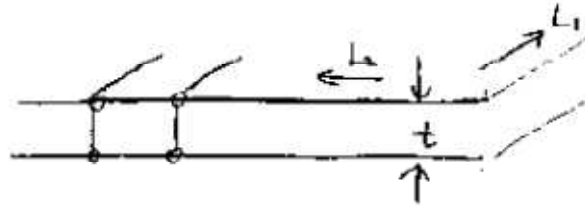


# Strutture snelle

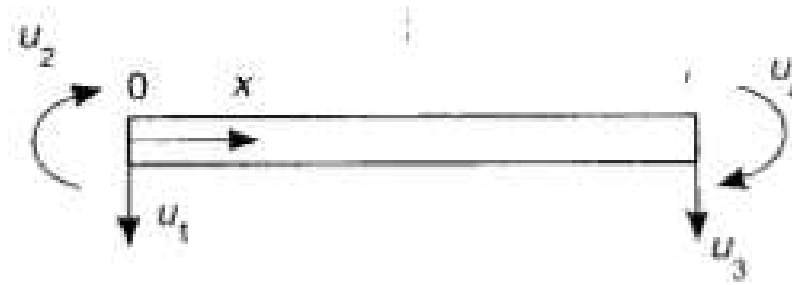


**Travi, piastre, membrane**

$$t/L_i \ll 1$$

$$\frac{t}{L} \ll 1, \quad \frac{t}{L} = \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

# Elementi di trave alla Eulero-Bernoulli



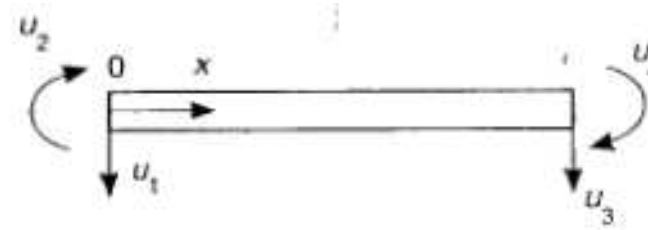
$$v(x) = a_1 + a_2 \frac{x}{l} + a_3 \left( \frac{x}{l} \right)^2 + a_4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \quad \text{Spostamento}$$

$$\varphi(x) = v'(x) = \frac{1}{l} \left( a_2 + 2a_3 \left( \frac{x}{l} \right) + 3a_4 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right) \quad \text{Rotazione}$$

$$\varphi(x) = -v''(x) = -\frac{1}{l^2} \left( 2a_3 + 6a_4 \left( \frac{x}{l} \right) \right) \quad \text{Curvatura}$$

# Elemento di trave alla Eulero Bernoulli

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\text{Ndof}} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i$$



Imponendo le condizioni al contorno

$$u_1(\mathbf{x}) = v(0) = a_1, \quad u_2(\mathbf{x}) = \varphi(0) = \frac{1}{l} a_2$$

$$u_3(\mathbf{x}) = v(l) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad u_4(\mathbf{x}) = \varphi(l) = \frac{1}{l} (a_2 + 2a_3 + 3a_4)$$

