema conviene adoperare l'espressione del laplaciano in coordinate polari piane:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad (12.12)$$

dove le coordinate polari  $r \in (0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  sono collegate a quelle cartesiane  $x, y$  dalle relazioni:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases} \quad (12.13)$$

Il disco  $\Omega$  di centro l'origine e raggio  $a$  si rappresenta, in coordinate polari piane, come:

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \equiv (x, y) \in \mathbf{R}^2 : |\mathbf{x}| < a \},$$

e la sua frontiera  $\partial\Omega$  come:

$$\partial\Omega = \{ \mathbf{x} \equiv (x, y) \in \mathbf{R}^2 : |\mathbf{x}| = a \}.$$

Cerchiamo una soluzione non banale della (12.12)<sub>1</sub> nella forma:

$$u(r, \theta) = R(r)Y(\theta). \quad (12.14)$$

Sostituendo (12.14) nella (12.12)<sub>1</sub> e successivamente moltiplicando per  $r^2/R$  si trova:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{Y''}{Y} = 0. \quad (12.15)$$

Procedendo come mostrato al Paragrafo 9 si ottengono le equazioni separate:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} &= \lambda, \\ \frac{Y''}{Y} &= -\lambda, \end{aligned} \quad (12.16)$$

rispettivamente per la parte radiale e per quella angolare della soluzione  $u(r, \theta)$ . Partiamo da quest'ultima. Poichè la  $u$  deve soddisfare la condizione di periodicità:

$$u(r, \theta + 2k\pi) = u(r, \theta), \quad k \geq 1,$$

la stessa condizione deve essere verificata dalla sua parte angolare  $Y$ :

$$Y(\theta + 2k\pi) = Y(\theta), \quad k \geq 1, \quad (12.17)$$

il che comporta che la costante di separazione  $\lambda$  nella (12.16) deve essere positiva. Per comodità poniamo  $\lambda = \mu^2$ . La soluzione generale della (12.16) è:

$$Y(\theta) = \hat{A} \cos(\mu\theta) + \hat{B} \sin(\mu\theta). \quad (12.18)$$

Imponendo la condizione (12.17) nella (12.18) segue immediatamente che  $\mu$  deve

essere un intero. Senza perdere di generalità possiamo limitarci a considerare gli interi non negativi. Dunque:

$$\mu_n = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.19)$$

In corrispondenza di questi valori di  $\mu_n$  le soluzioni radiali del nostro problema sono:

$$Y_n(\theta) = \hat{A}_n \cos(n\theta) + \hat{B}_n \sin(n\theta) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.20)$$

Veniamo all'equazione per la parte radiale. Tenendo conto della (12.19), questa si scrive:

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0. \quad (12.21)$$

Si tratta di un'equazione del tipo di Eulero, che ammette soluzioni della forma  $R(r) = r^\alpha$ , con  $\alpha$  opportuni. Sostituendo quest'ultima espressione nella (12.21) troviamo la seguente equazione per  $\alpha$ :

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = \alpha^2 - n^2 = 0,$$

da cui  $\alpha = \pm n$ . In questo modo, la soluzione generale della (12.21) è:

$$R_n(r) = \hat{C}_n r^n + \frac{\hat{D}_n}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.22)$$

I termini  $\hat{D}_n/r^n$  nella precedente relazione diventano infiniti quando  $r = 0$ , cioè al centro del disco  $\Omega$ . Poichè noi cerchiamo soluzioni  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  è necessario escludere tali termini, il che equivale a porre  $\hat{D}_n = 0$  per ogni  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Moltiplicando le (12.20) e (12.22) e sommando su tutti gli  $n$  ammissibili si trova:

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)), \quad (12.23)$$

dove si è messo in evidenza il termine costante corrispondente ad  $n = 0$ . Imponiamo ora la condizione al bordo (12.12)<sub>2</sub>. Si ha:

$$u(a, \theta) = h(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)). \quad (12.24)$$

Quest'ultima è la serie completa di Fourier della funzione  $h(\theta)$ <sup>10</sup>. I coefficienti  $A_n$  e  $B_n$  sono dunque:

<sup>10</sup>La funzione  $h$  è definita in tutto  $\mathbf{R}$  ed è periodica di periodo  $2\pi$ .

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, & n \geq 0, \\
B_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, & n \geq 1.
\end{aligned} \tag{12.25}$$

Sostituendo (12.25) in (12.23) la soluzione del problema di Dirichlet si scrive come:

$$\begin{aligned}
u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi + \\
&+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} h(\varphi) [\cos(n\theta) \cos(n\varphi) + \sin(n\theta) \sin(n\varphi)] d\varphi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\theta - \varphi) \right\} d\varphi.
\end{aligned} \tag{12.26}$$

Consideriamo in dettaglio il termine in parentesi sotto il segno di integrale. Utilizzando la formula di Eulero si ha:

$$\begin{aligned}
&1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\theta - \varphi) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in(\theta - \varphi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{-in(\theta - \varphi)} \\
&= 1 + \frac{r e^{i(\theta - \varphi)}}{a - r e^{i(\theta - \varphi)}} + \frac{r e^{-i(\theta - \varphi)}}{a - r e^{-i(\theta - \varphi)}} = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2}.
\end{aligned}$$

Sostituendo in (12.26) si trova:

$$u(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\varphi)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi. \tag{12.27}$$

Quest'ultima prende il nome di *formula di Poisson* ed è l'espressione di una funzione armonica all'interno di un disco di  $\mathbf{R}^2$  in termini del suo valore al bordo. Con riferimento alla Figura 11, indicando con  $\mathbf{x} \equiv (r, \theta)$  un punto interno al disco e con  $\mathbf{x}' \equiv (a, \theta)$  un punto sulla sua frontiera si ha:

$$a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2.$$

Tenendo poi conto che l'arco di circonferenza  $dl'$  è  $dl' = a d\varphi$ , la (12.27) si può riscrivere come:

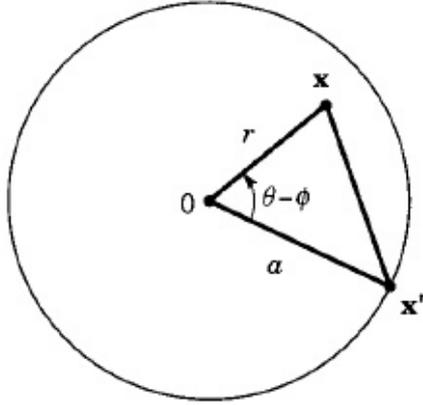


Figura 11: Punti interni e sul bordo di un disco di  $\mathbf{R}^2$  di raggio  $a$ .

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{2a\pi} \int_{|\mathbf{x}'|=a} \frac{u(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d\ell', \quad (12.28)$$

dove  $u(\mathbf{x}')$  è il dato al bordo  $h(\varphi)$ . In termini più rigorosi, la formula di Poisson si può riassumere nel seguente

**Teorema 12.3.** *Sia  $u(\mathbf{x}') = h$  una funzione continua sulla circonferenza  $\partial\Omega$ . Allora, la formula di Poisson (12.27) fornisce l'unica funzione armonica nel disco  $\Omega$  tale che:*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}'), \quad \text{per ogni } \mathbf{x}' \in \partial\Omega.$$

In altri termini, la  $u$  fornita dalla formula di Poisson è continua fino al bordo di  $\Omega$ . In realtà, si può dimostrare che la  $u$  è di classe  $C^2(\bar{\Omega})$ .

Conseguenza immediata della formula di Poisson è il seguente

**Teorema 12.4. (Proprietà della media)** *Sia  $u$  armonica nel disco  $\Omega$  e continua in  $\bar{\Omega}$ . Il valore di  $u$  nel centro del disco è uguale al valore medio di  $u$  sul bordo  $\partial\Omega$  del disco.*

*Dimostrazione.* Facciamo in modo che il centro del disco coincida con l'origine  $\mathbf{0}$  del sistema di coordinate. Ponendo  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  nella (12.28) si ha:

$$u(\mathbf{0}) = \frac{a^2}{2a\pi} \int_{|\mathbf{x}'|=a} \frac{u(\mathbf{x}')}{a^2} d\ell' = \frac{1}{\text{lungh. di } \partial\Omega} \int_{|\mathbf{x}'|=a} u(\mathbf{x}') d\ell',$$

che è la media di  $u$  su  $\partial\Omega$ . □

**Osservazione 12.2.** Quanto ottenuto fin qui per la regione di  $\mathbf{R}^2$  interna al disco di raggio  $a$  può essere adattato, con semplici modifiche, per determinare la funzione armonica  $u$  all'esterno dello stesso disco e che assuma il dato  $u(\mathbf{x}') = h(\varphi)$  sulla circonferenza di raggio  $a$ . In questo caso, la condizione di limitatezza della soluzione nel centro del disco è sostituita da quella all'infinito ( $r \rightarrow \infty$ ), per cui nella (12.22) occorre porre  $\hat{C}_n = 0$  per ogni  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Il risultato che si ottiene è la seguente espressione:

$$u(r, \theta) = \frac{r^2 - a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\varphi)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi, \quad r > a, \quad (12.29)$$

per la  $u$  all'esterno del disco  $\Omega$ .

