

# Metodi variazionali

***OBIETTIVO: determinare funzioni incognite, chiamate variabili dipendenti, che soddisfano un certo insieme di equazioni differenziali in un determinato dominio e condizioni al contorno***

***STRUMENTO: Metodi variazionali: servono ad approssimare la soluzione di un problema***

***consistono in medie integrali pesate delle equazioni di partenza ed agiscono sulla FORMA DEBOLE DEL PROBLEMA***

***METODI: Metodo di Rayleigh-Ritz, Galerkin, Petrov-Galerkin, minimi quadrati (least squares), collocazione (collocation)***

***Il metodo degli elementi finiti può essere visto come l'applicazione su un dominio discretizzato in elementi finiti di metodi variazionali***

# Metodi variazionali

**Problema: trovare la soluzione  $u$  tale che**

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \text{ cin. ammissibile}$$

**Dove  $v$  è un qualunque campo cinematicamente ammissibile**

**$u$ : FUNZIONI TRIAL**

**$v$ : FUNZIONI TEST o FUNZIONI PESO**

# Metodi variazionali

***OSS: Si ricorda che se  $a$  è bilineare e simmetrica ed  $l$  è lineare, il problema è equivalente alla minimizzazione del funzionale dell'energia Potenziale totale***

$$I(u, v) = \frac{1}{2} a(u, u) - l(u)$$

# Metodo di Rayleigh-Ritz

Nel metodo di Rayleigh-Ritz, si cerca una soluzione approssimata nella forma della funzione TRIAL

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0$$

Dove i coefficienti di Ritz  $c_j$  sono tali che il PLV

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \text{ cin. ammissibile}$$

vale per ogni  $v = \phi_i, \quad i = 1, \dots, N$

# Metodo di Rayleigh-Ritz

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0$$

$$v = \phi_i, \quad i = 1, \dots, N$$

**Si arriva ad un sistema di N equazioni linearmente indipendenti nelle incognite  $c_j$**

**Per esempio, la  $i$ -esima equazione ( $i=1, \dots, N$ ) diventa:**

$$a(u_N, \phi_i) = a\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0, \phi_i\right) = l(\phi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

# Metodi variazionali: metodo di Rayleigh-Ritz

Per la linearità degli operatori  $a$  ed  $l$  possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^N a(c_j \phi_j + \phi_0, \phi_i) = l(\phi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^N a(c_j \phi_j, \phi_i) = l(\phi_i) - a(\phi_0, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^N c_j a(\phi_j, \phi_i) = l(\phi_i) - a(\phi_0, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

**In forma compatta**

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} c_j = F_i$$

$$a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j), \quad F_i = l(\phi_i) - a(\phi_0, \phi_i)$$

# Metodi variazionali: metodo di Rayleigh-Ritz

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} c_j = F_i$$

**rappresenta la i-esima equazione algebrica in un sistema di equazioni lineari nelle N costanti  $c_j$**

**Le colonne e le righe della matrice [A] formata dai coefficienti  $a_{ij}$  devono essere linearmente indipendenti affinché il sistema abbia soluzione**

# Metodi variazionali: metodo di Rayleigh-Ritz

**OSS: per funzionali bilineari e simmetrici, il metodo di Rayleigh-Ritz può anche essere visto come il metodo in cui si cerca una soluzione TRIAL  $u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0$  in cui i parametri  $c_j$  sono determinati minimizzando il funzionale EPT**

$$I(u, v) = \frac{1}{2} a(u, u) - l(u)$$

**Ciò significa imporre le N condizioni di stazionarietà di  $I(u, v)$  rispetto ai coefficienti  $c_j$**



# Metodi variazionali: metodo di Rayleigh-Ritz

Osserviamo che l'espressione

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0$$

**consente di soddisfare facilmente le condizioni al contorno essenziali**

**se le  $\phi_j = 0$  al bordo e se**

$$u_N(x_0) = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x_0) + \phi_0(x_0) = 0 + u_0$$

# Metodi variazionali: il metodo dei residui pesati

**E' una generalizzazione del metodo di Rayleigh –Ritz dove le funzioni PESO o TEST possono essere indipendenti dalle funzioni approssimanti TRIAL  $u_N$**

**Può essere usato per approssimare la forma integrale di una qualunque equazione, sia lineare che non-lineare**

**Casi particolari: metodo di Petrov-Galerkin, metodo di Galerkin, metodo dei minimi quadrati, metodo di collocazione**

# Metodi variazionali: il metodo dei residui pesati

Dato un problema del tipo  $A(u) = f$  in  $\Omega$

Dove  $A$  è una funzione qualunque di  $u$  ed  $f$  è nota

Si assuma un campo approssimato del tipo

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0$$

Il metodo si basa sulla soluzione della seguente equazione

$$R = A(u_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad \text{in } \Omega$$

In generale  $A(u_N)$  non coincide con  $f$

***R* si chiama *Residuo* dell'approssimazione**

# Metodi variazionali: il metodo dei residui pesati

Si richiede quindi che si annulli la forma integrale pesata dei residui

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (**)$$

Dove  $\Omega$  e' un dominio 2d e  $\psi_i$  sono le funzioni peso che, in generale, non coincidono con  $\phi_i$ .