Si ricava

$$a_1 = u_1, \quad a_2 = l u_2$$

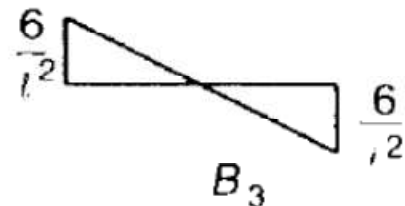
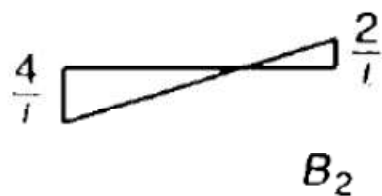
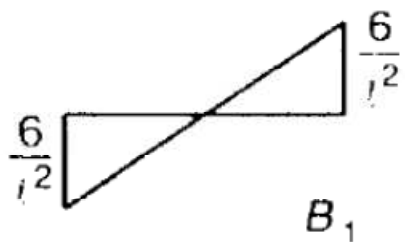
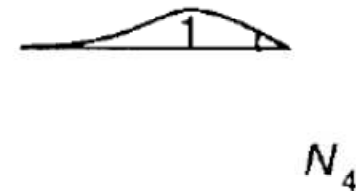
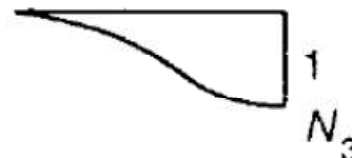
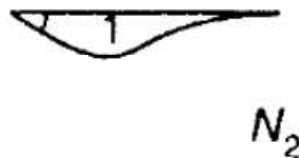
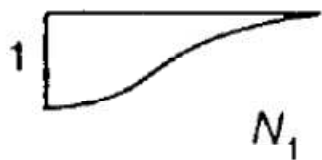
$$a_3 = -3u_1 - 2l u_2 + 3u_3 - l u_4, \quad a_4 = 2u_1 + l u_2 - 2u_3 + l u_4$$

# Elemento di trave di Eulero Bernoulli

$$N(x) = \left[ \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right) \quad l\left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) \quad \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right) \quad l\left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) \right]$$

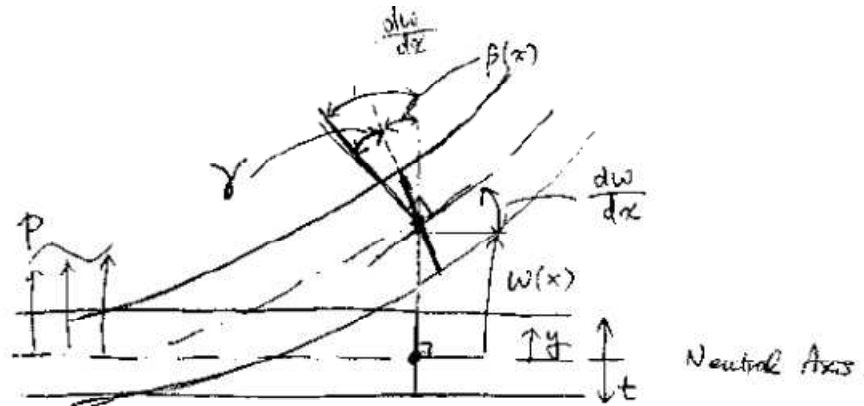
$$B(x) = \nabla N = \frac{1}{l^2} \left[ \left(6 - 12\frac{x}{l}\right) \quad l\left(4 - 6\frac{x}{l}\right) \quad \left(-6 - 12\frac{x}{l}\right) \quad l\left(2 - 6\frac{x}{l}\right) \right]$$

**Sono le deformate di una trave incastrata in cui si rilascia 1 grado di vincolo per volta**



**Anche chiamato elemento finito Hermitiano**

# Elemento di trave di Timoshenko



SP Timoshenko

In questo caso, la rotazione non coincide con la derivata dello spostamento  $v$   
Si interpolano indipendentemente sia lo spostamento  $v$  che la rotazione  $\varphi$

$$v(x) = a_1 + a_2 \frac{x}{l}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{l} \left( b_1 + b_2 \frac{x}{l} \right)$$

Da cui si ottengono la curvatura flessionale e lo scorrimento medio  $\gamma$

$$\chi(x) = -\frac{1}{l^2} b_2, \quad \gamma(x) = \frac{1}{l} \left( a_2 - b_1 - b_2 \frac{x}{l} \right)$$

# Elemento di trave di Timoshenko

Imponendo le condizioni al contorno

$$u_1(x) = v(0) = a_1, \quad u_2(x) = \varphi(0) = \frac{1}{\ell} b_1$$

$$u_3(x) = v(\ell) = a_1 + a_2, \quad u_4(x) = \varphi(\ell) = \frac{1}{\ell} (b_1 + b_2)$$