## 12.2 Identità e funzioni di Green

Sia  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  e siano  $u$  e  $v$  due funzioni di classe  $C^2(\bar{\Omega})$ . Indichiamo con  $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$  un punto di  $\Omega$  e con  $\partial/\partial x_i$  la derivata parziale rispetto alle diverse coordinate (gli indici  $i = 1, 2, 3$  rappresentano rispettivamente le coordinate  $x$ ,  $y$  e  $z$ ). Consideriamo l'identità:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Sommiamo su  $i$  da 1 a 3 per ottenere:

$$\operatorname{div}(v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u.$$

Integrando quest'ultima relazione sul dominio  $\Omega$  ed adoperando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dV + \int_{\Omega} v \Delta u dV, \quad (12.30)$$

dove  $\partial u/\partial n$  è la derivata di  $u$  nella direzione della normale esterna ad  $\Omega$ , calcolata sul bordo  $\partial\Omega$ . La (12.30) è la *prima identità di Green*.

**Esempio 12.1.** Studiamo la buona posizione del *problema di Neumann*:

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = h, & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.31)$$

per l'equazione di Poisson nel dominio  $\Omega$ . La prima identità di Green, applicata alle funzioni  $u$ , soluzione di (12.31), e  $v \equiv 1$  fornisce:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Omega} \Delta u dV,$$

ovvero, tenendo conto di (12.31):

$$\int_{\partial\Omega} h dS = \int_{\Omega} f dV. \quad (12.32)$$

Quest'ultima esprime una *condizione di compatibilità* sui dati del problema (12.31). Non è possibile assegnare in maniera arbitraria il termine noto  $f$  ed il dato al bordo  $h$ ; questi debbono necessariamente verificare la (12.32), altrimenti essa non ammette una soluzione.

Ancora, osserviamo che se  $u$  è soluzione di (12.31), anche  $u + c$  è soluzione, essendo  $c$  una costante qualsiasi. Infatti, se  $u$  risolve l'equazione indefinita (12.31)<sub>1</sub>, anche  $u + c$  la risolve (il laplaciano di una costante è nullo). Inoltre, se  $u$  assume il dato (12.31)<sub>2</sub> su  $\partial\Omega$ , lo stessa farà  $u + c$  (tutte le derivate, in particolare quella normale, di una costante sono nulle). In definitiva, il problema (12.31) non è completamente ben posto, mancando di unicità e, a meno di soddisfare la condizione (12.32), anche di esistenza.

**Esempio 12.2.** Dimostriamo la proprietà della media in  $\mathbf{R}^3$ . Sia  $\Omega$  una sfera di raggio  $a$ . Applichiamo la prima identità di Green alla coppia di funzioni  $u$ , armonica in  $\Omega$  e di classe  $C^2(\bar{\Omega})$ , e  $v \equiv 1$ , per ottenere:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Omega} \Delta u dV = 0.$$

Sulla superficie  $\partial\Omega$  della sfera la derivata normale esterna  $\partial u/\partial n$  coincide con la derivata radiale  $\partial u/\partial r$  (verificarlo!) Quindi:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial r} dS = 0. \quad (12.33)$$

Introducendo le coordinate polari sferiche  $r > 0$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{array} \right. \quad (12.34)$$

la (12.33) si scrive<sup>11</sup>:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\partial u(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \right]_{r=a} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0,$$

che implica:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\partial u(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \right]_{r=a} \sin \theta d\theta d\varphi = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \right) \right]_{r=a} = 0.$$

quale che sia  $a$ . Dunque, la funzione:

<sup>11</sup>L'elemento di superficie  $dS$  in coordinate sferiche è  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ .

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (12.35)$$

è indipendente da  $r$ . Moltiplicando e dividendo per  $r^2$ , quest'ultima rappresenta la media di  $u(r, \theta, \varphi)$  sulla superficie sferica di raggio  $r$  ( $r$  qualsiasi):

$$\frac{1}{\text{area di } \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} u dS.$$

Facendo ora il limite per  $r \rightarrow 0$  della (12.35) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{area di } \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} u dS &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \lim_{r \rightarrow 0} u(r, \theta, \varphi) \right) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(\mathbf{0}) \sin \theta d\theta d\varphi = u(\mathbf{0}), \end{aligned}$$

poichè:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi.$$

La proprietà della media in  $\mathbf{R}^3$  è così dimostrata.

Torniamo ora alla prima identità di Green e riscriviamola scambiando tra loro le funzioni  $u$  e  $v$ :

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla n dV + \int_{\Omega} u \Delta v dV. \quad (12.36)$$

Sottraendo la (12.30) dalla (12.36) troviamo:

$$\int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dV. \quad (12.37)$$

Quest'ultima relazione prende il nome di *seconda identità di Green*.

**Teorema 12.5. (Formula di rappresentazione)** *Sia  $u$  una funzione armonica nel dominio  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ . Allora:*

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial\Omega} \left[ u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left( -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) + \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS, \quad (12.38)$$

dove  $\mathbf{x}_0$  è un punto qualsiasi di  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* Cominciamo con l'osservare che la funzione:

$$v = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}, \quad (12.39)$$

è armonica in tutto  $\mathbf{R}^3$  tranne che nel punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , laddove diverge. Il secondo membro della (12.38) coincide con il primo membro della (12.37) scritto per le funzioni  $u$ , armonica in  $\Omega$ , e  $v$  definita dalla (12.39). La (12.38) sarà dimostrata se proveremo che il secondo membro della (12.37), in questo caso specifico, vale proprio  $u(\mathbf{x}_0)$ . Con riferimento alla Figura 12, indichiamo con  $\Omega_\varepsilon$  il dominio  $\Omega$  privato della palla  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  di centro  $\mathbf{x}_0$  e raggio  $\varepsilon$ .

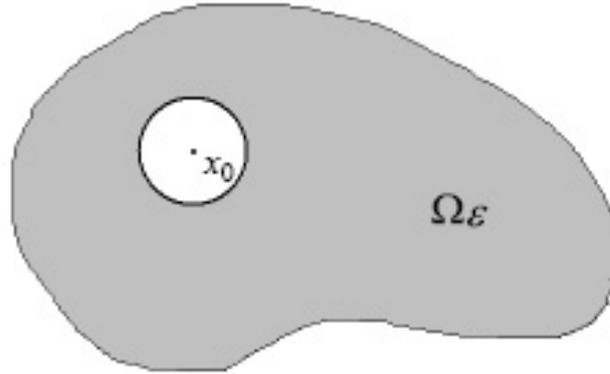


Figura 12: Dominio  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ .

Per semplicità, e senza ledere la generalità della dimostrazione, supponiamo che  $\mathbf{x}_0$  coincida con l'origine  $\mathbf{0}$  del sistema di coordinate e poniamo  $r = |\mathbf{x}|$ . La seconda identità di Green, scritta per le funzioni  $u$  e  $v = -1/4\pi r$  nel dominio  $\Omega_\varepsilon$  è:

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS = 0.$$

Ora, il contorno  $\partial\Omega_\varepsilon$  di  $\Omega_\varepsilon$  è costituito dal contorno  $\partial\Omega$  di  $\Omega$  e dalla superficie  $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$  della sfera di centro l'origine e raggio  $\varepsilon$ . Dunque, la relazione precedente si può riscrivere come:

$$\int_{\partial\Omega} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS = - \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS. \quad (12.40)$$

Su  $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$  la derivata  $\partial/\partial n$  nella direzione della normale *esterna* ad  $\Omega_\varepsilon$  coincide con l'opposto  $-\partial/\partial r$  della derivata radiale. Dunque, la (12.40) si scrive:

$$\int_{\partial\Omega} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS = \int_{r=\varepsilon} \left[ u \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] dS. \quad (12.41)$$

La (12.41) vale per ogni  $\varepsilon > 0$ . È immediato verificare che il secondo membro della (12.41) si può riscrivere come:

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{r=\varepsilon} u dS - \frac{1}{\varepsilon} \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} dS = -4\pi\bar{u} - 4\pi\varepsilon \overline{\frac{\partial u}{\partial r}},$$

dove  $\bar{u}$  e  $\overline{\frac{\partial u}{\partial r}}$  rappresentano rispettivamente la media di  $u$  e della sua derivata radiale sulla superficie sferica  $r = \varepsilon$ . Facendo il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  nella relazione precedente si ottiene:

$$-4\pi u(\mathbf{0}) - 4\pi \cdot \mathbf{0} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{0}) = -4\pi u(\mathbf{0}),$$

la quale, sostituita nella (12.41), conclude la dimostrazione della (12.38)  $\square$

### 13 Nozioni elementari di analisi funzionale

In questo paragrafo cercheremo di precisare qual è l'“ambiente” funzionale più idoneo nel quale studiare il problema agli autovalori:

$$\begin{cases} \Delta U = -\lambda U & \text{in } \Omega, \\ + \text{condizioni al contorno su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.1)$$

con  $\Omega$  dominio di  $\mathbf{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ), che emerge dal metodo di separazione delle variabili (cf. per esempio la (9.5)). Dimostreremo che, sotto una ampia classe di condizioni al bordo, il problema (13.1) ammette infiniti autovalori non negativi e, in corrispondenza, infinite autofunzioni che costituiscono una “base” nello “spazio” delle funzioni nel quale si studia non soltanto lo stesso problema (13.1) ma molti problemi relativi ad equazioni della fisica matematica.