Le  $\psi_i$  formano un set di funzioni linearmente indipendenti

OSS: poichè eq. (\*\*) non contiene le condizioni al contorno,

Le funzioni  $\phi_0$  e  $\phi_j$  devono soddisfare tutte le condizioni al contorno del problema, ciò aumenta l'ordine polinomiale delle funzioni approssimanti

# Metodo di Petrov-Galerkin: trial e peso sono diverse

Le funzioni  $\psi_i$  e  $\phi_i$  sono diverse

Se l'operatore  $A$  e' lineare possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^N c_j \left( \int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \right) = \int_{\Omega} \psi_i (f - A(\phi_0)) dx dy$$

ovvero

$$\sum_{j=1}^N c_j A_{ij} = F_i$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \quad \text{A non è simmetrica}$$

$$F_i = \int_{\Omega} \psi_i (f - A(\phi_0)) dx dy$$

# Metodo di Galerkin: funzioni test coincidono con le funzioni trial

Se le funzioni  $\psi_i = \phi_i$

$$\sum_{j=1}^N c_j A_{ij} = F_i$$

**Dove**

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) dx dy \neq A_{ji}$$

**A non simmetrica**

$$F_i = \int_{\Omega} \phi_i (f - A(\phi_0)) dx dy$$

# Osservazioni

*Il metodo di Galerkin si applica a qualunque equazione, indipendentemente dal fatto che tale equazione derivi da un principio variazionale quale il PLV od il principio di minimo della EPT; è infatti sempre possibile moltiplicare un'equazione per una funzione peso ed integrarla sul dominio (forma debole del problema) anche se tale equazione non deriva da un principio variazionale*

*Il metodo di Rayleigh-Ritz si applica invece alla formulazione variazionale di un problema, quale quella che si ottiene previa derivazione per parti e che consente di mettere in evidenza le condizioni al contorno*

*Qualora un'equazione derivi da una formulazione variazionale, I metodi di Rayleigh-Ritz e Galerkin sono equivalenti*

# Metodo dei minimi quadrati

Si determinano I parametri  $c_j$  minimizzando l'integrale del quadrato dei residui

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_{\Omega} R^2(x, y, c_j) dx dy = 0$$

ovvero

$$\int_{\Omega} \frac{R \partial R}{\partial c_i} dx dy = 0$$

Pertanto in questo caso si puo' porre

$$\Psi_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$$

Si perviene a

$$\sum_{j=1}^N c_j A_{ij} = F_i$$

Dove

$$A_{ij} = \int_{\Omega} A(\phi_i) A(\phi_j) dx dy \quad F_i = \int_{\Omega} A(\phi_i) (f - A(\phi_0)) dx dy$$



# Metodo di collocazione

Si richiede che il residuo sia zero in  $N$  punti  $x^i=(x^i, y^i)$  con  $i=1,2,.. N$

$$R(x^i, y^i, c_j) = 0$$

$$\int_{\Omega} \delta(x - x^i) R(x, c_j) dx dy = 0$$

Dove la funzione peso e' la funzione delta di Dirac tale che

$$\int_{\Omega} \delta(x - \xi) f(x) dx dy = f(\xi)$$

## Conclusioni: pro e contro dei metodi variazionali basati sulla costruzione di una forma debole del problema di partenza

- Forniscono un metodo semplificato per determinare soluzioni approssimate
- Costituiscono la base del metodo degli elementi finiti
- Rispetto al metodo degli elementi finiti presentano lo svantaggio di dover costruire funzioni approssimanti che soddisfano le condizioni al contorno per una qualunque geometria: a volte le funzioni trial non esistono, mentre in certi casi la loro scelta non è unica
- Non si prestano alla implementazione di codici numerici *general purpose*, al contrario del metodo degli elementi finiti

# Vantaggi del metodo EF

**Nell'esempio illustrato si sono definite funzioni approssimanti sull'intero dominio del problema. E' evidente però che per problemi con geometria complessa non e' pensabile definire funzioni approssimanti in grado di coprire l'intero dominio.**