Si ottiene

$$a_1 = u_1, \quad a_2 = -u_1 + u_3, \quad b_1 = \ell u_2, \quad b_2 = \ell(-u_2 + u_4)$$

Da cui

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix} = N(x) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad \text{Ed inoltre} \quad \begin{bmatrix} \chi(x) \\ \gamma(x) \end{bmatrix} = B(x) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

dove

$$N(x) = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \ell - x & 0 & x & 0 \\ 0 & \ell - x & 0 & x \end{bmatrix} \quad B(x) = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\ell + x & 1 & -x \end{bmatrix}$$

# Elemento di trave di Timoshenko: locking

Moti rigidi e deformazioni costanti devono essere rappresentati indipendentemente da altri contributi.

L'elemento di trave lineare di Timoshenko non rispetta questa condizione. Infatti dall'approssimazione polinomiale

$$v(x) = a_1 + a_2 \frac{x}{\ell}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\ell} \left( b_1 + b_2 \frac{x}{\ell} \right)$$

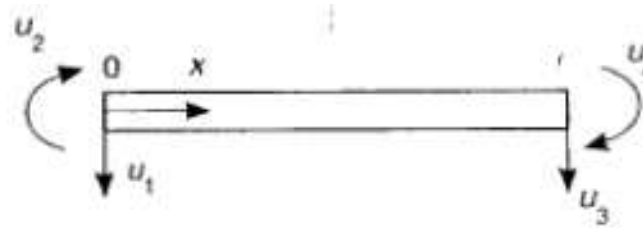
Si ottiene per le deformazioni

$$\chi(x) = -\frac{1}{\ell^2} b_2, \quad \gamma(x) = \frac{1}{\ell} (a_2 - b_1) - b_2 \frac{x}{\ell^2}$$

**La curvatura flessionale costante e' solo apparentemente presente, in quanto risulta proporzionale allo stesso coefficiente da cui dipende la variazione lineare dello scorrimento medio. In travi snelle, lo scorrimento e' molto piccolo e cio' impedisce all'elemento di deformarsi anche flessionalmente. Si parla di locking**

# Locking

Cfr Leone Corradi dell'Acqua  
vol II cap 12, p 373



**Il locking è un eccesso di rigidità dovuto a vincoli cinematici che il modello cinematico associato all'approssimazione agli elementi finiti comporta**

$$\begin{bmatrix} \chi(x) \\ \gamma(x) \end{bmatrix} = \mathbf{B}(x) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Dove la matrice di compatibilità è

$$\mathbf{B}(x) = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -l+x & 1 & -x \end{bmatrix}$$



# Locking



$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_3 - u_1 - l u_2 &= 0 \\ u_2 - u_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\text{Moto rigido} \\ &\text{Curvatura nulla!} \end{aligned}$$

**Un elemento lineare di trave di Timoshenko non è quindi in grado di deformarsi flessionalmente senza deformazioni taglianti: locking**

# Energia di deformazione totale

Si osservi che l'energia potenziale totale è (Bathe, pag 403)

$$\Pi = \underbrace{\frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 dx}_{\text{Energia flessionale}} + \underbrace{\frac{GAk}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta\right)^2 dx}_{\text{Energia tagliante}} - \underbrace{\int_0^L pw dx - \int_0^L m\beta dx}_{\text{Lavoro carichi esterni}}$$

Ovvero a meno dei carichi esterni e dividendo per EI

$$\tilde{\Pi} = \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 dx + \frac{GAk}{EI} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta\right)^2 dx$$

Da cui  $\tilde{\Pi} = \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 dx + \alpha \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta\right)^2 dx; \quad \alpha = \frac{GAk}{EI}$