Indichiamo con  $\mathcal{S}$  un insieme di funzioni, nel quale volta per volta andremo ad introdurre le proprietà necessarie per condurre la nostra analisi. Per fissare le idee, supporremo che le funzioni di  $\mathcal{S}$  siano definite in un intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbf{R}$  a valori in  $\mathbf{R}$ . Per cominciare, visto che alla fine andremo a mostrare l'esistenza in  $\mathcal{S}$  di una base<sup>12</sup>, l'insieme  $\mathcal{S}$  deve essere dotato della struttura di spazio vettoriale, cioè in  $\mathcal{S}$  sono definite le operazioni di somma tra funzioni di  $\mathcal{S}$  e di moltiplicazione di funzioni di  $\mathcal{S}$  per un numero reale. Inoltre sarà fondamentale, per gli sviluppi futuri del nostro discorso, precisare il significato di “scarto” o “distanza” tra elementi di  $\mathcal{S}$ .

A tale scopo premettiamo la seguente

**Definizione 13.1.** *La funzione:*

$$\nu : f \in \mathcal{S} \rightarrow \nu(f) \in \mathbf{R},$$

<sup>12</sup>La nozione di base è ben nota in uno spazio vettoriale finito-dimensionale  $\mathcal{S}_n$ , quale per esempio  $\mathbf{R}^n$ . Si tratta di un sistema di ordine massimo di vettori linearmente indipendenti. Ogni elemento di  $\mathcal{S}_n$  si può scrivere in un sol modo come combinazione lineare degli elementi di una base di  $\mathcal{S}_n$ .

è una **norma** in  $\mathcal{S}$  se verifica le seguenti proprietà:

- n1)  $\nu(f) \geq 0$ ,  $\nu(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ;
- n2)  $\nu(\alpha f) = |\alpha| \nu(f)$ , per ogni  $\alpha \in \mathbf{R}$ ;
- n3)  $\nu(f + g) \leq \nu(f) + \nu(g)$ .

L'insieme  $\mathcal{S}$ , dotato di una norma, si dice **spazio normato**.

Tradizionalmente, la norma di  $f$  si usa indicare con la notazione  $\|f\|$ . Ovviamente, di funzioni reali non negative definite in  $\mathcal{S}$  e che verificano le proprietà n1), n2) ed n3) se ne possono definire diverse. Di conseguenza, in uno stesso insieme di funzioni  $\mathcal{S}$  è possibile introdurre diverse norme ed ottenere, quindi, diversi spazi normati aventi, come si dice, lo stesso sostegno.

Se in  $\mathcal{S}$  è stata introdotta una norma, cioè se  $\mathcal{S}$  è uno spazio normato, allora resta definita la distanza<sup>13</sup>  $d$  tra elementi di  $\mathcal{S}$  come:

$$d(f, g) = \|f - g\|, \quad f, g \in \mathcal{S}. \quad (13.2)$$

La distanza  $d$  definita dalla (13.2) si dice indotta dalla norma  $\|\cdot\|$ . Ovviamente, norme diverse inducono in  $\mathcal{S}$  distanze diverse. L'aver dotato  $\mathcal{S}$  di una distanza è essenziale; senza una nozione di distanza tra elementi di  $\mathcal{S}$  non è possibile, per esempio, definire la continuità<sup>14</sup> in  $\mathcal{S}$  o la convergenza di successioni di elementi di  $\mathcal{S}$ .

Consideriamo una successione  $\{f_n\}$  di funzioni in  $\mathcal{S}$ . Fissando comunque  $\bar{x} \in [a, b]$ , si ottiene da questa la successione numerica  $\{f_n(\bar{x})\}$ . Come è noto, quest'ultima converge verso un certo numero reale  $\beta$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che  $|f_n(\bar{x}) - \beta| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Naturalmente, il numero  $\beta$  dipende da  $\bar{x} \in [a, b]$ .

**Definizione 13.2.** La successione  $\{f_n\}$  di funzioni di  $\mathcal{S}$  converge **puntualmente** se, comunque si fissi  $x \in [a, b]$  risulta convergente la successione di numeri reali  $\{f_n(x)\}$ . Il limite  $f(x)$  di quest'ultima, al variare di  $x$  in  $[a, b]$ , si dice **limite puntuale** della  $\{f_n\}$ .

**Esempio 13.1.** La successione:

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1], n \geq 1,$$

converge puntualmente alla funzione (limite puntuale):

<sup>13</sup>La funzione

$$d : (f, g) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow d(f, g) \in \mathbf{R},$$

con le proprietà:

- d1)  $d(f, g) \geq 0$ ,  $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ ;
- d2)  $d(f, g) = d(g, f)$ ;
- d3)  $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ ,  $f, g, h \in \mathcal{S}$ ,

si dice distanza o metrica in  $\mathcal{S}$ . E' facile verificare che la funzione  $d$  introdotta nella (13.2) verifica le suddette proprietà e quindi definisce una metrica in  $\mathcal{S}$ .

<sup>14</sup>E' importante sottolineare che qui ci si riferisce alla continuità in  $\mathcal{S}$ . Le funzioni di  $\mathcal{S}$ , essendo funzioni reali definite in  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ , potrebbero peraltro essere continue in  $[a, b]$  nel senso ordinario di  $\mathbf{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases} \quad (13.3)$$

La verifica è immediata.

**Definizione 13.3.** La successione  $\{f_n\}$  di funzioni di  $\mathcal{S}$  converge **uniformemente** in  $[a, b]$  alla funzione  $f(x)$  (**limite uniforme**) se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbf{N}$ , dipendente soltanto da  $\varepsilon$ , tale che  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$  e per ogni  $x \in [a, b]$ .

Mostreremo ora come sia possibile introdurre, in un insieme di funzioni  $\mathcal{S}$  opportuno, una metrica avente la proprietà che una successione  $\{f_n\}$  di  $\mathcal{S}$  converge uniformemente se e soltanto se è convergente secondo la distanza indotta da tale norma<sup>15</sup>.

**Definizione 13.4.** Sia  $\mathcal{S} = C([a, b])$  lo spazio vettoriale delle funzioni continue nell'intervallo  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ . In  $C([a, b])$  è assegnata la norma:

$$\|f\|_\infty \equiv \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad (13.4)$$

**Esercizio 13.1.** Verificare che la  $\|\cdot\|_\infty$  è effettivamente una norma in  $C([a, b])$ .

**Osservazione 13.1.** La norma  $\|\cdot\|_\infty$  si può introdurre in uno spazio di funzioni più grande di quello delle funzioni continue su  $[a, b]$ . Per i nostri scopi, tuttavia, ci limiteremo a questo esempio. Inoltre, nella (13.4) è lecito scrivere “max” in luogo di “sup”, poichè le  $f(x)$  sono definite e continue su un intervallo chiuso e limitato di  $\mathbf{R}$ .

**Teorema 13.1.** Una successione  $\{f_n\}$  di funzioni di  $C([a, b])$  converge uniformemente ad  $f(x)$  se e soltanto se essa converge ad  $f$  nella norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\{f_n\} \xrightarrow{\text{uniform.}} f$ . Allora,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}(\varepsilon)$  tale che  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$  e per ogni  $x \in [a, b]$ . Ma questo vuol dire che  $\max_{[a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$  e quindi che  $\{f_n\} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ .

Viceversa, supponiamo che  $\{f_n\} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ . Allora, comunque si scelga  $\varepsilon > 0$  è possibile determinare  $\bar{n}$  tale che  $\max_{[a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Dunque, per ogni  $n \geq \bar{n}$ ,  $\varepsilon$  è un maggiorante di  $|f_n(x) - f(x)|$  per ogni  $x \in [a, b]$  e quindi  $\{f_n\} \xrightarrow{\text{uniform.}} f$ .  $\square$

<sup>15</sup>Nel seguito diremo più brevemente “secondo la norma assegnata”.

**Esempio 13.2.** La successione dell'esempio 13.1 non converge uniformemente alla funzione (13.3). Infatti:

$$\max_{[0,1]} |x^n - 0| = 1.$$

Peraltro, la funzione (13.3), essendo discontinua, non può essere limite uniforme di una successione di funzioni continue. Si osservi che, invece, la convergenza è uniforme in ogni intervallo del tipo  $[0, b]$ , con  $0 < b < 1$ .

Nell'insieme  $C([a, b])$  è possibile introdurre altre norme diverse dalla  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Definizione 13.5.** Nello spazio vettoriale  $C([a, b])$  delle funzioni continue nell'intervallo  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  è assegnata la norma:

$$\|f\|_2 \equiv \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (13.5)$$

**Esercizio 13.2.** Verificare che la  $\|\cdot\|_2$  è effettivamente una norma in  $C([a, b])$ .

**Osservazione 13.2.** Anche la norma  $\|\cdot\|_2$  può in realtà essere introdotta in un insieme di funzioni più ampio di  $C([a, b])$ . Ad esempio, se l'integrale in (13.5) fosse inteso nel senso di Riemann, sarebbe sufficiente che le funzioni  $f$  fossero generalmente continue.

Se in uno stesso insieme  $\mathcal{S}$  vengono introdotte norme diverse, che quindi inducono diverse distanze, può capitare o meno che successioni che convergono nella prima norma convergano anche nella seconda e viceversa. Quando ciò accade per ogni successione in  $\mathcal{S}$  si dice che le due **norme** sono **equivalenti**.

**Teorema 13.2.** Ogni successione  $\{f_n\}$  uniformemente convergente in  $C([a, b])$  converge anche in  $\|\cdot\|_2$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\{f_n\} \xrightarrow{\text{uniform.}} f$ . A norma del teorema 13.1, ciò equivale a dire che  $\{f_n\} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ . Dunque,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}$  tale che  $\max_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Ma allora:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2(b - a),$$

per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Dunque,  $\{f_n\} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ . □

Le norme  $\|\cdot\|_\infty$  e  $\|\cdot\|_2$  non sono tuttavia equivalenti. Forniremo l'esempio di una successione di funzioni generalmente continue in  $[0, 1]$  che converge in  $\|\cdot\|_2$  ma non converge puntualmente e, quindi, neanche uniformemente e in  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Esempio 13.3.** Si consideri la successione:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 0 & \text{se } 1/2 < x \leq 1, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1/2, \\ 1 & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/4, \\ 0 & \text{se } 1/4 < x \leq 1, \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1/4, \\ 1 & \text{se } 1/4 \leq x \leq 1/2, \\ 0 & \text{se } 1/2 < x \leq 1, \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1/2, \\ 1 & \text{se } 1/2 \leq x \leq 3/4, \\ 0 & \text{se } 3/4 < x \leq 1, \end{cases} \quad f_6(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 3/4, \\ 1 & \text{se } 3/4 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

e così di seguito. In parole, i termini successivi della  $\{f_n\}$  sono diversi da zero e valgono 1 in intervalli di ampiezza decrescente come  $1/2^n$ , intervalli che si spostano da sinistra a destra all'interno di  $[0, 1]$ .

E' immediato verificare che  $\{f_n\}$  converge a zero nella norma  $\|\cdot\|_2$ . Infatti:

$$\|f_n - 0\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx \sim \frac{1}{2^n},$$

che tende a zero per  $n \rightarrow +\infty$ . Peraltro è del tutto evidente che, comunque si fissi  $\bar{x} \in [0, 1]$  la successione numerica  $\{f_n(\bar{x})\}$  non converge. Infatti, comunque si prenda  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  esiste sempre un termine di questa successione numerica di indice  $n > \bar{n}$  che vale 1.

**Osservazione 13.3.** Il fatto che gli elementi della successione  $\{f_n\}$  non siano funzioni continue non lede la generalità dell'esempio precedente.

Nella scelta dell'ambiente funzionale migliore nel quale formulare, per esempio, il problema agli autovalori (13.1) gioca un ruolo fondamentale la proprietà di "completezza". Per poterne precisare il significato dobbiamo richiamare una definizione preliminare.

**Definizione 13.6.** Sia  $\mathcal{S}$  uno spazio normato e sia  $d$  la distanza indotta dalla metrica scelta in  $\mathcal{S}$ . Una successione  $\{f_n\}$  di  $\mathcal{S}$  è una **successione di Cauchy** se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che  $d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$  per ogni  $n, m \geq \bar{n}$ .

In altri termini, in una successione di Cauchy la distanza tra gli elementi della successione da un certo indice in poi è piccola a piacere.

**Esempio 13.4.** La successione di numeri razionali:

$$f_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}, \quad n \geq 1 \quad (13.6)$$

è di Cauchy in  $\mathbf{Q}$  (insieme dei numeri razionali munito della usuale distanza del modulo). Per provarlo occorre verificare che, da un certo indice  $\bar{n}$  in poi la differenza  $|f_m - f_n|$  può essere resa piccola a piacere. Senza perdere di generalità supponiamo che  $m \geq n$ , cioè che sia  $m = n + h$  per un qualche  $h \in \mathbf{N}$ . Allora:

$$\begin{aligned} |f_m - f_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+h} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+h} \left| \frac{(-1)^k}{k!} \right| = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2) \cdot \dots \cdot (n+h)} \right) \leq \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^h} \right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{1 - \frac{1}{2^{h+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{(n+1)!} \left( 2 - \frac{1}{2^h} \right) \leq \frac{2}{(n+1)!} \leq \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

Si fissi ora un qualunque  $\varepsilon > 0$ . Sarà sufficiente prendere come  $\bar{n}$  un intero maggiore di  $2/\varepsilon$  perchè dalla relazione precedente risulti  $|f_m - f_n| < \varepsilon$  per ogni  $n, m \geq \bar{n}$ .

**Teorema 13.3.** Sia  $\mathcal{S}$  uno spazio normato, con una (qualsiasi) norma  $\|\cdot\|$ . Ogni successione  $\{f_n\}$  di  $\mathcal{S}$  convergente è una successione di Cauchy.

*Dimostrazione.* Se  $\{f_n\}$  è convergente (secondo la norma  $\|\cdot\|$ ) ad una certa funzione  $f$  vuol dire che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}$  tale che  $\|f_n - f\| < \varepsilon/2$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Allora, sfruttando le proprietà della distanza (cf. nota 13) si ha:

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < \varepsilon,$$

per ogni  $n, m \geq \bar{n}$ . Quindi,  $\{f_n\}$  è una successione di Cauchy in  $\mathcal{S}$ .  $\square$

Non è difficile verificare che l'affermazione opposta a quella del teorema 13.3 è falsa, cioè possono costruirsi esempi di spazi normati  $\mathcal{S}$  contenenti successioni di Cauchy che non convergono in  $\mathcal{S}$ .

**Esempio 13.5.** Sia  $\mathcal{S} = \{x \in \mathbf{R}, 0 \leq x < 1\}$  con la usuale distanza del modulo. La successione:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

è di Cauchy in  $\mathcal{S}$  ma non converge ad alcun elemento di  $\mathcal{S}$ . Infatti, essa converge ad  $x = 1$  che non appartiene ad  $\mathcal{S}$ .

**Esempio 13.6.** La successione dell'esempio 13.4 è una successione di Cauchy di elementi di  $\mathbf{Q}$ , cioè di numeri razionali. Non è difficile dimostrare però che essa non converge ad alcun numero razionale.

**Definizione 13.7.** Uno spazio normato  $\{\mathcal{S}, \|\cdot\|\}$  si dice **completo** se ogni successione di Cauchy di  $\mathcal{S}$  converge ad un elemento di  $\mathcal{S}$ .

L'insieme  $\mathbf{Q}$  dei numeri razionali munito della distanza del modulo non è completo, come riportato nell'esempio 13.6. Il "completamento" di  $\mathbf{Q}$  è l'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali. Naturalmente, uno stesso insieme di elementi può risultare completo rispetto ad una norma ed incompleto rispetto ad una norma diversa.