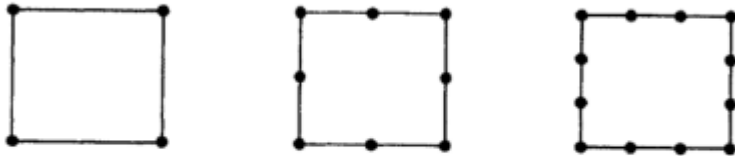
**Pertanto si procede a una suddivisione del dominio in sottodomini con intersezione nulla (anche se questa condizione può essere rilassata per particolari tipi di approssimazione), che sono gli elementi finiti.**

# Vantaggi del metodo EF

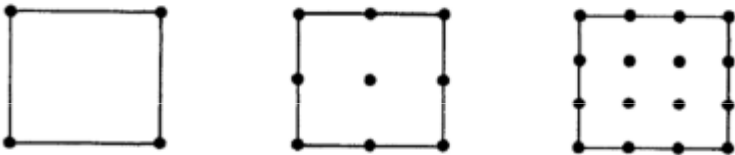
- La suddivisione in sottodomini e' una parte molto importante del metodo. Attualmente esistono programmi che sono in grado di creare una suddivisione del dominio in elementi finiti a partire da un modello solido, definito mediante superfici esterne ed interne, spigoli e vertici (rappresentazione del contorno, o boundary representation).
- In genere, gli elementi finiti sono figure geometriche semplici (segmenti nel monodimensionale, triangoli o quadrilateri nel piano, tetraedri o esaedri nello spazio). La topologia e' definita mediante punti speciali detti nodi, che acquisiscono un significato fondamentale nel metodo.

# Elementi finiti piani

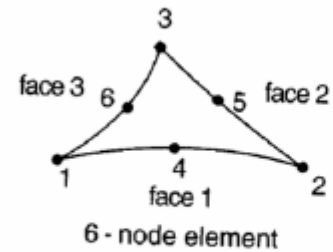
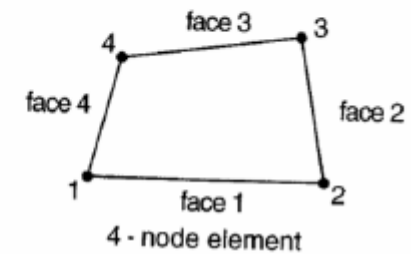
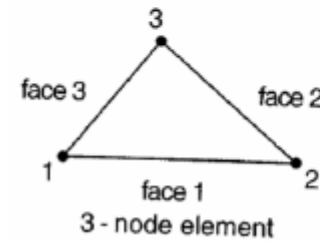
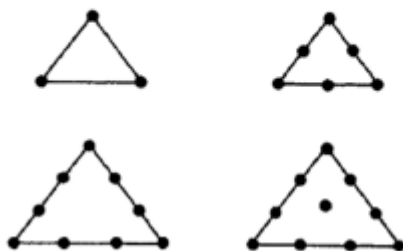
Serendipity family of quadrilateral elements



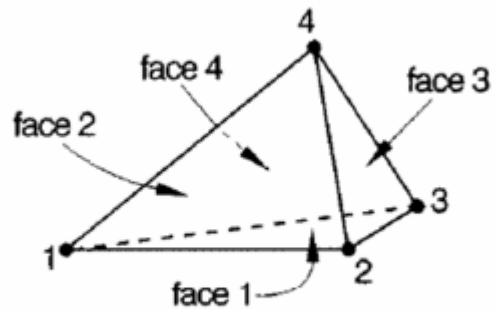
Lagrange family of quadrilateral elements