Dove  $\alpha$  tende all'infinito quando  $h$  tende a 0

Quindi al continuo, prima della approssimazione agli elementi finiti, l'energia di scorrimento tende a zero quando la deformabilita' a taglio aumenta

L' approssimazione agli elementi finiti deve riprodurre questa situazione

# Esempio locking

$$x = \sum_{i=1}^3 h_i x_i$$

Using  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = L$ ,  $x_3 = L/2$ , we obtain

$$x = \frac{L}{2}(1 + r)$$

$$\mathbf{K} = \frac{Eh^3}{12} \int_0^L \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx$$

$$+ \frac{5Gh}{6} \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \\ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ -\frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & -\left(1 - \frac{x}{L}\right) & -\frac{x}{L} \end{bmatrix} dx$$

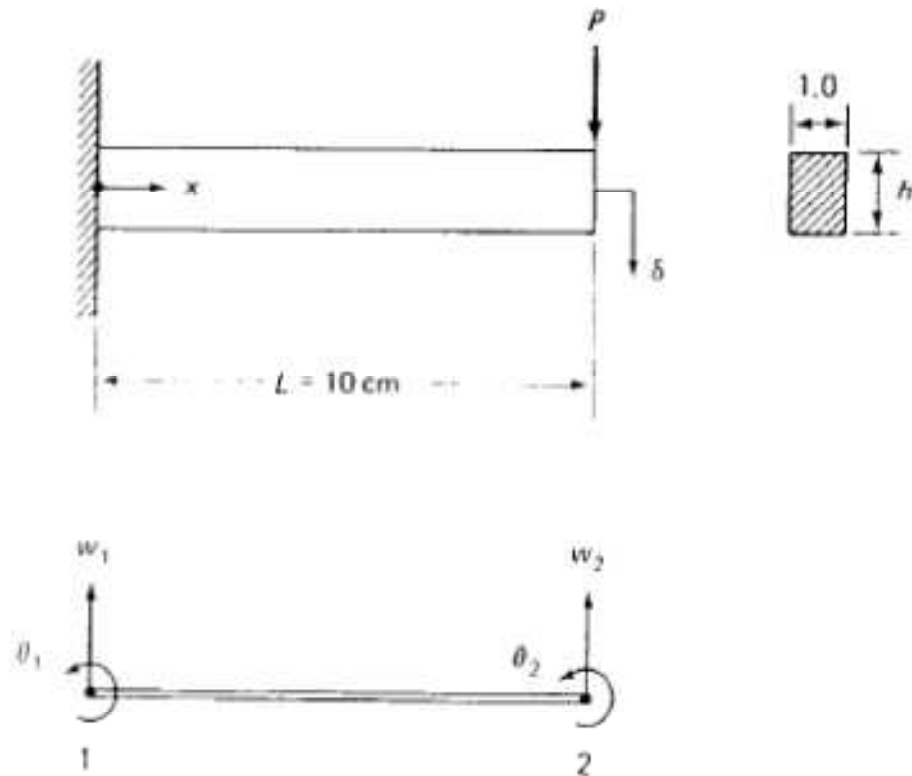


FIGURE 5.32 Analysis of cantilever beam using one two-node element.

# Esempio locking

With  $G = \frac{1}{2}E$  we have

$$\mathbf{K} = \frac{E}{12} \begin{bmatrix} \frac{5h}{L} & -\frac{5h}{L} & \frac{5h}{2} & \frac{5h}{2} \\ & \frac{5h}{L} & -\frac{5h}{2} & -\frac{5h}{2} \\ \text{sym.} & & \left(\frac{h^3}{L} + \frac{5hL}{3}\right) & \left(\frac{5hL}{6} - \frac{h^3}{L}\right) \\ & & & \left(\frac{h^3}{L} + \frac{5hL}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Since  $w_1 = \theta_1 = 0$ , the governing equilibrium equations for this problem are

$$\frac{E}{12} \begin{bmatrix} \frac{5h}{L} & -\frac{5h}{2} \\ -\frac{5h}{2} & \left(\frac{h^3}{L} + \frac{5hL}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da cui si ottiene il valore della freccia in estremita'

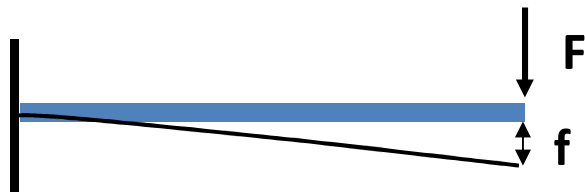
$$\delta = \frac{12PL}{5hE} \left( 1 + \frac{5hL}{4\left(\frac{h^3}{L} + \frac{5hL}{12}\right)} \right)$$

La freccia predetta dalla teoria elastica della trave e'

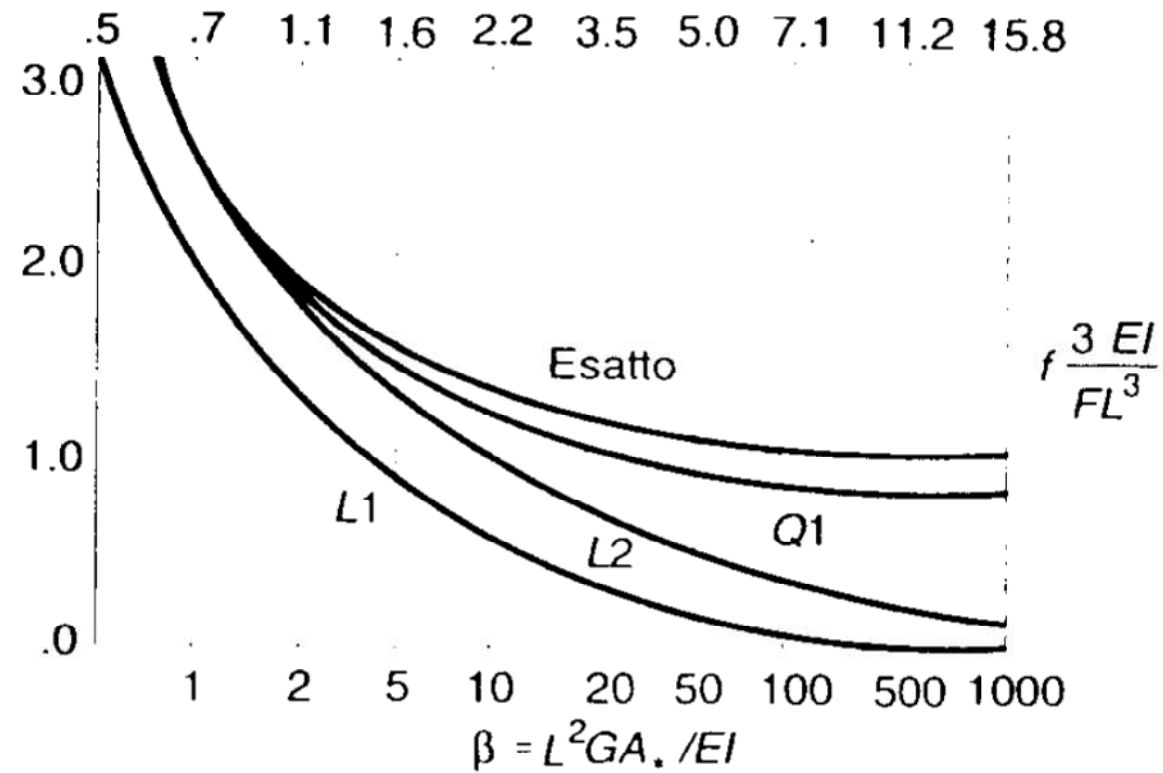
$$\delta = 4PL^3 / Eh^3$$

Pertanto la soluzione ottenuta con l'elemento 2 nodi e' inaccurata

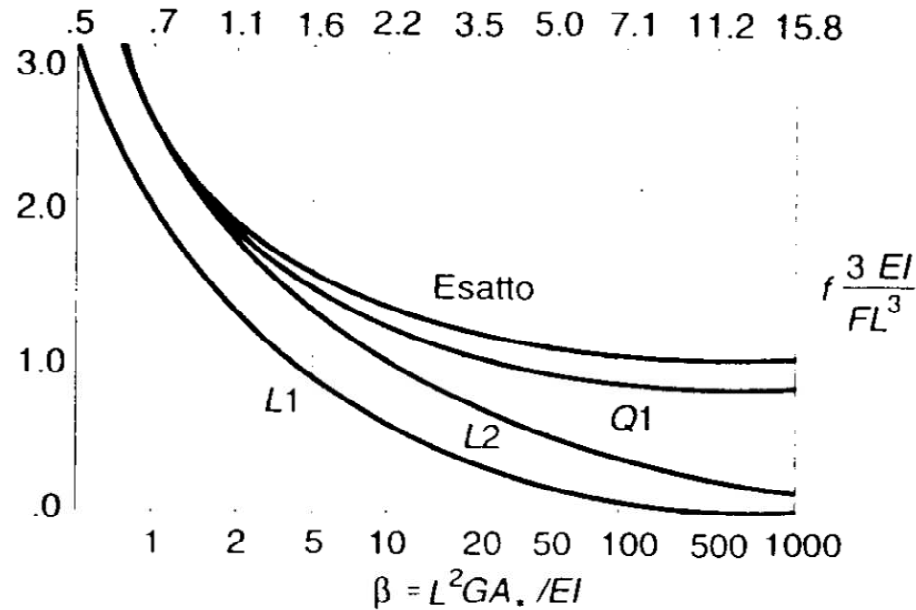
# Esempio locking



L1,L2: 1, 2 ef lineari;  
Q1: 1 ef quadratico



# Locking



**Modelli di trave di ordine piu' elevato del lineare non eliminano completamente l'eccesso di rigidezza:**

**La situazione di scorrimento nullo cui si avvicina il caso di una trave snella non viene riprodotta**

# Tecniche per ridurre il locking

**Tecniche volte a migliorare il comportamento dell'elemento a 2 nodi:**

- 1) Integrazione selettiva ridotta**