**Teorema 13.4.** Lo spazio vettoriale  $C([a, b])$  delle funzioni continue in  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  è completo rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\{f_n\}$  di Cauchy in  $\{C([a, b]), \|\cdot\|_\infty\}$ . Ciò vuol dire che  $\forall x \in [a, b]$  la successione numerica  $\{f_n(x)\}$  è di Cauchy in  $\mathbf{R}$ . Poichè, come si è ricordato sopra,  $\mathbf{R}$  è completo rispetto alla distanza del modulo, la  $\{f_n(x)\}$  convergerà ad un valore  $f(x) \in \mathbf{R}$ . Resta così definita la funzione:

$$f : x \in [a, b] \rightarrow f(x) = \lim_n f_n(x).$$

Mostriamo che  $f(x)$  è continua. Sia  $x_0$  un qualsiasi punto di  $[a, b]$ . Abbiamo:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|,$$

con  $x \in [a, b]$  qualsiasi. Sia ora  $\varepsilon > 0$ . Poichè la successione numerica  $\{f_n(x)\}$  è convergente (essendo di Cauchy) in ogni  $x \in [a, b]$ , si ha che  $\exists \bar{n}$  tale che  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$  e  $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$ . Dunque:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(x_0)|.$$

Ma  $f_n$  è continua per ogni  $n$ , quindi  $\exists \delta > 0$  tale che se  $|x - x_0| < \delta$  si ha  $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$ . In definitiva,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che se  $|x - x_0| < \delta$  si ha:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

e quindi  $f$  è continua in  $x_0$ . Ma  $x_0$  è un punto qualsiasi di  $[a, b]$  e quindi  $f$  è continua in  $[a, b]$ .  $\square$

Forniamo ora un esempio di funzioni continue in un intervallo  $[a, b]$  che è di Cauchy nella norma  $\|\cdot\|_2$  e che converge, nella stessa norma  $\|\cdot\|_2$ , verso una funzione che non è continua in  $[a, b]$ , con ciò mostrando che:

**Teorema 13.5.** Lo spazio vettoriale  $C([a, b])$  delle funzioni continue in  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  non è completo rispetto alla norma  $\|\cdot\|_2$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione di funzioni continue in  $[0, 1]$ :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ (2x-1)^{1/n} & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad n \geq 1 \quad (13.7)$$

Mostriamo che  $\{f_n\}$  converge in  $\{f_n(x)\}$  alla funzione<sup>16</sup>:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f(x)\|_2^2 &= \int_{1/2}^1 |1 - (2x-1)^{1/n}|^2 dx = \int_{1/2}^1 dx + \int_{1/2}^1 (2x-1)^{2/n} dx \\ &- 2 \int_{1/2}^1 (2x-1)^{1/n} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2/n+1} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1/n+1} \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_2^2 = 0.$$

Ma la funzione  $f(x)$  non è continua in  $[0, 1]$ . Questo prova l'asserto.  $\square$

Poichè la completezza è un requisito fondamentale per l'ambiente funzionale che stiamo cercando di delineare, si potrebbe pensare di concludere che tra gli spazi vettoriali normati  $\{C[a, b], \|\cdot\|_\infty\}$  e  $\{C[a, b], \|\cdot\|_2\}$  il primo sia da preferirsi. Ciò può sembrare tanto più vero se si considera il contenuto del teorema seguente, che ci limitiamo ad enunciare:

**Teorema 13.6. (Weierstrass)** *Si consideri il sistema dei polinomi in  $[0, 1]$ <sup>17</sup>:*

$$\mathcal{P}(x) = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}, \quad (13.8)$$

*e sia  $f(x)$  una qualsiasi funzione continua in  $[0, 1]$ . Allora, comunque si fissi  $\varepsilon > 0$  è sempre possibile determinare un polinomio  $p_n(x)$  di grado  $n$  opportuno e di coefficienti  $c_0, c_1, \dots, c_n$  tale che:*

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty < \varepsilon.$$

<sup>16</sup>Che la successione è di Cauchy si dimostra alla stessa maniera.

<sup>17</sup>Naturalmente, l'aver scelto questo particolare intervallo non lede la generalità del teorema.

In altri termini, è possibile approssimare uniformemente bene quanto si vuole una funzione continua con polinomi.

Nel teorema di Weierstrass il sistema  $\mathcal{P}(x)$  dei polinomi si comporta come una “base” nello spazio  $\{C[a, b], \|\cdot\|_\infty\}$ . Infatti, un polinomio qualsiasi  $p_n(x)$ , di grado  $n$ , si scrive  $p_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ , con i coefficienti  $c_0, c_1, \dots, c_n$  che fungono da “componenti” di  $p_n(x)$  in  $\mathcal{P}(x)$  (con le componenti  $c_{n+1}, c_{n+2}, \dots$  tutte uguali a zero). Il teorema afferma, in pratica, che l’errore che si commette approssimando una funzione continua in un intervallo con un polinomio può essere reso piccolo a piacere nella norma  $\|\cdot\|_\infty$ . La questione, qui, riguarda il modo in cui si determinano i coefficienti  $c_i$ . Per analizzare meglio questo problema premettiamo qualche definizione.

**Definizione 13.8.** Sia  $\mathcal{S}$  uno spazio vettoriale. Un **prodotto scalare** è una funzione che ad ogni coppia  $f, g$  di elementi di  $\mathcal{S}$  associa un numero reale  $(f, g)$  con le seguenti proprietà:

- ps1)  $(f, g) = (g, f)$ ;
- ps2)  $(f, f) \geq 0$  e  $(f, f) = 0$  se e solo se  $f = 0$ ;
- ps3)  $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$ ;
- ps4)  $(af, g) = a(f, g)$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

Uno spazio vettoriale  $\mathcal{S}$  nel quale sia definito un prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)$  si dice **euclideo**.

E’ immediato<sup>18</sup> verificare che se  $\mathcal{S}$  è uno spazio euclideo, allora esso è anche uno spazio normato con la norma:

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}. \quad (13.9)$$

**Teorema 13.7.** Lo spazio  $\{C[a, b], \|\cdot\|_2\}$  è euclideo. Infatti la norma  $\|\cdot\|_2$  si deriva, in accordo con la (13.9), dal prodotto scalare<sup>19</sup>:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (13.10)$$

Non è vero, in generale, che ogni norma possa essere derivata da un prodotto scalare. Sussiste, infatti, la seguente proprietà:

**Teorema 13.8. (Proprietà del parallelogramma)** Sia  $\mathcal{S}$  uno spazio normato con una norma qualsiasi  $\|\cdot\|$ . Allora,  $\mathcal{S}$  è euclideo, cioè la norma  $\|\cdot\|$  si può derivare da un prodotto scalare in accordo con la (13.9), se e soltanto se:

<sup>18</sup>Solo la condizione n3) è un po’ delicata da provare. Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2|(f, g)| + \|g\|^2 \leq \\ & \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2, \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della disuguaglianza di Schwarz  $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$ , valida per ogni  $f, g$  in  $\mathcal{S}$  euclideo.

<sup>19</sup>Che si tratti di un prodotto scalare si verifica molto facilmente.

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2 (\|f\|^2 + \|g\|^2), \quad (13.11)$$

per ogni  $f, g \in \mathcal{S}$ .

La proprietà del parallelogramma, che non dimostriamo<sup>20</sup>, ci consente di provare per mezzo di un esempio che lo spazio  $\{C[a, b], \|\cdot\|_\infty\}$  non è euclideo, cioè che la norma della convergenza uniforme non può derivare da un prodotto scalare. A tale scopo consideriamo l'insieme delle funzioni continue in  $[0, \frac{\pi}{2}]$  con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ . In tale spazio consideriamo le due funzioni  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \cos x$ . E' immediato verificare che:

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= 1, & \|g\|_\infty &= 1, \\ \|f + g\|_\infty &= \sqrt{2}, & \|f - g\|_\infty &= 1, \end{aligned}$$

dalle quali si deduce che la (13.11) non vale.

L'impossibilità di munire  $\{C[a, b], \|\cdot\|_\infty\}$  della struttura di spazio vettoriale euclideo lo rende inidoneo ai nostri scopi. D'altra parte, lo spazio  $\{C[a, b], \|\cdot\|_2\}$  non è completo, mentre anche la completezza è una proprietà irrinunciabile. In maniera del tutto analoga alla costruzione dello spazio dei numeri reali  $\mathbf{R}$ , che si ottiene aggiungendo ai numeri razionali  $\mathbf{Q}$  i limiti delle successioni di Cauchy di numeri razionali (le quali non sono tutte convergenti in  $\mathbf{Q}$ , cf. l'esempio 13.4), se si aggiungono alle funzioni continue in  $[a, b]$  i limiti delle successioni di Cauchy di funzioni continue le quali, come la successione (13.7), non convergono nella norma  $\|\cdot\|_2$  ad una funzione continua, si ottiene uno spazio completo. Tale spazio, che contiene quello delle funzioni continue in  $[a, b]$ , si indica con  $L_2[a, b]$  ed è caratterizzato dalla seguente:

**Definizione 13.9.** *Lo spazio  $L_2[a, b]$  è costituito dalle funzioni  $f$  definite in  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  con la proprietà:*

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < +\infty.$$

Lo spazio  $L_2[a, b]$  è uno spazio vettoriale euclideo e completo. Gli spazi vettoriali aventi entrambe queste proprietà si dicono **spazi di Hilbert**<sup>21</sup>.