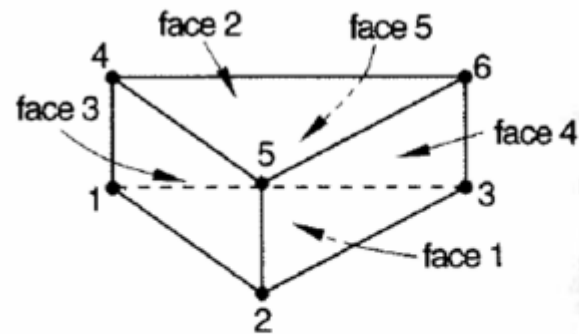
Standard triangular elements



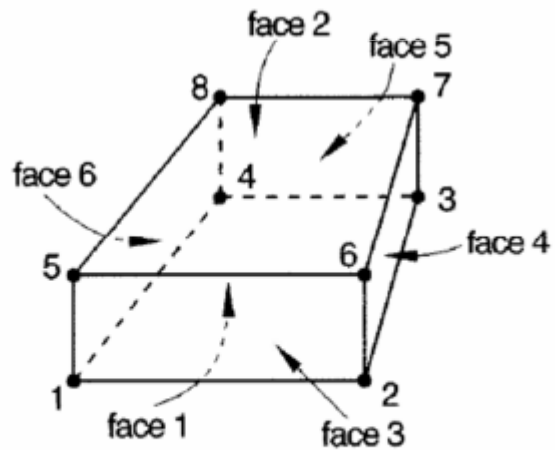
# Elementi finiti nello spazio



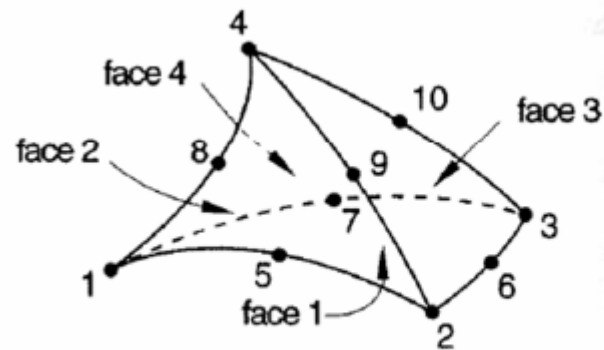
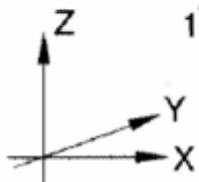
4 - node element



6 - node element



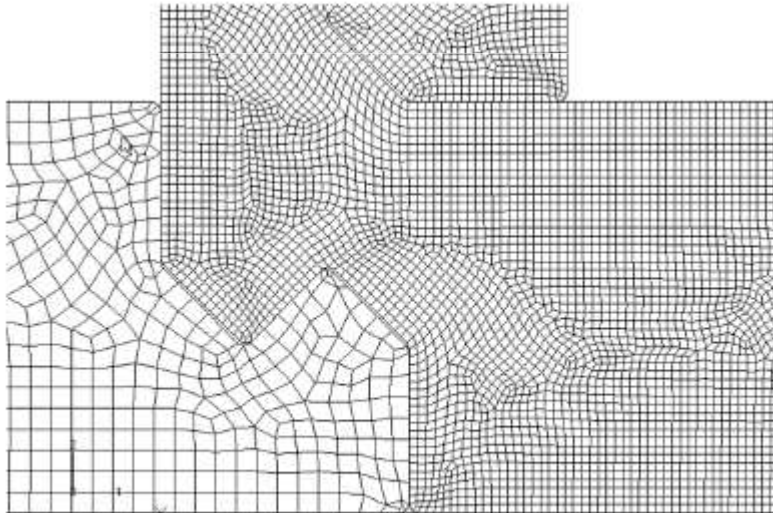
8 - node element



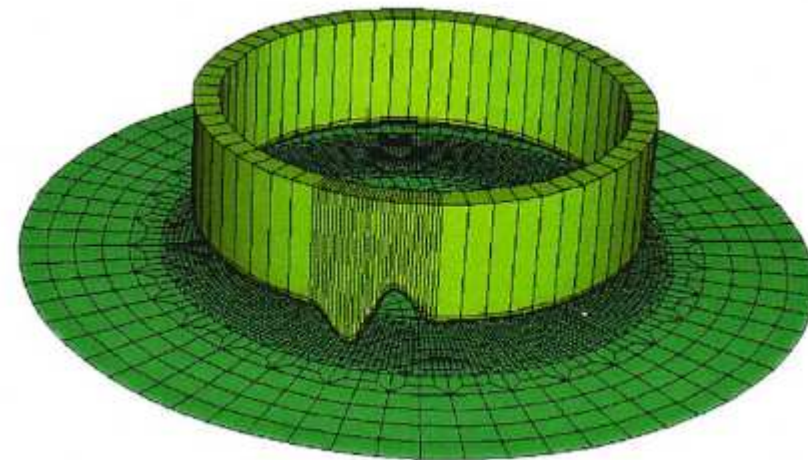
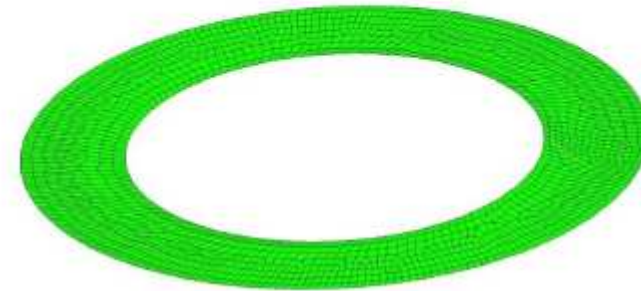
10 - node element

# Esempi di mesh

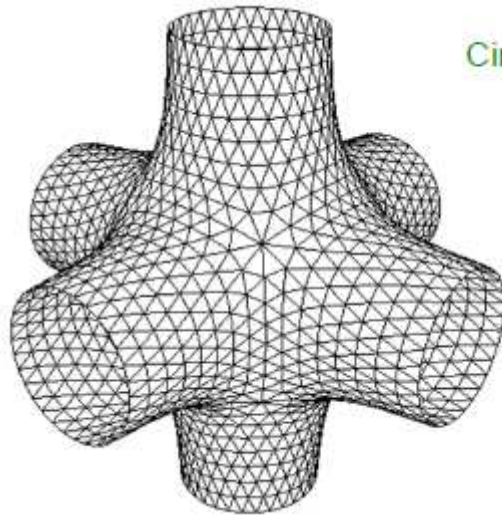
- La discretizzazione consiste in una **suddivisione del dominio in sottodomini**, che formano un **reticolo o mesh**. La discretizzazione e' in genere definita da una **lunghezza caratteristica  $h$**  (mesh size), che puo' essere diversa in diverse parti del dominio.