- 2) Teoria discreta di Kirchhoff (non lo consideriamo)**
- 3) Assumed enhanced strain (non lo consideriamo)**

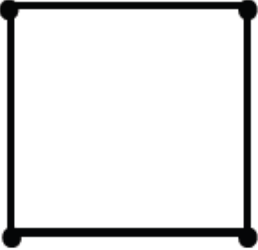
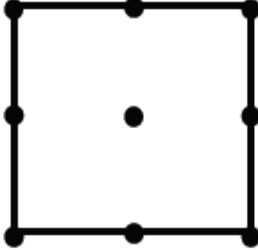
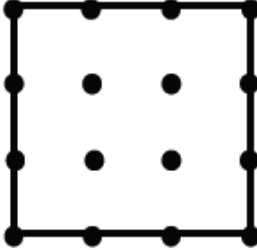
# Integrazione selettiva ridotta

**L'energia di scorrimento viene integrata non esattamente ma ricorrendo ad un numero ridotto di punti di integrazione numerica**

**Occorre verificare che l'elemento sia efficace e non presenti modi deformativi non consistenti**



# INTEGRAZIONE RIDOTTA E SELETTIVA

			
Shape functions	Bilinear	Biquadratic	Bicubic
Uniform reduced integration	1x1	2x2	3x3
Selective reduced integration	1x1 shear 2x2 bending	2x2 shear 3x3 bending	3x3 shear 4x4 bending

# Teoria discreta di Kirchhoff

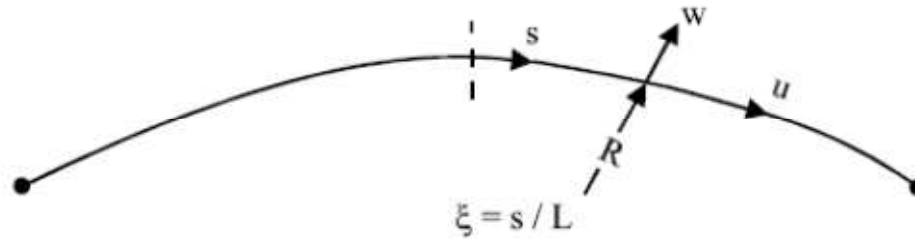
**Si assume che lo scorrimento sia così piccolo che l'energia associata possa essere trascurata nella EPT .**

**Tuttavia, occorrono delle equazioni aggiuntive che legano gli spostamenti nodali e le rotazioni.**

**Tali equazioni si ottengono imponendo che lo scorrimento si annulli in determinati punti del dominio dell'elemento. Si tratta di una tecnica più efficiente di quella basata sulla integrazione selettiva ridotta.**

# Membrane locking

Elemento trave curvo



Deformazione assiale

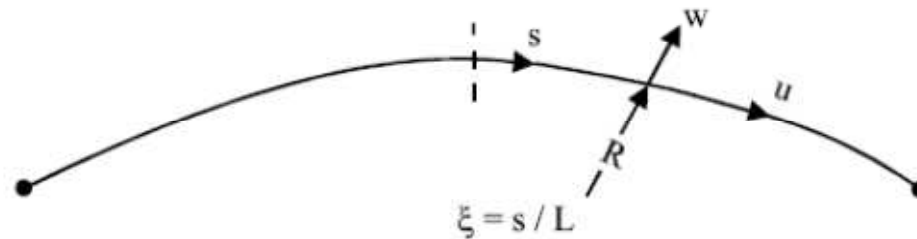
$$\varepsilon = u_{,s} + \frac{w}{R}$$

$$\chi = \frac{u_{,s}}{R} - w_{,ss}$$

Deformazione flessionale (curvatura)

# Membrane locking

## Elemento trave curvo



Deformazione assiale

$$\varepsilon = u_{,s} + w/R$$

$$\chi = u_{,s}/R - w_{,ss}$$

Deformazione flessionale  
(curvatura)

Approssimazione di u e w con polinomi, ad esempio:

$$u = a_0 + a_1 \xi$$

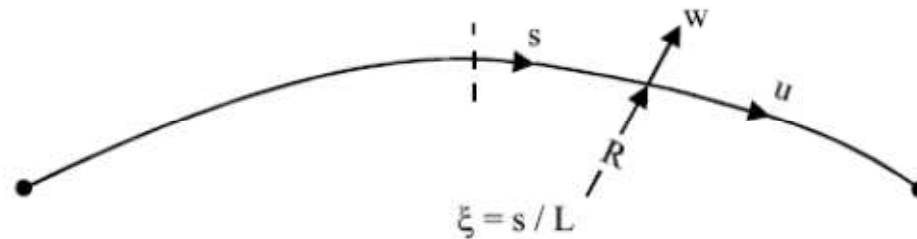
$$w = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3$$

dove

$$\xi = \frac{s}{L}$$

# Membrane locking

## Elemento trave curvo



Deformazione assiale

$$\varepsilon = u_{,s} + w/R$$

$$\chi = u_{,s}/R - w_{,ss}$$

Deformazione flessionale

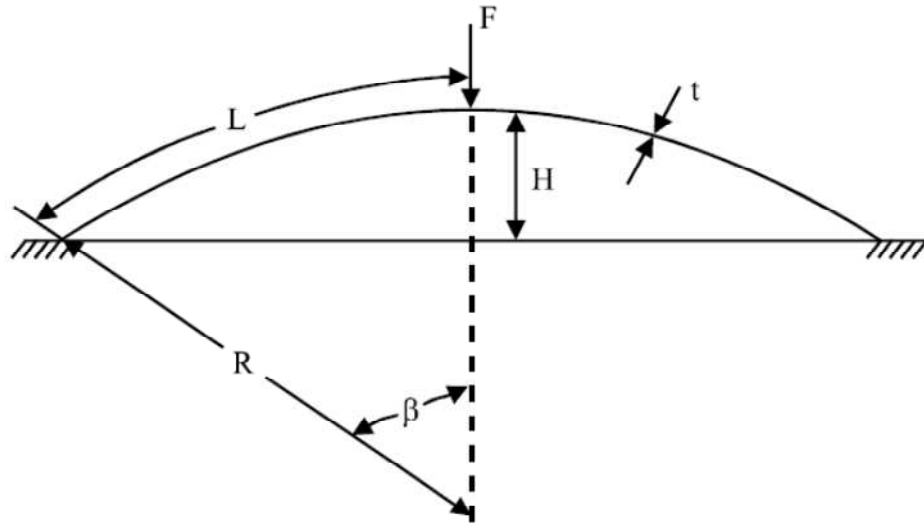
(curvatura)

Sostituendo, si ha:

$$\chi = \left( \frac{a_1}{RL} - 2 \frac{b_2}{L^2} \right) - \frac{6b_3}{L^2} \xi$$

$$\varepsilon = \left( \frac{a_1}{L} + \frac{b_0}{R} + \frac{b_2}{3R} \right) + \left( \frac{b_1}{R} + \frac{3b_3}{5R} \right) \xi - \frac{b_2}{3R} (1 - 3\xi^2) - \frac{b_3}{5R} (3\xi - 5\xi^3)$$

# Membrane locking



Consideriamo un arco sottile avente  $L/t \gg 1$  ed  $R/H$  molto piccolo, esso si comporta come una trave soggetta a flessione inestensibile, e pertanto la deformazione membranale  $\varepsilon$  tende a 0

La condizione di inestensibilità

$$\frac{a_1}{L} + \frac{b_0}{R} + \frac{b_2}{3R} \rightarrow 0$$

$$b_1 + \frac{3b_3}{5} \rightarrow 0$$

$$b_2 \rightarrow 0$$

$$b_3 \rightarrow 0$$

$$\varepsilon = u_{,s} + \frac{w}{R} \rightarrow 0 \quad \text{implica}$$

# Membrane locking

$$b_1 \rightarrow 0, \quad b_2 \rightarrow 0, \quad b_3 \rightarrow 0 \quad \text{implica} \quad w_{,s} \rightarrow 0, \quad w_{,ss} \rightarrow 0, \quad w_{,sss} \rightarrow 0$$

**Vincoli cinematici spuri che non possono essere sempre soddisfatti:  
Questo provoca membrane locking**

**Si dimostra che il termine di energia membranale nell'energia elastica**

$$\Pi_e = \int \frac{1}{2} EI \chi^t \chi + \frac{1}{2} EA \varepsilon^t \varepsilon \quad ds$$

**dopo la discretizzazione, “disturba” il termine di energia flessionale,  
causando una azione di irrigidimento**

# Incompressibile locking

**Incompressibile locking: per materiali incomprimibili, il coefficiente di Poisson  $\nu$  tende a 0.5 , e.g. suoli saturi, plastiche, elastomeri, gomme e materiali che fluiscono, come fluidi incomprimibili o come in plasticità**

**Questo implica che il modulo volumetrico tende all'infinito e ciò si ripercuote sulla deformazione volumetrica**

**Si rileva un irrigidimento dello spostamento mentre il campo di tensione presenta oscillazioni spurie**