In  $L_2[a, b]$  vale un risultato simile al teorema di Weierstrass valido nello spazio  $\{C[a, b], \|\cdot\|_\infty\}$ . Si può dimostrare, infatti, che comunque si prendano  $\varepsilon > 0$  ed una funzione  $f \in L_2[a, b]$  è sempre possibile trovare una funzione continua  $f_\varepsilon$  in  $[a, b]$  che dista, nella norma  $\|\cdot\|_2$  meno di  $\varepsilon$ . Questo fatto si esprime dicendo che le funzioni continue in  $[a, b]$  costituiscono un sottoinsieme **denso** in  $L_2[a, b]$

<sup>20</sup>La necessità della condizione espressa dal teorema 13.8 è comunque immediata, trattandosi della nota proprietà geometrica che afferma che la somma dei quadrati costruiti sulle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati.

<sup>21</sup>Se uno spazio vettoriale normato ha solamente la proprietà di completezza, come  $\{C[a, b], \|\cdot\|_\infty\}$ , si dice uno **spazio di Banach**.

(ovviamente rispetto alla norma  $\|\cdot\|_2$  di  $L_2[a, b]$ ). Allo stesso modo, il teorema di Weierstrass comporta che le funzioni continue sono dense in  $\{C[a, b], \|\cdot\|_\infty\}$  nella norma di tale spazio.

## 14 Problemi ai limiti di Sturm-Liouville

**Definizione 14.1.** *Un operatore lineare  $L$  della forma:*

$$Lu = \frac{1}{\omega}[-(pu')' + qu], \quad (14.1)$$

*definito per valori di  $x$  appartenenti all'intervallo limitato  $[a, b]$  della retta reale, con  $q(x)$  e  $\omega(x)$  continue,  $\omega(x)$  positiva, e  $p(x)$  positiva e di classe  $C^1$  in  $[a, b]$ , si dice **operatore di Sturm-Liouville**.*

Siano  $B_1$  e  $B_2$  operatori lineari che assegnano i valori ai limiti  $a$  e  $b$  del tipo:

$$B_1u = \alpha_1u(a) + \beta_1u'(a), \quad (14.2)$$

$$B_2u = \alpha_2u(b) + \beta_2u'(b),$$

dove le costanti  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  verificano le condizioni:

$$\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i > 0. \quad (14.3)$$

**Definizione 14.2.** *Un problema di Sturm-Liouville regolare è un problema agli autovalori del tipo:*

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & a < x < b \\ B_1u = B_2u = 0. \end{cases} \quad (14.4)$$

Di solito, l'equazione (14.4)<sub>1</sub> si scrive come:

$$-(pu')' + qu = \lambda\omega u. \quad (14.5)$$

Se avviene che o l'intervallo dei valori della  $x$  non è limitato o una delle condizioni (14.2) non è verificata nella forma sopra riportata, il problema agli autovalori (14.4) si dice di Sturm-Liouville **singolare**.

Problemi di Sturm-Liouville appaiono nella risoluzione di equazioni alle derivate parziali con il metodo della separazione delle variabili. Come è stato osservato nei paragrafi precedenti, il metodo conduce ad un problema agli autovalori del tipo (13.1). Nel problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione delle onde (o del calore) nell'intervallo  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ , questo si scrive:

$$\begin{cases} -U'' = \lambda U, \\ U(0) = U(L) = 0, \end{cases}$$

che è un problema di Sturm-Liouville regolare con  $p = \omega = 1$ ,  $q = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ . Ancora, nella risoluzione del problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione delle onde nel disco di  $\mathbf{R}^2$  di centro l'origine e raggio  $a$  l'equazione per la parte radiale  $R(r)$  della soluzione è:

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - \mu)R = 0, \quad (14.6)$$

con la condizione  $R(a) = 0$  assieme a quella di limitatezza della soluzione. Dividendo per  $r$ , la (14.6) diventa un'equazione del tipo (14.5) scegliendo  $p = \omega = r$  e  $q = \mu/r$ . Poichè le condizioni ai limiti non si scrivono nella forma (14.4)<sub>2</sub> con le  $B_1, B_2$  del tipo (14.2), il corrispondente problema di Sturm-Liouville ha carattere singolare.

L'ambiente in cui il problema (14.4) è formulato è lo spazio di Hilbert  $L_2(a, b)$  munito del prodotto scalare:

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)\omega(x)dx. \quad (14.7)$$

che si verifica immediatamente essere effettivamente un prodotto scalare in  $L_2(a, b)$  poichè  $\omega(x)$  è continua e positiva. Visto il ruolo che svolge nella definizione (14.7),  $\omega(x)$  si dice **funzione peso**. In  $L_2(a, b)$ , però, non tutti gli elementi sono derivabili nel senso ordinario. Di conseguenza, il **dominio**  $D(L)$  dell'operatore lineare  $L$  sarà un sottoinsieme di  $L_2(a, b)$ , e precisamente:

$$D(L) = \{v \in L_2(a, b) \cap C^2(a, b) : B_1 v = B_2 v = 0\}. \quad (14.8)$$

**Osservazione 14.1.** Lo spazio  $C_0^\infty(a, b)$  delle funzioni continue a supporto<sup>22</sup> compatto assieme a tutte le loro derivate in  $(a, b)$ , che è denso in  $L_2(a, b)$ , è contenuto in  $D(L)$ . Quindi,  $D(L)$  è esso stesso denso in  $L_2(a, b)$ .

**Definizione 14.3.** Un operatore lineare  $L$  si dice *simmetrico* se:

$$(Lu, v) = (u, Lv), \quad \forall u, v \in D(L). \quad (14.9)$$

**Teorema 14.1.** *L'operatore di Sturm-Liouville è simmetrico.*

*Dimostrazione.* Infatti:

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_a^b [-(pu')' + qu]v dx - \int_a^b [-(pv')' + qv]u dx.$$

---

<sup>22</sup>Il supporto di una funzione è la chiusura dell'insieme dei punti nei quali la funzione ha valore diverso da zero.

Integrando per parti, troviamo:

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \left[ p(uv' - u'v) \right]_a^b. \quad (14.10)$$

Tenendo conto della definizione di  $D(L)$  si ha che:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) &= -\beta_1 u'(a) & \alpha_1 v(a) &= -\beta_1 v'(a) \\ \alpha_2 u(b) &= -\beta_2 u'(b) & \alpha_2 v(b) &= -\beta_2 v'(b). \end{aligned}$$

Sostituendo nella (14.10) segue immediatamente l'asserto.  $\square$

La condizione che occorre verificare perchè un problema di Sturm-Liouville sia simmetrico è:

$$\left[ p(uv' - u'v) \right]_a^b = 0. \quad (14.11)$$

Questa si verifica non soltanto quando le condizioni al contorno sono del tipo (14.4)<sub>2</sub> ma anche quando, per esempio, abbiamo **condizioni ai limiti di tipo periodico**:

$$\begin{aligned} u(a) &= u(b), \\ p(a)u'(a) &= p(b)u'(b). \end{aligned} \quad (14.12)$$

Un altro caso di notevole interesse nelle applicazioni si ha quando la funzione  $p(x)$  (coefficiente della derivata seconda nell'operatore  $L$ ) si annulla in uno degli estremi dell'intervallo dei valori della  $x$ . Se, per fissare le idee, supponiamo che  $x \in [0, b]$ , si può avere che  $p(0) = 0$ . Quando ciò avviene, di solito si richiede che, nel punto "singolare  $x = 0$  la funzione  $u$  sia limitata. Si può dimostrare che la condizione di simmetria (2.11) continua a valere se tanto la  $u$  quanto la  $v$  verificano le condizioni ai limiti:

$$u(b) = 0, \quad u(0) \text{ limitata e } \lim_{x \rightarrow 0} p(x)u'(x) = 0. \quad (14.13)$$