(Cortesia di Attilio Frangi)

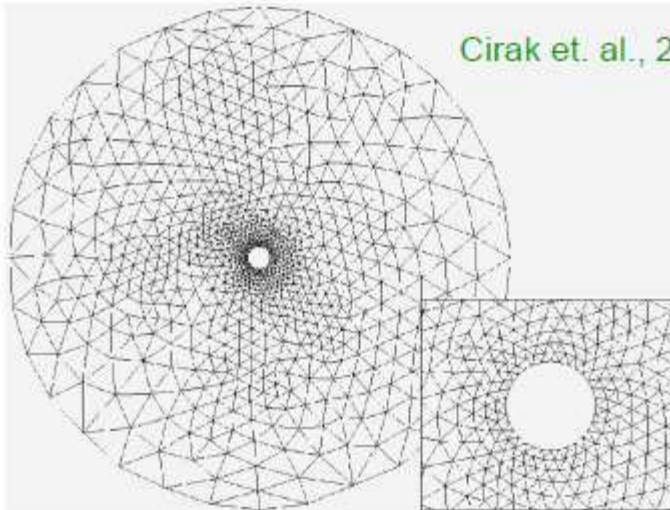


# Esempi di mesh

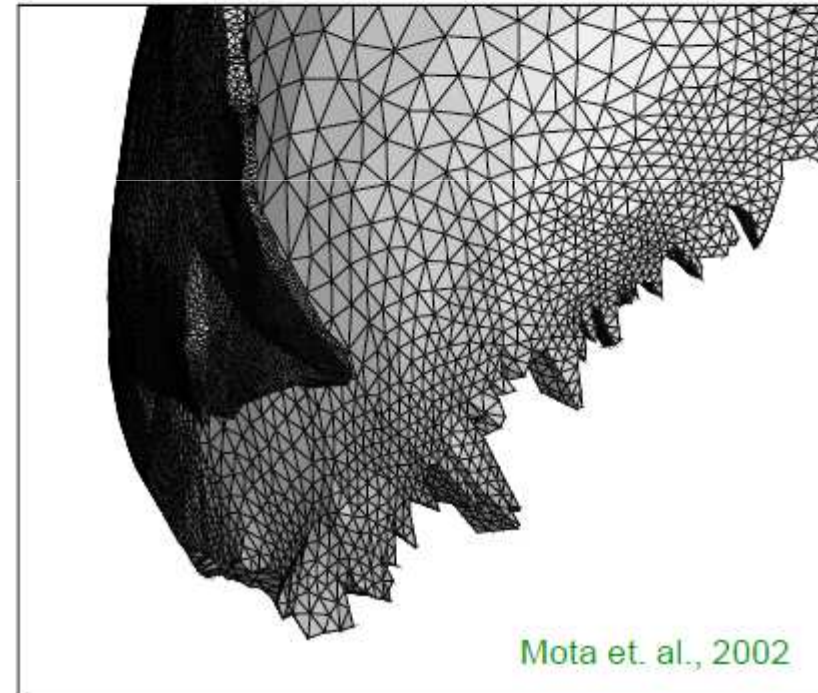


Cirak et. al., 2000

La mesh puo' essere resa **piu' o meno fitta** a secondo della necessita' di descrivere **dettagli geometrici** o per particolari necessita' dettate dal problema fisico (presenza di **alti gradienti** della variabile da valutare).



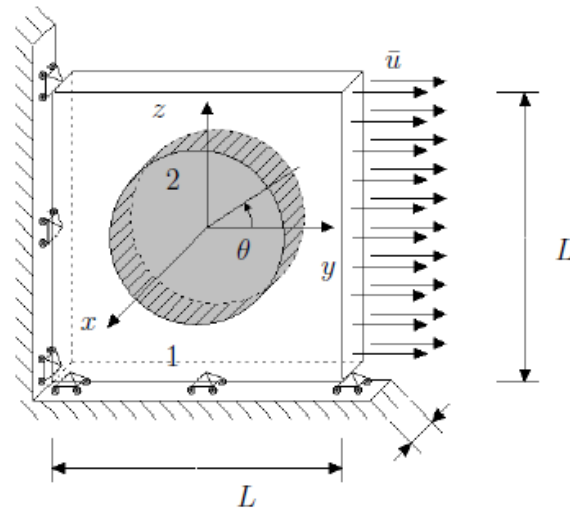
Cirak et. al., 2004



Mota et. al., 2002



# Esempi di mesh



**Benvenuti, Ventura,  
Ponara, Tralli 2013**

Figure 9: Example 2: Geometry

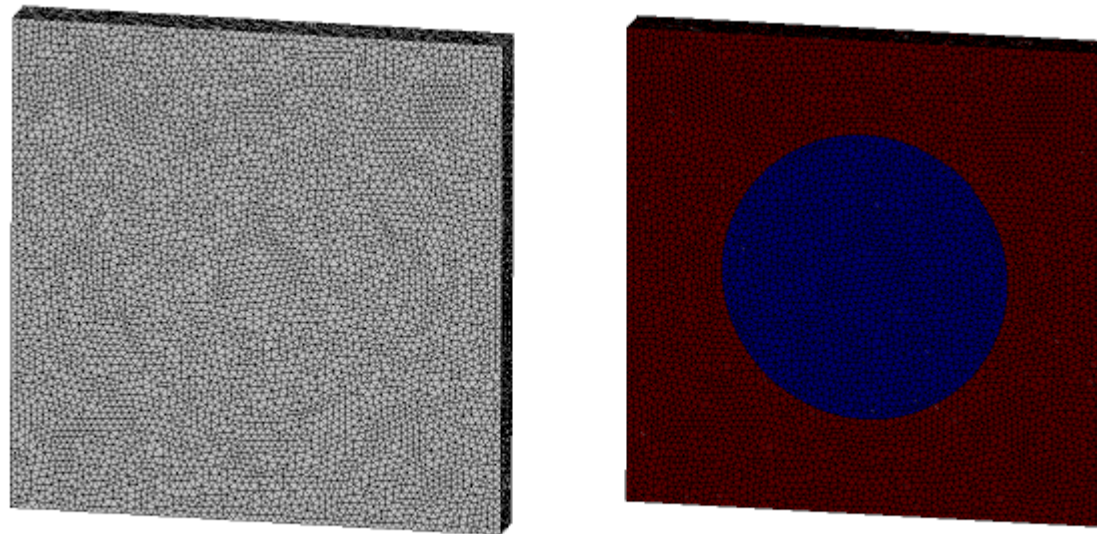
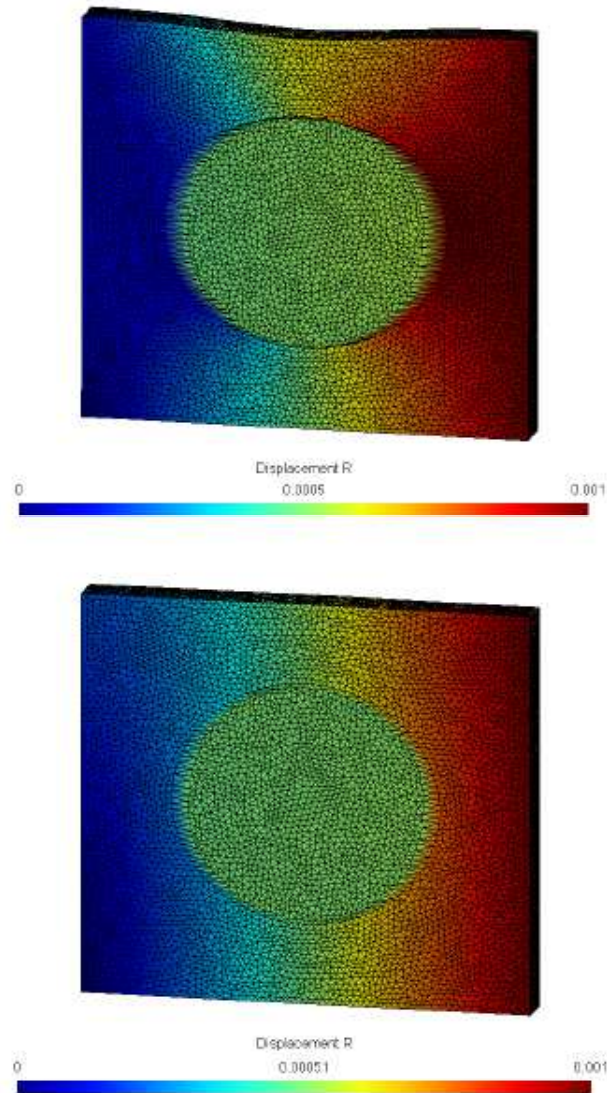


Figure 10: Example 2: mesh and materials

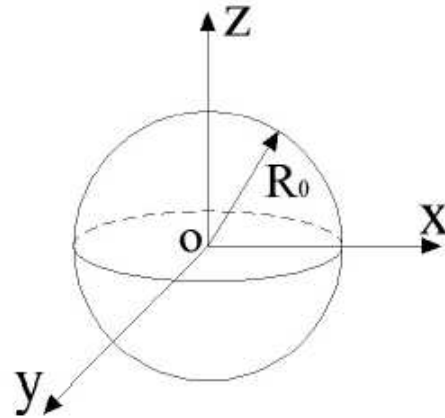
# Esempi di mesh



**Benvenuti, Ventura,  
Ponara, Tralli 2013**

Figure 12: Example 2: deformed shape of the soft (a) and stiff (b) inclusion

# Esempi di mesh



**Benvenuti, Ventura,  
Ponara, Tralli 2013**

Figure 15: Example 3: spherical inclusion

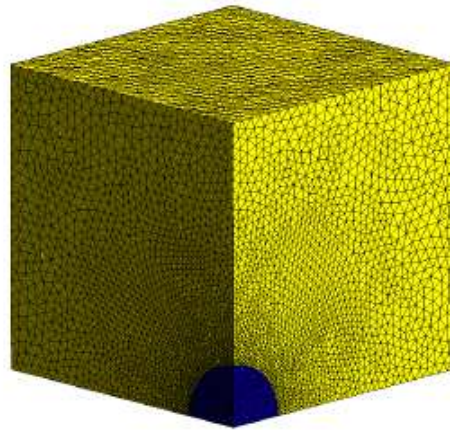
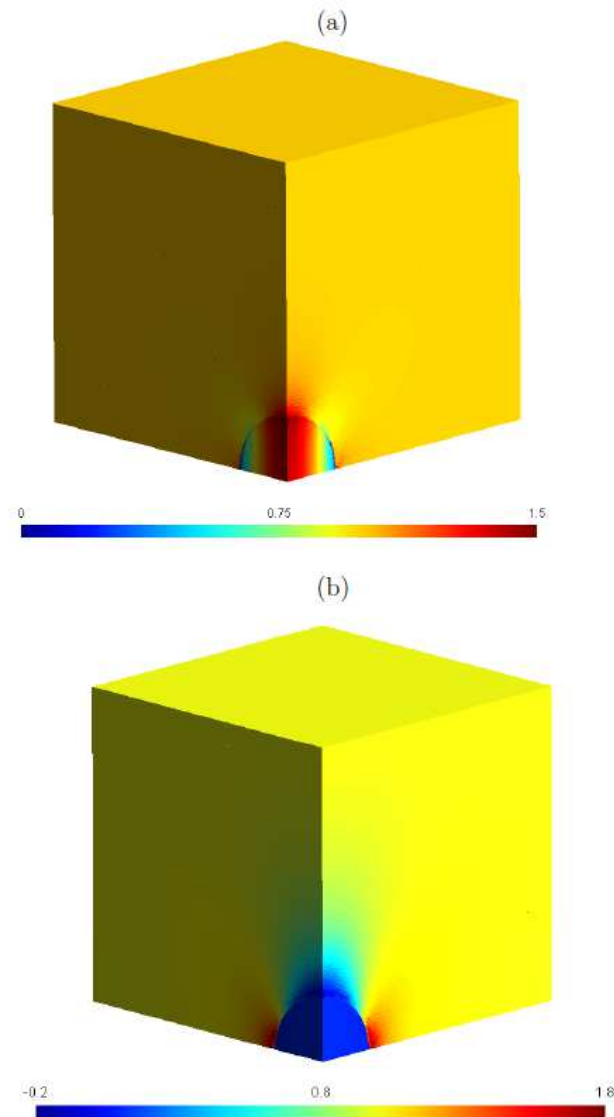


Figure 16: Example 3: mesh of the domain

# Esempi di mesh



**Benvenuti, Ventura,  
Ponara, Tralli 2013**

Figure 19: Example 3: contour plots of the stress  $\sigma_{zz}$  for the cases of soft (b) and stiff (a) interfaces.

# Integrazione numerica

Per esempio, si consideri l'integrale

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Si approssimi la funzione integranda attraverso un polinomio del tipo:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^N f_i \psi_i(x) \quad (2)$$

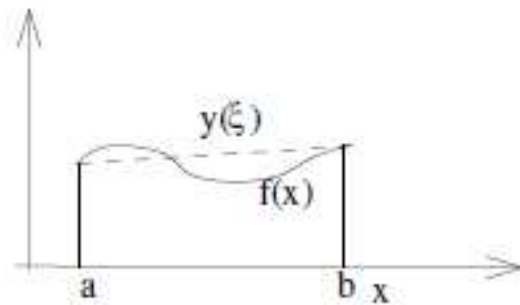
dove  $f_i$  indica il valore di  $f(x)$  al punto  $i$ -esimo dell'intervallo  $[a, b]$  e  $\psi_i(x)$  rappresenta l' $i$ -esimo polinomio di ordine  $i$  con  $i = 1, N$ .

# Integrazione numerica

## Metodo del trapezio (retta)

Se si prende una interpolazione lineare tra  $a$  e  $b$  si ottiene la regola del trapezio. In tal caso

$\psi_1 = \frac{b-x}{h}$ ,  $\psi_2 = \frac{x-a}{h}$ ,  $f_1 = f(a)$ ,  $f_2 = f(b)$ , dove  $h = b - a$

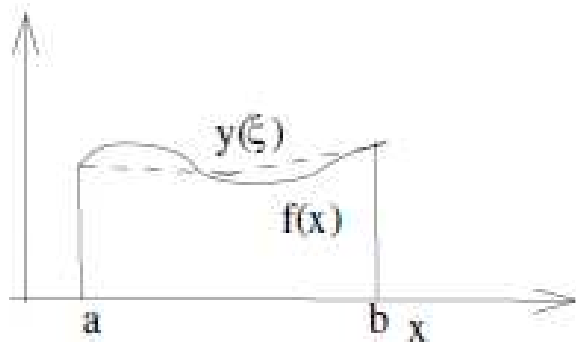


$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}h(f_1 + f_2)$$

# Integrazione numerica

## Metodo di Cavalieri-Simpson (parabola)

Se si utilizza un'approssimazione quadratica, si hanno 3 funzioni cubiche di integrazione (parabole) e  $f_1 = f(a)$ ,  $f_2 = f(a + \frac{h}{2})$ ,  $f_3 = f(b)$



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{6} (f_1 + f_3 + 4f_2)$$

# Integrazione numerica

In generale, una formula di integrazione numerica è del tipo

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^r f(x_i)w_i \quad (3)$$

dove  $x_i$  sono i punti di quadratura e  $w_i$  sono i pesi di quadratura. Queste formule sono esatte nel caso in cui  $f(x)$  sia un polinomio di ordine  $r - 1$ . I metodi di quadratura più usati sono:

- il metodo di Newton-Cotes, dove i punti di integrazione sono equispaziati
- il metodo di Gauss-Legendre, dove i punti di integrazione non sono equispaziati



## Cambio di variabile

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(g(\zeta)) \frac{d(g(\zeta))}{d\zeta} d\zeta \text{ dove } x = g(\zeta).$$

Coordinate naturali

La formula di Gauss-Legendre è la più usata, richiede l'uso delle coordinate naturali. La formula di G-L richiede di trasformare l'integrale tra  $a$  e  $b$  nell'integrale tra gli estremi adimensionali  $-1$  e  $1$ . Pertanto, occorre operare la trasformazione di coordinate

$$x = \alpha\xi + \beta \quad (4)$$

dove  $\xi \in [-1, 1]$  e le costanti  $\alpha, \beta$  si ricavano ponendo:

$\xi = -1$  quando  $x = a$ ,  $\xi = 1$  quando  $x = b$ , ovvero

$a = -\alpha + \beta$  e  $b = \alpha + \beta$ , da cui

$$\beta = \frac{a+b}{2} \text{ e } \alpha = \frac{b-a}{2},$$

che sostituiti sopra danno

$$x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{a+b}{2} \quad (5)$$

OSS: lo jacobiano della trasformazione  $J = \frac{b-a}{2}$

# Metodo di Gauss

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(\xi) J_\xi d\xi \approx J_\xi \sum_{g=1}^{ng} w_g f(\xi_g)$$

$w_g$ : pesi del polinomio approssimante

$\xi_g$ : coordinate dei punti di campionamento (punti di Gauss)

punti di campionamento sono gli zeri dei polinomi di Legendre

un polinomio di grado  $p$  e' integrato esattamente con  $(p + 1)/2$  punti di Gauss

$ng = 1, g = 1, w_g = 2, \xi_g = 0$

$ng = 2, g = 1, 2, w_g = 1, \xi_g = \pm 0.57735$

$ng = 3, g = 1, 2, w_g = 0.8; 0.5, \xi_g = 0, \pm 0.7745966$

l'approssimazione della matrice di rigidezza avviene per difetto  $\rightarrow$  a favore di sicurezza

# Integrazione numerica col metodo di Gauss in 2D

In 2D:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) dx \approx J_\xi J_\zeta \sum_{g=1}^{ng} \sum_{h=1}^{nh} f(\xi_g, \zeta_h) w_g w_h \quad (6)$$