**Teorema 14.2.** *Gli autovalori del problema di Sturm-Liouville sono reali.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $L$  ammetta un autovalore complesso  $\lambda$  e diciamo  $u$  la corrispondente autofunzione. Allora, anche il complesso coniugato  $\bar{\lambda}$  di  $\lambda$  sarà autovalore e la corrispondente autofunzione sarà  $\bar{u}$ :

$$Lu = \lambda u, \quad L\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u},$$

(si osservi che l'operatore di Sturm-Liouville  $L$  è reale). Ma allora si ha:

$$(Lu, \bar{u}) = \lambda(u, \bar{u}), \quad (u, L\bar{u}) = \bar{\lambda}(u, \bar{u}).$$

Ora, siccome  $L$  è simmetrico, i primi membri delle due relazioni precedenti sono uguali tra loro, e quindi lo sono anche i secondi membri, per cui, essendo  $(u, \bar{u}) > 0$ , è  $\lambda = \bar{\lambda}$ .  $\square$

**Teorema 14.3.** *Autofunzioni del problema di Sturm-Liouville associate ad autovalori distinti sono ortogonali (nel senso del prodotto scalare (14.7)).*

*Dimostrazione.* Siano  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  due autovalori distinti di  $L$  e siano  $u_1$  e  $u_2$  le corrispondenti autofunzioni. Si ha:

$$(Lu_1, u_2) - (u_1, Lu_2) = \lambda_1(u_1, u_2) - \lambda_2(u_1, u_2).$$

Ma  $L$  è simmetrico. Quindi:

$$\lambda_1(u_1, u_2) - \lambda_2(u_1, u_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0,$$

e, essendo  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , segue che  $(u_1, u_2) = 0$ , cioè che  $u_1$  e  $u_2$  sono ortogonali.  $\square$

Per il significato che esso riveste nelle applicazioni, è molto importante stabilire il segno degli autovalori del problema di Sturm-Liouville. Moltiplicando scalarmente (nel senso (14.7)) l'equazione (14.4)<sub>1</sub> per  $u$  si verifica immediatamente che:

$$\lambda = \frac{(Lu, u)}{\|u\|^2} \quad (14.14)$$

dove:

$$\|u\|^2 = \int_a^b \omega(x)u^2(x)dx.$$

il rapporto  $R(u)$  a secondo membro della (14.14) prende il nome di **quoziente di Rayleigh**. Se lo valutiamo esplicitamente usando l'espressione della (14.5) troviamo:

$$R(u) = \frac{(Lu, u)}{\|u\|^2} = \frac{1}{\|u\|^2} \int_a^b [p(u')^2 + qu^2]dx - \frac{1}{\|u\|^2} [p u u']_a^b.$$

Da quest'ultima relazione segue che, per tutte le condizioni ai limiti per le quali:

$$[p u u']_a^b \leq 0, \quad (14.15)$$

il quoziente di Rayleigh  $R(u)$  è non negativo. Questo si verifica, ad esempio, quando abbiamo condizioni ai limiti omogenee del tipo:

$$u(a) = 0; u(b) = 0, \quad (14.16)$$

ovvero:

$$u'(a) = 0; u'(b) = 0, \quad (14.17)$$

ma anche per condizioni al contorno periodiche del tipo (14.12) nonché per condizioni di singolarità del tipo (14.13).

Il risultato seguente, della seconda parte del quale omettiamo la dimostrazione, fornisce una caratterizzazione dell'insieme degli autovalori di un problema di Sturm-Liouville.

**Teorema 14.4.** *Gli autovalori di un problema di Sturm-Liouville per il quale è verificata la condizione (14.15) sono tutti non negativi e costituiscono un insieme numerabile.*

L'insieme degli autovalori si può quindi ordinare come:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

Infine, si può dimostrare che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ .

**Teorema 14.5.** *Il minimo del rapporto di Rayleigh nel dominio  $D(L)$  è il primo autovalore  $\lambda_1$  di  $L$ .*

*Dimostrazione.* Nella dimostrazione daremo per accettata l'esistenza del minimo:

$$m = \min \left\{ R(\varphi) = \frac{(L\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2}; \quad \varphi \in D(L) \right\}, \quad (14.18)$$

ed indicheremo con  $u$  la funzione di  $D(L)$  in corrispondenza della quale tale minimo viene assunto (funzione minimizzante), cioè:

$$m = \frac{(Lu, u)}{\|u\|^2}. \quad (14.19)$$

Sia  $w = u + \varepsilon\varphi$  una funzione di  $D(L)$ ,  $\varepsilon$  un numero reale qualsiasi e consideriamo la funzione:

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \frac{(Lw, w)}{\|w\|^2} = \frac{(L(u + \varepsilon\varphi), u + \varepsilon\varphi)}{\|u + \varepsilon\varphi\|^2}. \quad (14.20)$$

L'essere  $u$  la funzione minimizzante equivale a richiedere che  $\mathcal{F}(\varepsilon)$  abbia un minimo per  $\varepsilon = 0$ . Condizione necessaria perchè ciò avvenga è che  $\mathcal{F}'(0) = 0$ . Ora:

$$\mathcal{F}'(0) = \frac{2(Lu, \varphi)\|u\|^2 - 2(Lu, u)(u, \varphi)}{\|u\|^4} = 0,$$

comporta che:

$$(Lu, \varphi)\|u\|^2 - (Lu, u)(u, \varphi) = 0,$$

ovvero:

$$(Lu, \varphi) = \frac{(Lu, u)}{\|u\|^2} (u, \varphi) = m(u, v),$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è usata la (14.19). Quindi, deve aversi:

$$(Lu - mu, \varphi) = 0,$$

per ogni funzione  $\varphi$  di  $D(L)$ . Dunque:

$$Lu = mu,$$

cioè  $m$  deve essere un autovalore di  $L$  e, essendo il minimo di  $R(\varphi)$  in  $D(L)$ , sarà necessariamente il più piccolo tra gli autovalori di  $L$ , cioè  $\lambda_1$ .  $\square$

**Teorema 14.6.** *Il minimo del rapporto di Rayleigh nel sottospazio di  $D(L)$  delle funzioni ortogonali alle prime  $n$  autofunzioni di  $L$  è  $\lambda_{n+1}$ .*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $m^*$  la quantità:

$$m^* = \min \left\{ \frac{(L\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2}; \quad \varphi \in D(L) \quad \text{e} \quad (\varphi, u_1) = (\varphi, u_2) = \dots = (\varphi, u_n) = 0 \right\},$$

cioè il minimo di  $R(\varphi)$  calcolato sulle funzioni  $\varphi$  di  $D(L)$  che sono ortogonali alle prime  $n$  autofunzioni  $u_1, u_2, \dots, u_n$  di  $L$ . Daremo per accettata l'esistenza di tale minimo e diremo  $u$  la funzione in corrispondenza della quale tale minimo viene assunto (ovviamente è  $(u, u_1) = (u, u_2) = \dots = (u, u_n) = 0$ .)

Ponendo  $w = u + \varepsilon\varphi$ , con  $\varepsilon$  numero reale qualsiasi e  $\varphi$  ortogonale a  $u_1, \dots, u_n$  e procedendo come nel teorema 14.5, si arriva a scrivere:

$$(Lu - m^*u, \varphi) = 0, \tag{14.21}$$

con  $(\varphi, u_1) = \dots = (\varphi, u_n) = 0$ . Prendendo nella (14.21)  $u_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) al posto di  $\varphi$  e sfruttando la simmetria di  $L$ , si ottiene:

$$(Lu, u_i) - m^*(u, u_i) = (u, Lu_i) - m^*(u, u_i) = (\lambda_i - m^*)(u, u_i) = 0,$$

vale a dire:

$$(Lu - m^*u, u_i) = 0, \tag{14.22}$$

con  $i = 1, \dots, n$ , dove si è tenuto conto che  $u$  è ortogonale a ciascuna delle  $u_i$ .

Ora, sia  $h$  una funzione *arbitraria*<sup>23</sup> di  $D(L)$ , cioè non necessariamente apparte-

<sup>23</sup>L'unica condizione su  $h$ , oltre ad appartenere a  $D(L)$ , è che risulti non identicamente nulla.

nente al sottospazio delle funzioni di  $D(L)$  ortogonali alle prime  $n$  autofunzioni di  $L$ , e consideriamo la funzione:

$$v = h - \sum_{k=1}^n c_k u_k, \quad \text{con } c_k = \frac{(h, u_k)}{\|u_k\|^2}. \quad (14.23)$$

E' immediato verificare che  $(v, u_i) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). In altri termini,  $v$  è la "parte" della funzione  $h$  che è ortogonale alle prime  $n$  autofunzioni di  $L$ . Di conseguenza, la (14.21) è soddisfatta dalla  $v$ . Facendo una combinazione lineare della (14.21), con  $v$  al posto di  $\varphi$ , e della (14.22), con coefficienti  $c_k$  che compaiono nella (14.23), si ottiene:

$$(Lu - m^*u, v) - \sum_{k=1}^n c_k (Lu - m^*u, u_k) = (Lu - m^*u, h) = 0,$$

la quale è valida per ogni funzione  $h \in D(L)$ . Da quest'ultima relazione deduciamo, quindi, che:

$$Lu = m^*u,$$

vale a dire che  $m^*$  è un autovalore di  $L$ . Dovendo, poi, essere il minimo di  $R(\varphi)$  tra le  $\varphi \in D(L)$  ortogonali alle prime  $n$  autofunzioni  $u_1, \dots, u_n$ , esso sarà il più piccolo autovalore di  $L$  corrispondente alle restanti autofunzioni  $u_{n+1}, u_{n+2}, \dots$ , cioè  $m^* = \lambda_{n+1}$ .

□

Il teorema successivo è il punto centrale del presente paragrafo.

**Teorema 14.7.** *Le autofunzioni di un problema di Sturm-Liouville per il quale è verificata la condizione (14.15) formano una base in  $L_2[a, b]$  ortonormale rispetto al prodotto scalare (14.7).*

*Dimostrazione.* Si è già stabilito precedentemente che vi è un sistema numerabile di autofunzioni e che queste sono mutuamente ortogonali. Poichè le autofunzioni sono sempre definite a meno di una costante, è sempre possibile assumere che esse costituiscano un sistema ortonormale  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Ora, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema  $\{u_n\}$  costituisca una base ortonormale in  $L_2[a, b]$  è che un qualsiasi elemento  $\varphi \in L_2[a, b]$  si possa scrivere come:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k u_k,$$

ovvero:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi - s_n\| = 0,$$

dove  $\varphi_k = (\varphi, u_k)$  e  $s_n = \sum_{k=1}^n \varphi_k u_k$ . Poniamo  $r_n = \varphi - s_n$  a stimiamo il rapporto di Rayleigh  $R(r_n)$ . Per ogni  $k = 1, 2, \dots, n$  si ha:

$$(r_n, u_k) = (\varphi - s_n, u_k) = (\varphi, u_k) - (s_n, u_k) = 0.$$

In altre parole, il resto  $r_n$  è ortogonale alle prime  $n$  autofunzioni. Ora, in accordo al teorema precedente, il minimo di  $R(\varphi)$  sul sottospazio di  $D(L)$  delle funzioni ortogonali alle prime  $n$  autofunzioni di  $L$  è  $\lambda_{n+1}$ . Di conseguenza, poichè  $r_n$  appartiene a tale sottospazio, si ha:

$$R(r_n) = \frac{(Lr_n, r_n)}{\|r_n\|^2} \geq \lambda_{n+1}. \quad (14.24)$$

Il teorema sarà dimostrato se riusciremo a provare che la quantità  $(Lr_n, r_n)$  è limitata superiormente. In questo caso, infatti, visto che il secondo membro della (14.24) tende a  $+\infty$  per  $n \rightarrow \infty$ , dovrà necessariamente aversi  $r_n \rightarrow 0$  nel senso di  $L_2[a, b]$ .

Ora, si ha:

$$(L\varphi, \varphi) = (L(s_n + r_n), s_n + r_n) = (Ls_n, s_n) + 2(Ls_n, r_n) + (Lr_n, r_n),$$

dove si è sfruttata la simmetria di  $L$ . Ancora, tenendo conto che  $(Ls_n, s_n) \geq 0$ , si ha:

$$(L\varphi, \varphi) \geq (Lr_n, r_n) + 2(Ls_n, r_n) = (Lr_n, r_n).$$

Dunque,  $(Lr_n, r_n)$  è limitata superiormente da  $(L\varphi, \varphi)$ , indipendentemente da  $n$ . Il teorema è così dimostrato.  $\square$

## A Teorema del trasporto di Reynolds

In questa Appendice è riportato un risultato riguardante il “trasporto” lungo il moto di quantità correlate ad integrali di campi euleriani. Sia  $\mathcal{B}_0$  la configurazione al tempo  $t = 0$  di un continuo deformabile e sia  $\mathcal{B}_t$  la configurazione al tempo  $t$ . Se  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(P, t)$  rappresenta il moto del continuo (con  $P \in \mathcal{B}_0$  e  $t \in [0, +\infty)$ ) allora, detta  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{B}_0$  una parte materiale del continuo, si ha:

$$\mathcal{P}_t = \mathbf{x}(\mathcal{P}_0, t), \quad t \in [0, +\infty),$$

cioè l'immagine  $\mathcal{P}_t$  di  $\mathcal{P}_0$  al tempo  $t > 0$  è costituita dagli stessi punti materiali da cui è costituita  $\mathcal{P}_0$ .

Dalla formula per il cambiamento di coordinate negli integrali multipli si ha:

$$\text{vol}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} dV = \int_{\mathcal{P}_0} J dV_0, \quad (A.1)$$

dove  $J = \det \mathcal{F} = \det(\partial x_i / \partial X_j) > 0$  e dove si è indicato con  $dV_0$  l'elemento di volume nella configurazione iniziale. Derivando la (A.1) rispetto al tempo si ha:

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\mathcal{P}_t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_0} J dV_0 = \int_{\mathcal{P}_0} \frac{dJ}{dt} dV_0. \quad (\text{A.2})$$

Andiamo ad esplicitare il termine  $dJ/dt$ . Per ragioni di semplicità ci limiteremo nella dimostrazione a considerare il caso piano, in cui cioè l'elemento di volume è, in realtà, un elemento di superficie. Dunque:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{vmatrix} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \right) - \\ &- \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_1} - \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \right) = \frac{\partial v_1}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \frac{\partial v_2}{\partial X_2} - \\ &- \frac{\partial v_1}{\partial X_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} - \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \frac{\partial v_2}{\partial X_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \\ &+ \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} - \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} - \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} = \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} - \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} - \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} - \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \right), \end{aligned}$$

ovvero, in forma sintetica:

$$\frac{dJ}{dt} = J \text{div } \mathbf{v}. \quad (\text{A.3})$$

Questa formula, pur essendo stata ottenuta qui nel caso bidimensionale, è valida anche nel caso tridimensionale. Sostituendo la (A.3) nella (A.2) si ha:

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_0} \frac{dJ}{dt} dV_0 = \int_{\mathcal{P}_0} \text{div } \mathbf{v} J dV_0 = \int_{\mathcal{P}_t} \text{div } \mathbf{v} dV. \quad (\text{A.4})$$

**Definizione A.1.** Un moto si dice isocoro se il volume di ogni parte materiale rimane invariato durante il moto.

Conseguenza immediata della (A.4) è che un moto è isocoro se e soltanto se  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ .

Sia ora  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  un qualsiasi campo euleriano<sup>24</sup>. Tenendo conto della (A.3) si ha:

<sup>24</sup> $\varphi$  è assunto sufficientemente regolare perchè le operazioni che andiamo ad effettuare siano consentite. Inoltre, anche se  $\varphi$  è qui un campo scalare, le considerazioni che andiamo a fare valgono, con le ovvie modifiche, anche se esso fosse un campo vettoriale.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \varphi dV &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_0} \varphi J dV_0 = \int_{\mathcal{P}_0} \frac{d}{dt} (J\varphi) dV_0 = \\
&= \int_{\mathcal{P}_0} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}) J dV_0 = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}) dV.
\end{aligned}
\tag{A.5}$$

Questa relazione va sotto il nome di “teorema del trasporto” di Reynolds. Consideriamo, come caso particolare,  $\varphi = \rho(\mathbf{x}, t)$ , essendo  $\rho$  il campo euleriano di densità del continuo, definito dalla relazione:

$$m(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV, \tag{A.6}$$

dove  $m(\mathcal{P}_t)$  è la massa di  $\mathcal{P}_t$ . Poichè  $\mathcal{P}_t$  è una parte materiale del continuo, costituita cioè sempre dagli stessi punti materiali, evidentemente di ha:

$$\frac{dm(\mathcal{P}_t)}{dt} = 0, \quad \text{per ogni } t \in [0, +\infty).$$

Da questa, dalla (A.5) e dall'arbitrarietà di  $\mathcal{P}_t \subset \mathcal{B}_t$  segue allora:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{A.7}$$

Quest'ultima relazione va sotto il nome di equazione di continuità della massa.

**Definizione A.2.** Un continuo si dice incomprimibile se il suo campo euleriano di densità è costante durante il moto.

Conseguenza della (A.7) è che un continuo è incomprimibile se e soltanto se  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ .