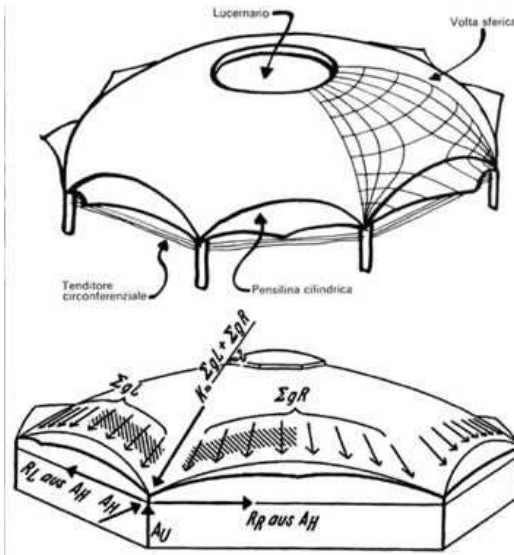
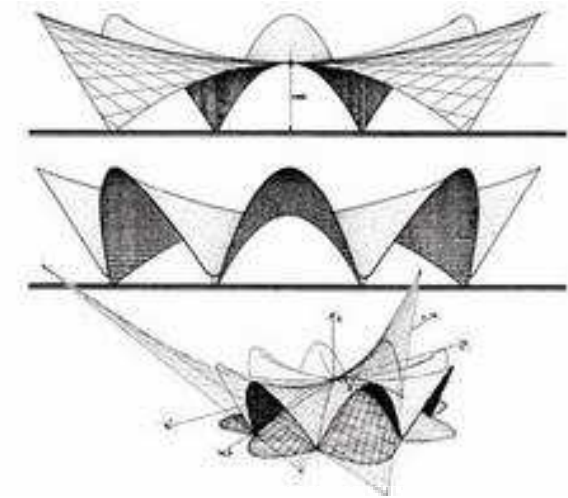
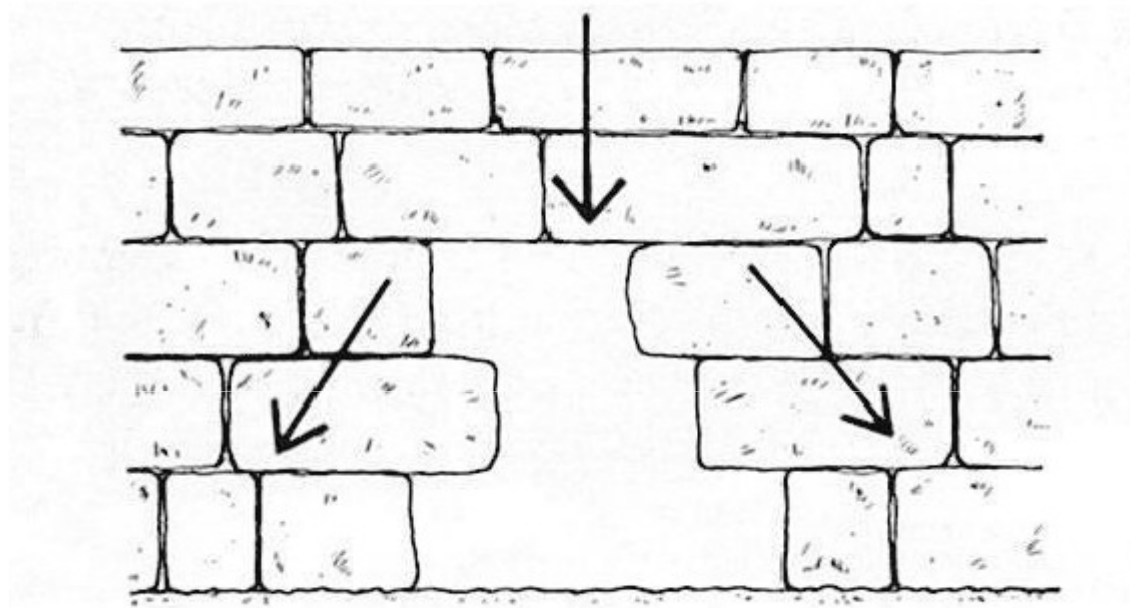


Strutture resistenti per forma

Arco
Fune
Volta
Cupola



Arco



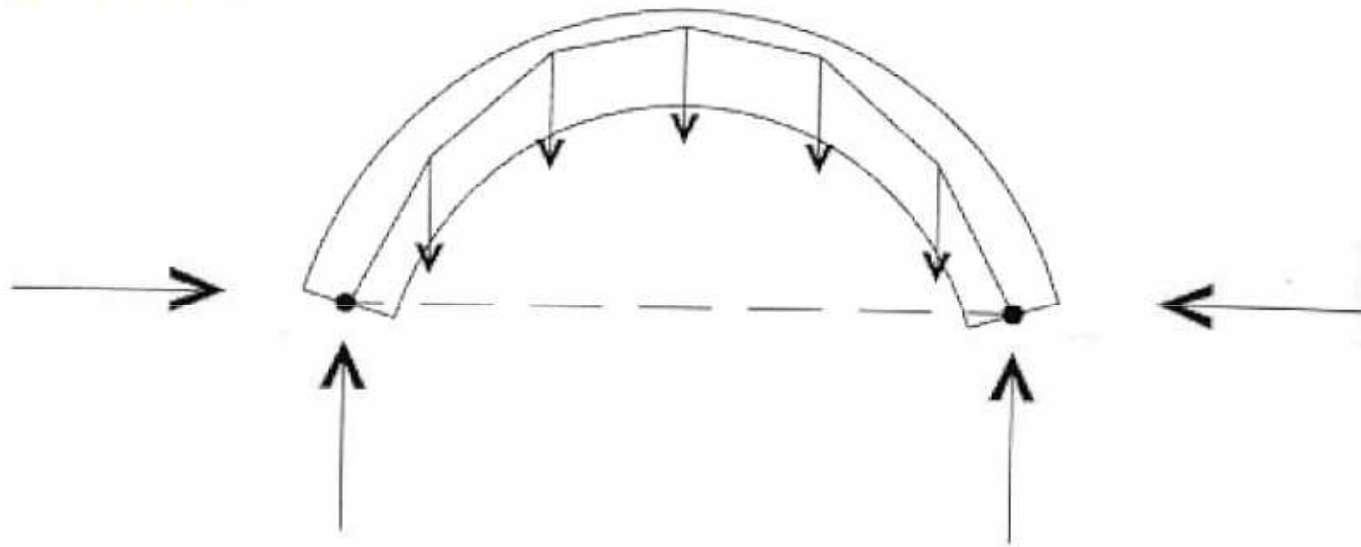
La sollecitazione di compressione rappresenta praticamente l'unica sollecitazione cui la pietra e la muratura sono in grado di resistere.

Arco

Curva di pressione o
"funicolare"

Reazione
verticale

Reazione
orizzontale



8/75

L'arco è un elemento strutturale in grado di incanalare, con la sua traiettoria curvilinea, le sollecitazioni prodotte dai carichi trasformandole in forze prevalenti di compressione.

Funi

Cavi di trasmissione

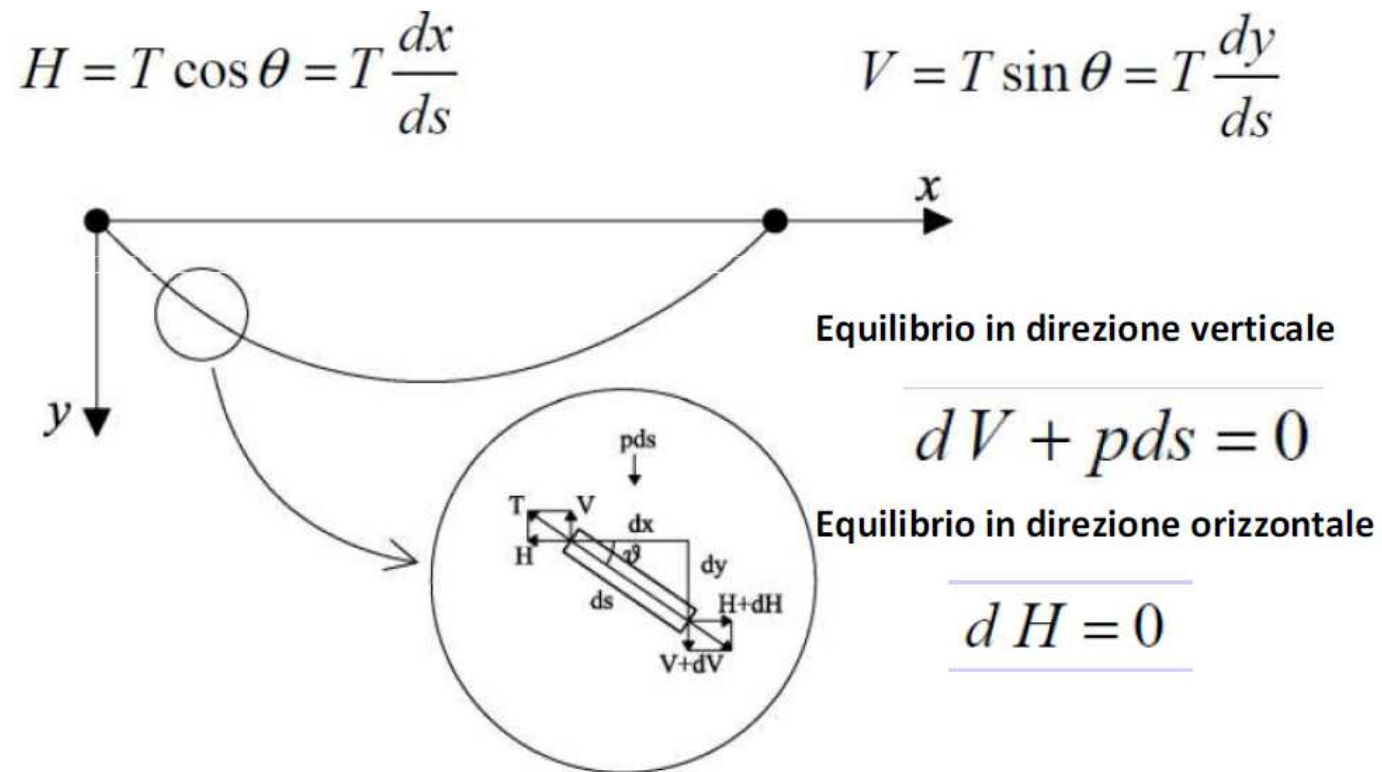


ponti sospesi



Strutture soggette solo a sforzo normale (trazione)

funi



Strutture soggette solo a sforzo normale (trazione)

Volte

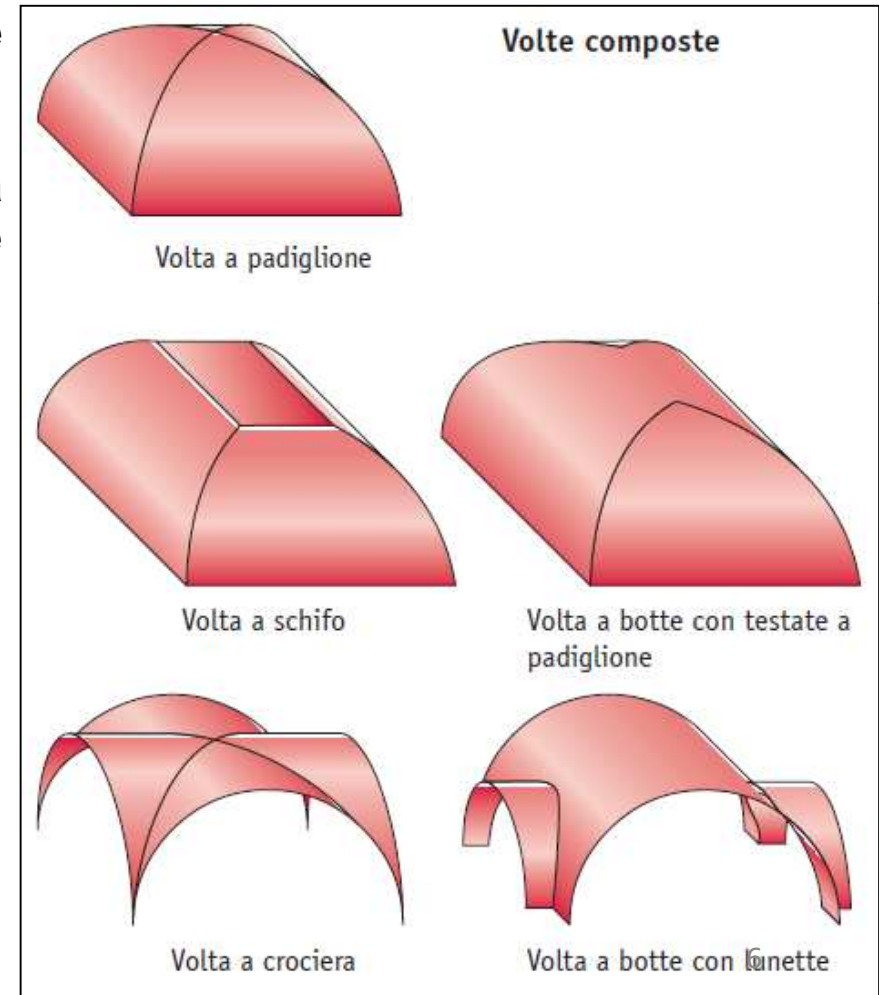
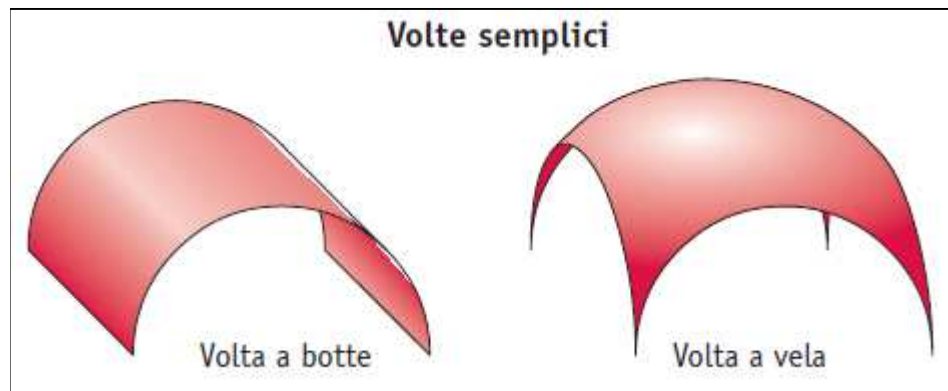
Le volte fiorirono in età romana come naturale derivazione dell'arco; mentre quest'ultimo era destinato a delimitare aperture nei muri, le volte consentivano la copertura degli ambienti.

La loro realizzazione era basata sulla tecnica costruttiva delle murature in calcestruzzo, cioè mattoni o blocchi di pietra assemblati con un legante a base di calce.

La qualità del calcestruzzo era garanzia della solidità delle volte, che gradualmente conquistarono leggerezza e dimensioni sempre maggiori.

Le tipologie classiche sono distinte in *volte semplici* e *volte composte*.

Copyright © 2010 Zanichelli Editore SpA, Bologna [6237]



Volte, cupole...



Volte a botte nella Basilica di Massenzio a Roma (313 d.C.).

Volte, cupole...



Volte a vela nel Palazzo della Ragione a Milano (1316).

Volte



Volta a crociera nella basilica di S. Ambrogio a Milano (XI sec.).



Volta a botte con lunette nella Cappella Sistina a Roma (1480).



Volte con nervature nella Abbazia di Westminster a Londra (1512).

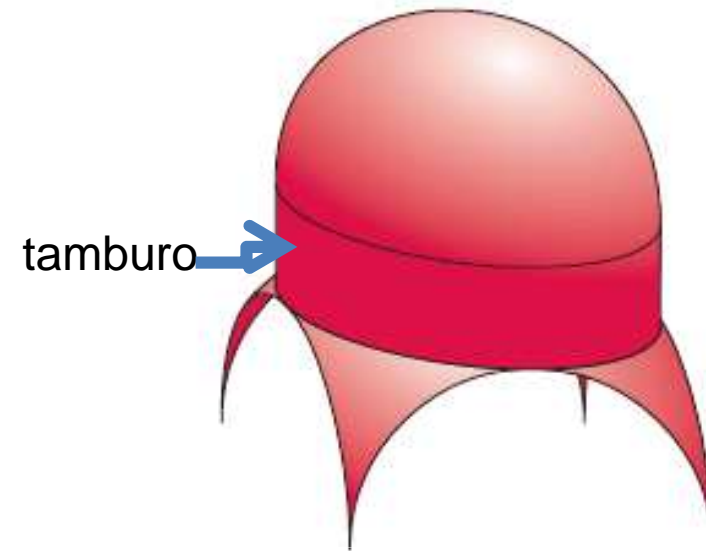
Cupole

Le cupole sono in genere caratterizzate da una simmetria centrale o dalla rotazione di un profilo intorno a un asse verticale. L'esempio più semplice è costituito da una calotta emisferica.

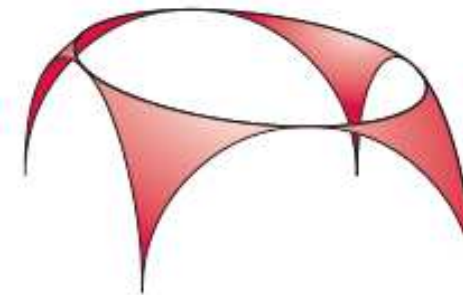
Spesso le cupole poggiano su un **tamburo** di forma prismatica o cilindrica, che poggia sulle strutture di base.

Il tamburo, oltre a dare maggiore visibilità e dignità a una cupola più alta, serve anche all'apertura di finestre che illuminano l'ambiente sottostante.

Per raccordare una base quadrata con un tamburo ottagonale vengono inseriti dei **pennacchi**, che possono avere forma sferica, conica oppure più complessa.



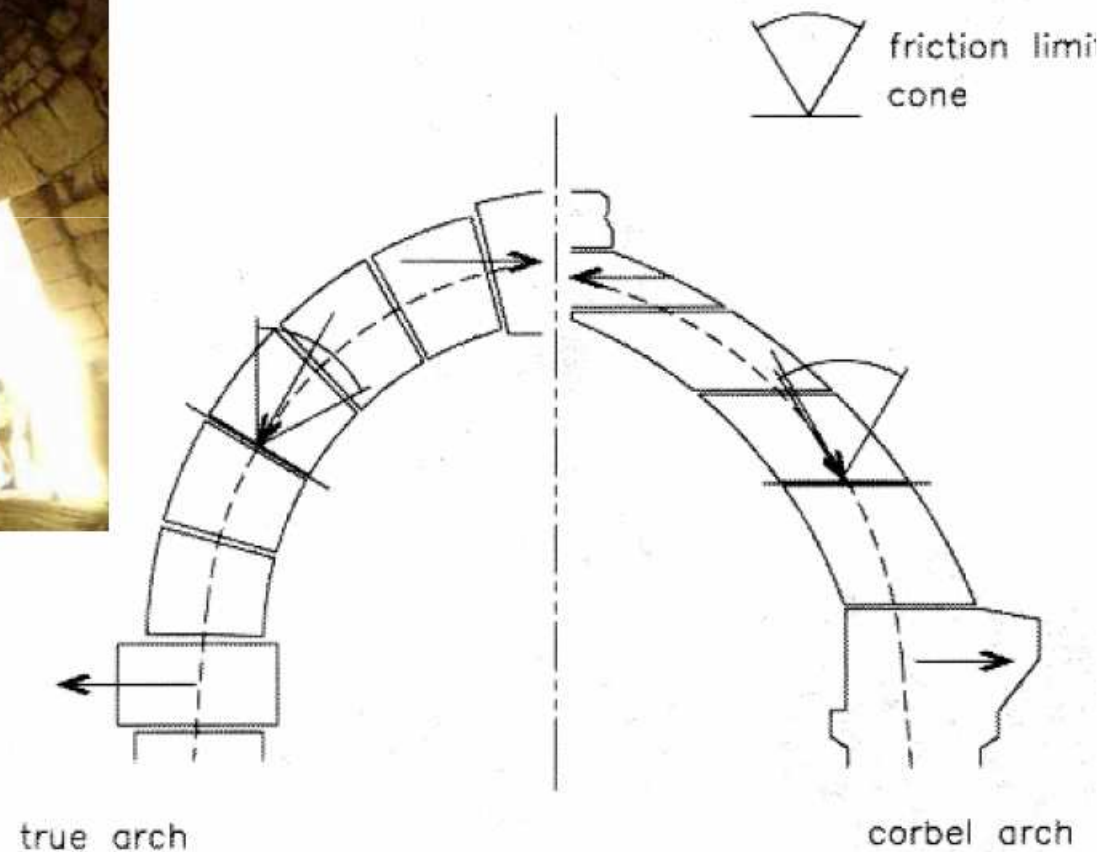
Cupola emisferica
su tamburo cilindrico
poggiante su pennacchi sferici



Pennacchi sferici
originati dalla
sezione di una volta a vela

Cupole

La prima cupola della storia:
La stanza del tesoro a Micene (XIV s. a.C.)



Cupole...

Sulla sommità (cervello) della cupola si apre molto spesso una lanterna, che fornisce un punto d'illuminazione centrale e crea un elemento decorativo terminale alla superficie esterna. Altri punti d'illuminazione possono essere inseriti nella stessa superficie della cupola mediante aperture denominate *occhi*.

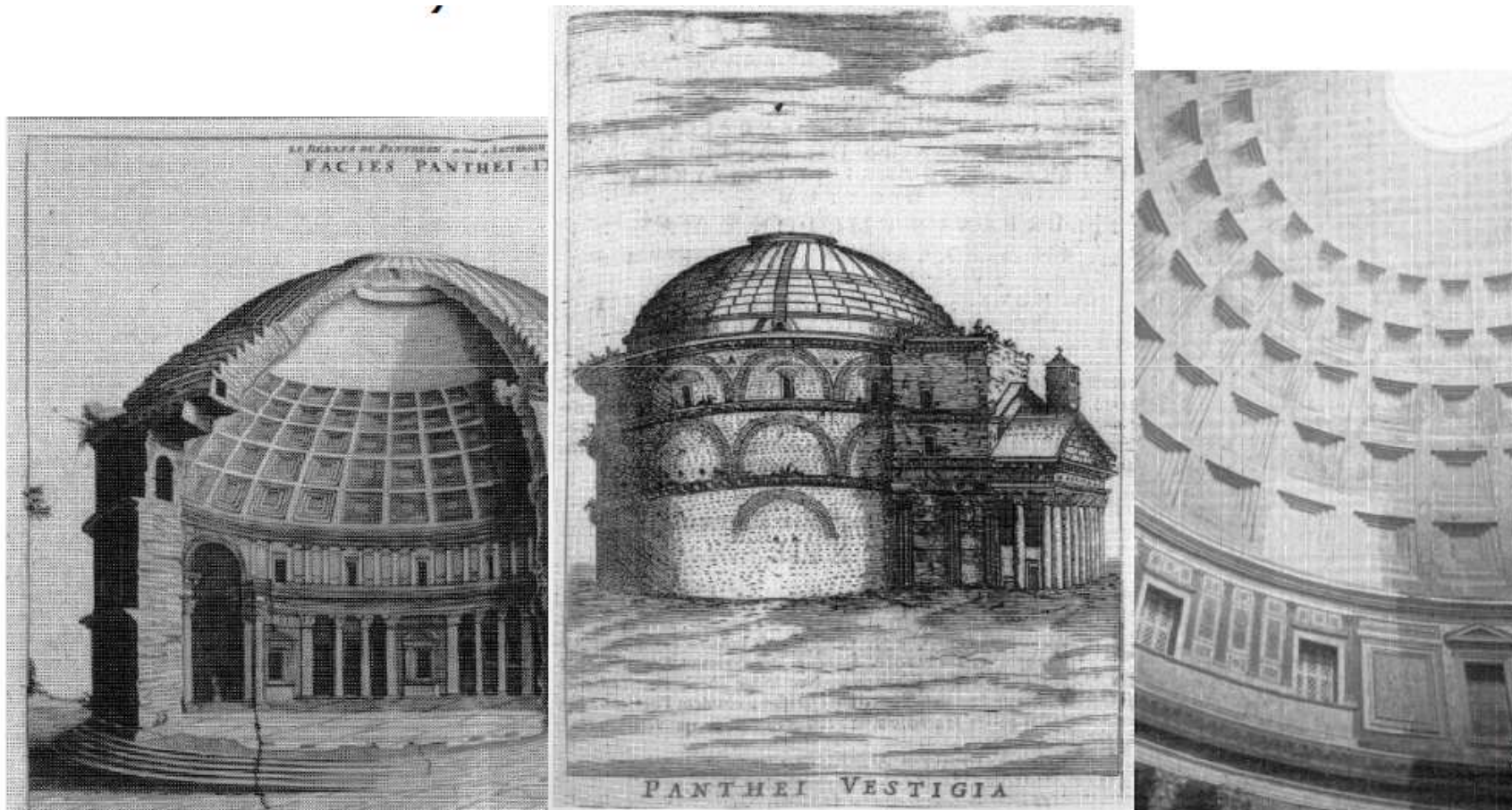


Mole Antonelliana a Torino, di Alessandro Antonelli (1863-1900).



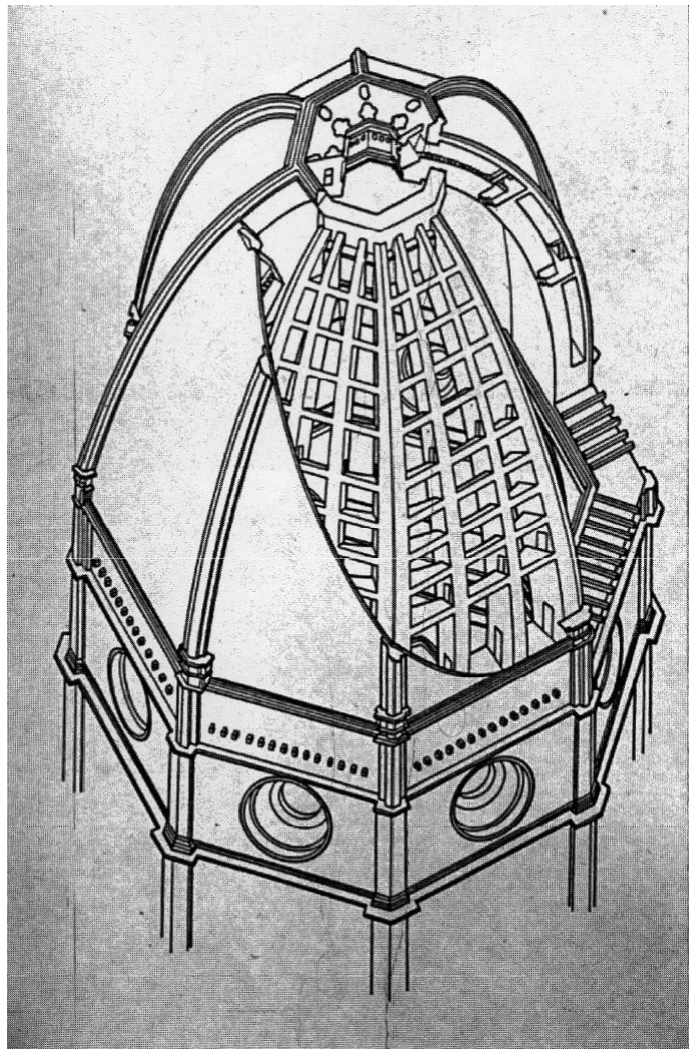
Cupola di S. Maria di Loreto, a Roma, di Antonio da Sangallo il Giovane (1501).

Cupole



Pantheon, Roma, opus cementitium

Cupole



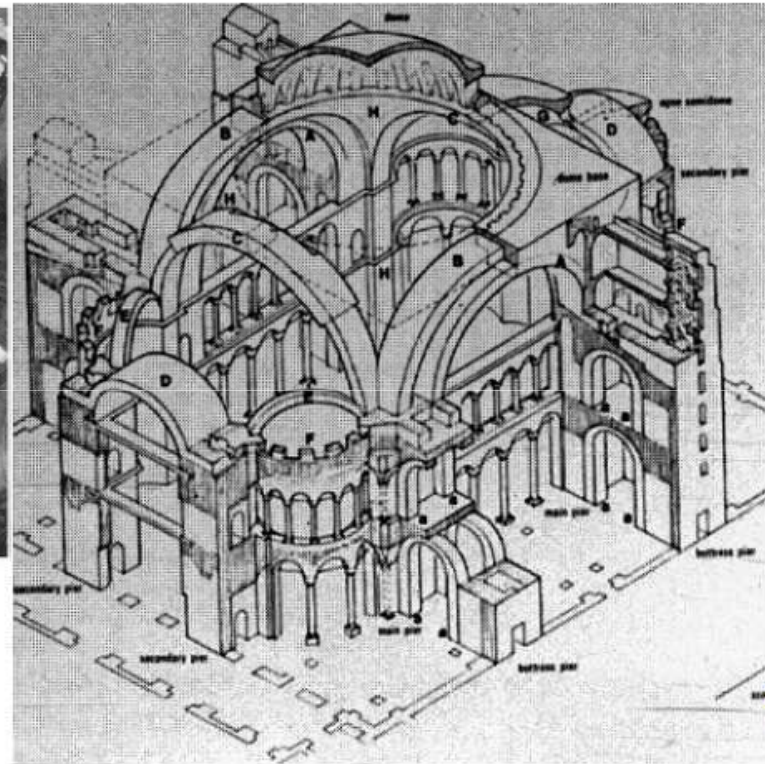
Santa Maria del Fiore, Firenze, schema misto

Cupole...



Santa Sofia, Istanbul, VI sec d.C.

Cupole...



Santa Sofia, Istanbul, VI sec d.C.

Cupole...



San Pietro, Roma

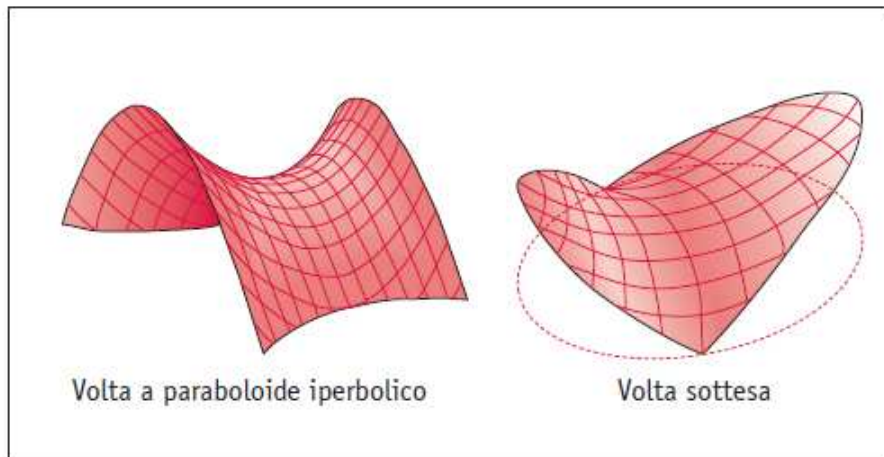
Volte e cupole contemporanee

Con la tecnologia del cemento armato si possono coprire luci molto estese

Le grandi costruzioni sportive, congressuali o aeroportuali hanno fornito campi di prova per la sperimentazione di volte e cupole avanzate



Franklin Halle a Berlino di H. A. Stubbins (1957).



Città delle Scienze edelle Arti a Valencia, di Santiago Calatrava (2002).

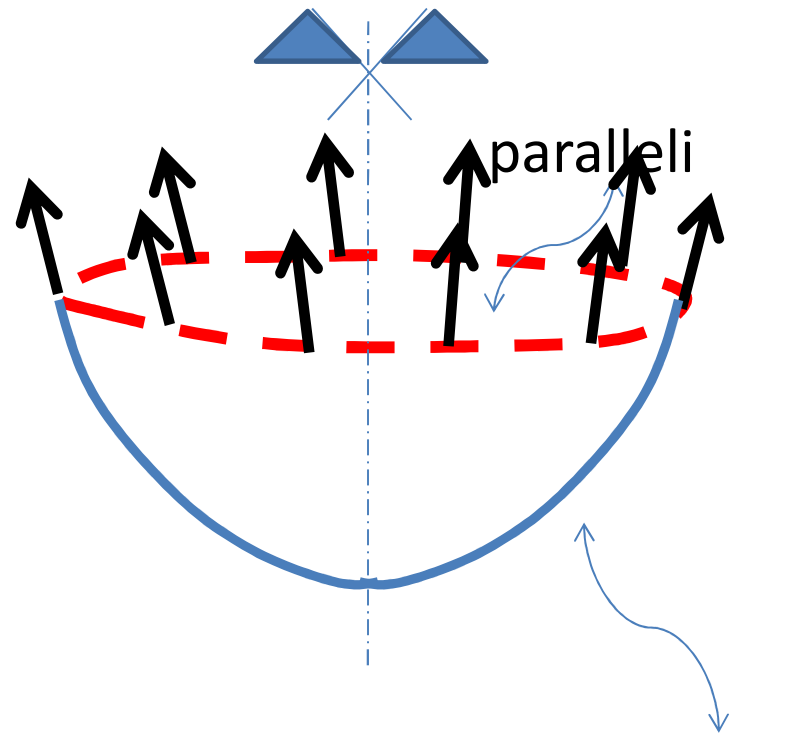
Membrane curve

Belluzzi III pag 240

- 1) Per l'esiguità dello spessore rispetto alle altre dimensioni si possono trascurare le rigidzze flessionali e torsionali, le tensioni tangenziali si annullano, le tensioni si suppongono costanti nello spessore (come nelle funi)**
- 2) Le deformazioni elastiche non hanno una sensibile influenza sugli sforzi per cui possono essere considerate inestensibili (come nelle funi)**
- 3) Gli sforzi possono essere calcolati sulla base delle sole equazioni di equilibrio (come nelle funi)**
- 4) A differenza delle funi, la loro configurazione di equilibrio non dipende dal carico**

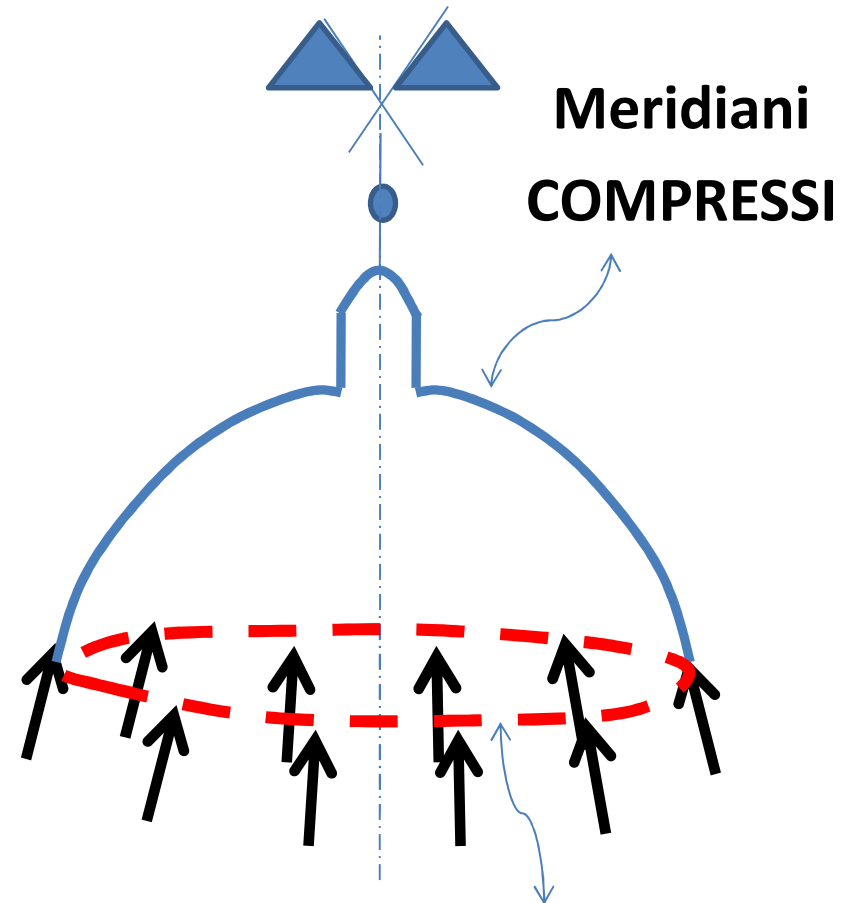
Membrane di rivoluzione

Belluzzi III pag 240



Serbatoi appesi, silos
Di solito mat. metallici
Raramente C.A.

**Meridiani
TESI**



VOLTE
Muratura, C.A.
Raramente materiali metallici

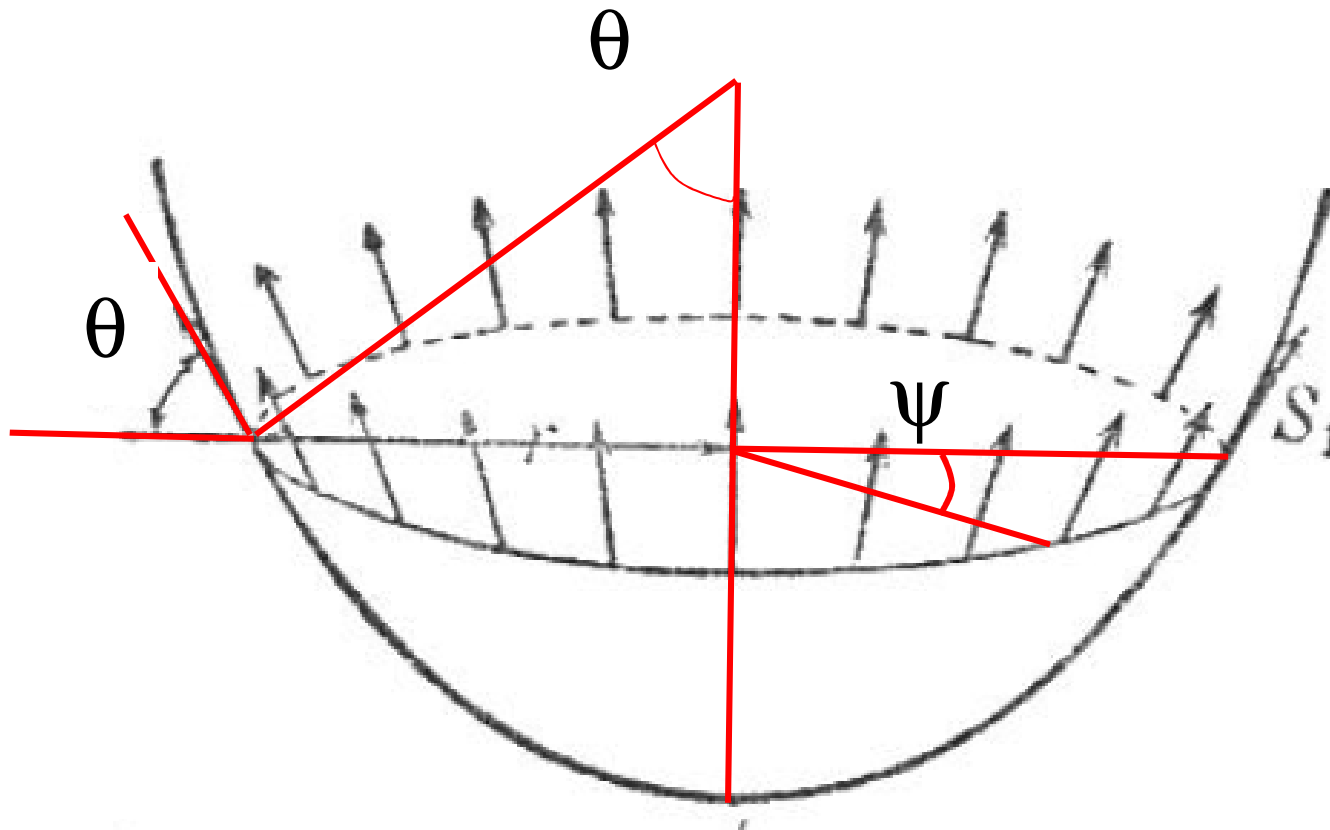
**Meridiani
COMPRESSI**

paralleli

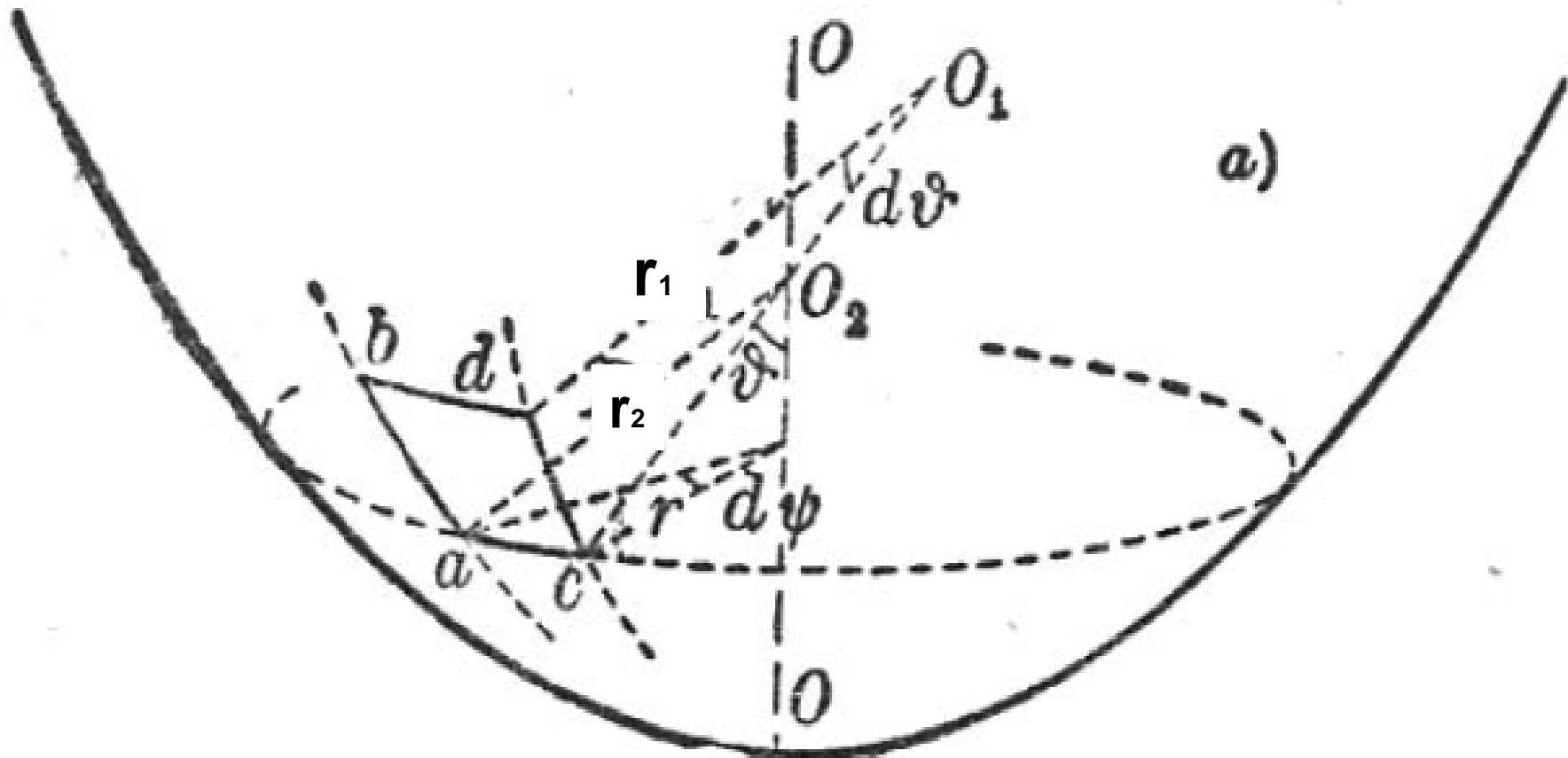
Membrane curve

θ colatitude: angolo che il piano tangente forma con il piano orizzontale

ψ longitude



Membrane di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico



Sezioni principali della superficie media della membrana nell'intorno considerato:

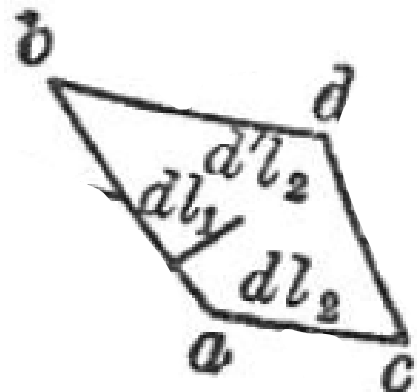
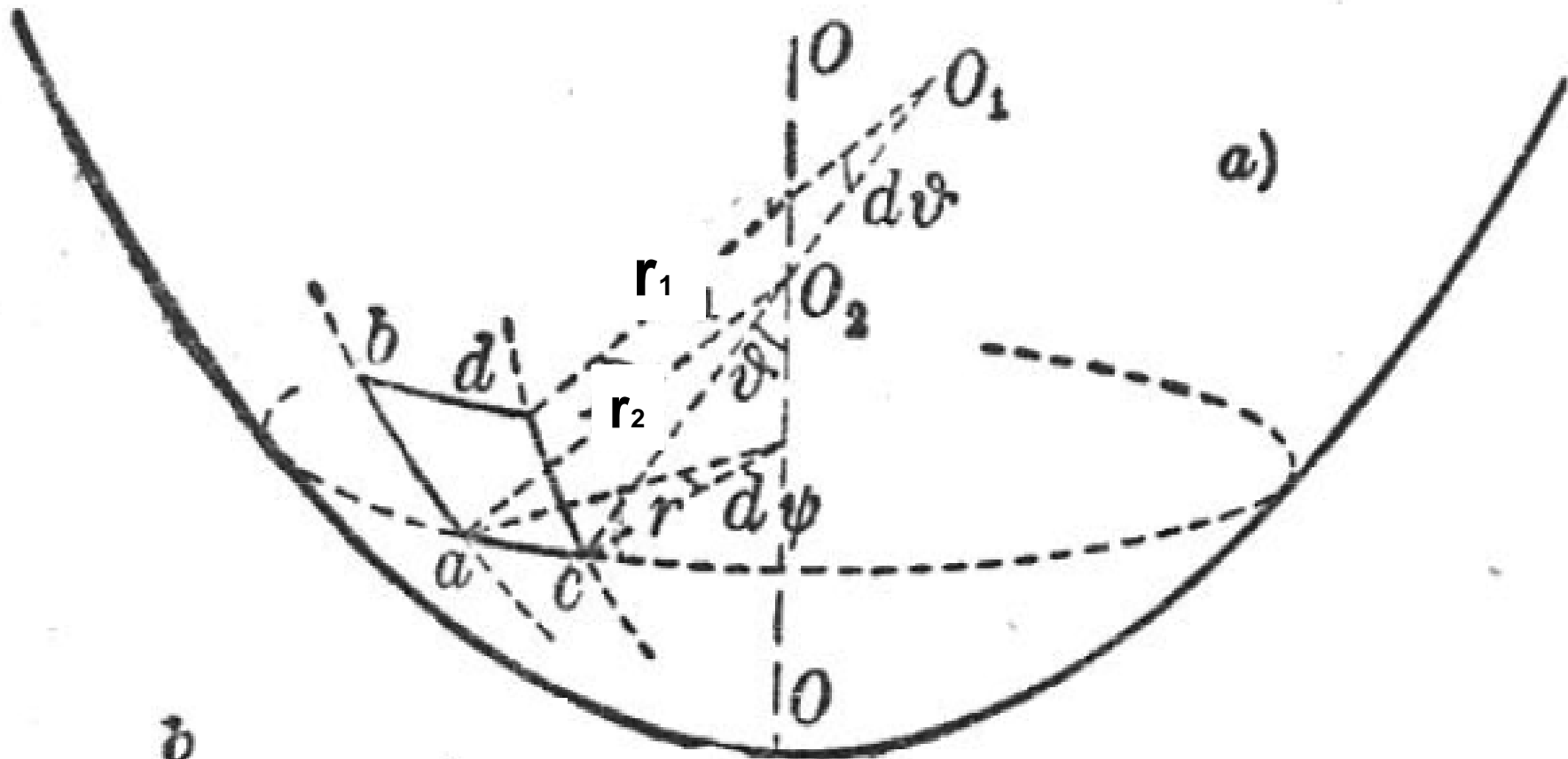
La sezione meridiana ha centro di curvatura O_1 oltre l'asse OO o prima di esso a seconda che la curvatura cali o cresca a partire dal vertice

La sezione normale al meridiano con centro di curvatura O_2 su OO

r_1 ed r_2 sono i loro raggi di curvatura

$1/r_1$ ed $1/r_2$ sono le loro curvatures

Membrane di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico



$$dl_1 = r_1 d\theta$$

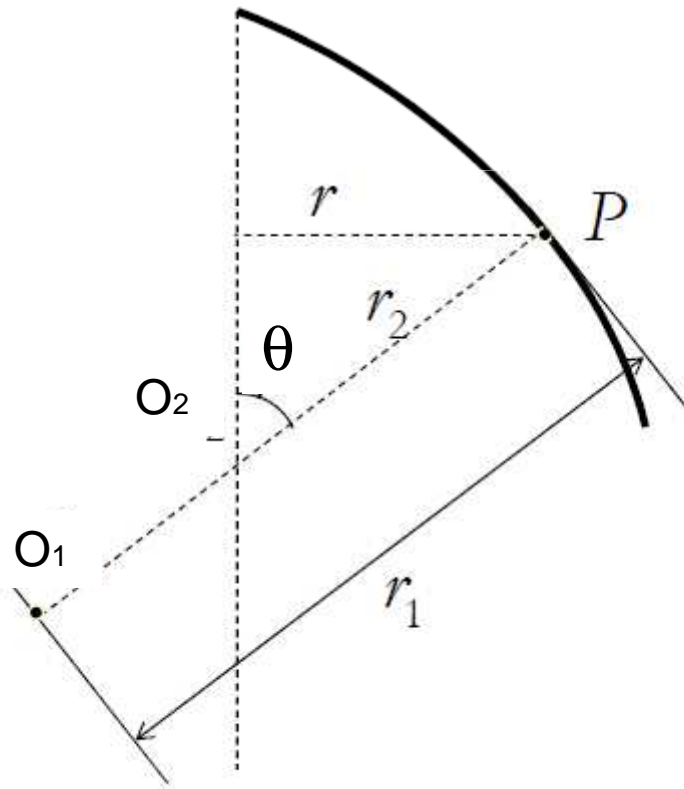
$$dl_2 = r d\psi \cong r_2 \sin \theta d\psi$$

Membrane curve

Consideriamo un raggio r del parallelo nel generico punto P e sia

$$r_1 = \overline{PC_1}$$

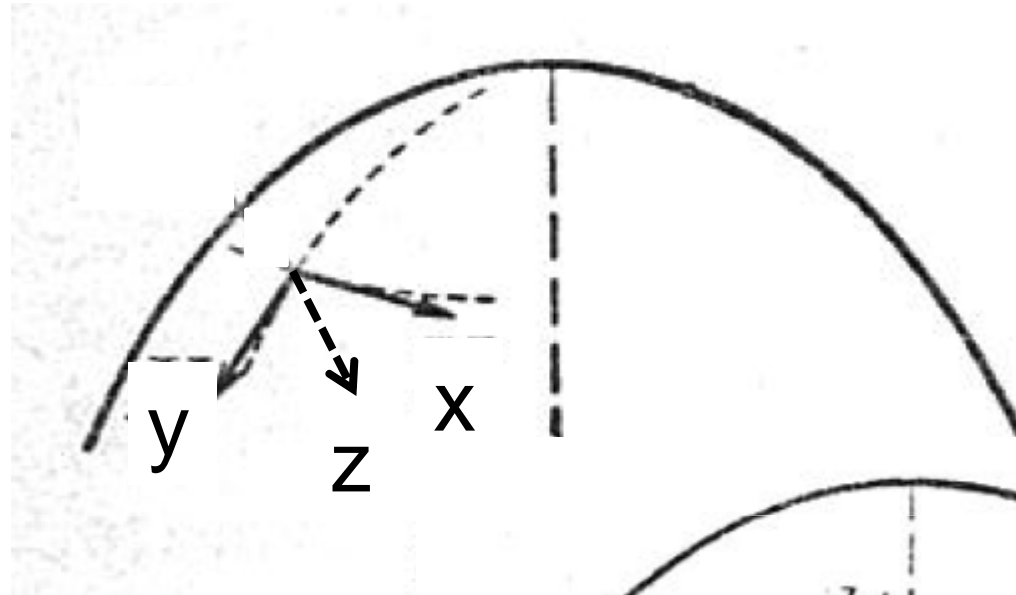
il raggio di curvatura del meridiano che per ragioni di simmetria è uno dei due raggi di curvatura principali in P



Il secondo raggio di curvatura principale ovvero il raggio di curvatura della sezione normale al meridiano vale:

$$r_2 = \frac{r}{\sin \theta}$$

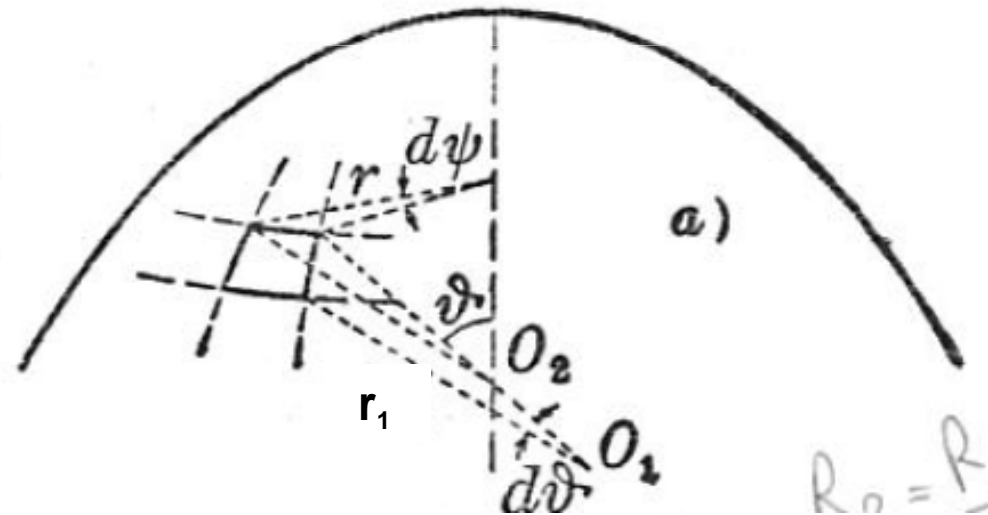
Risultanti dei carichi agenti



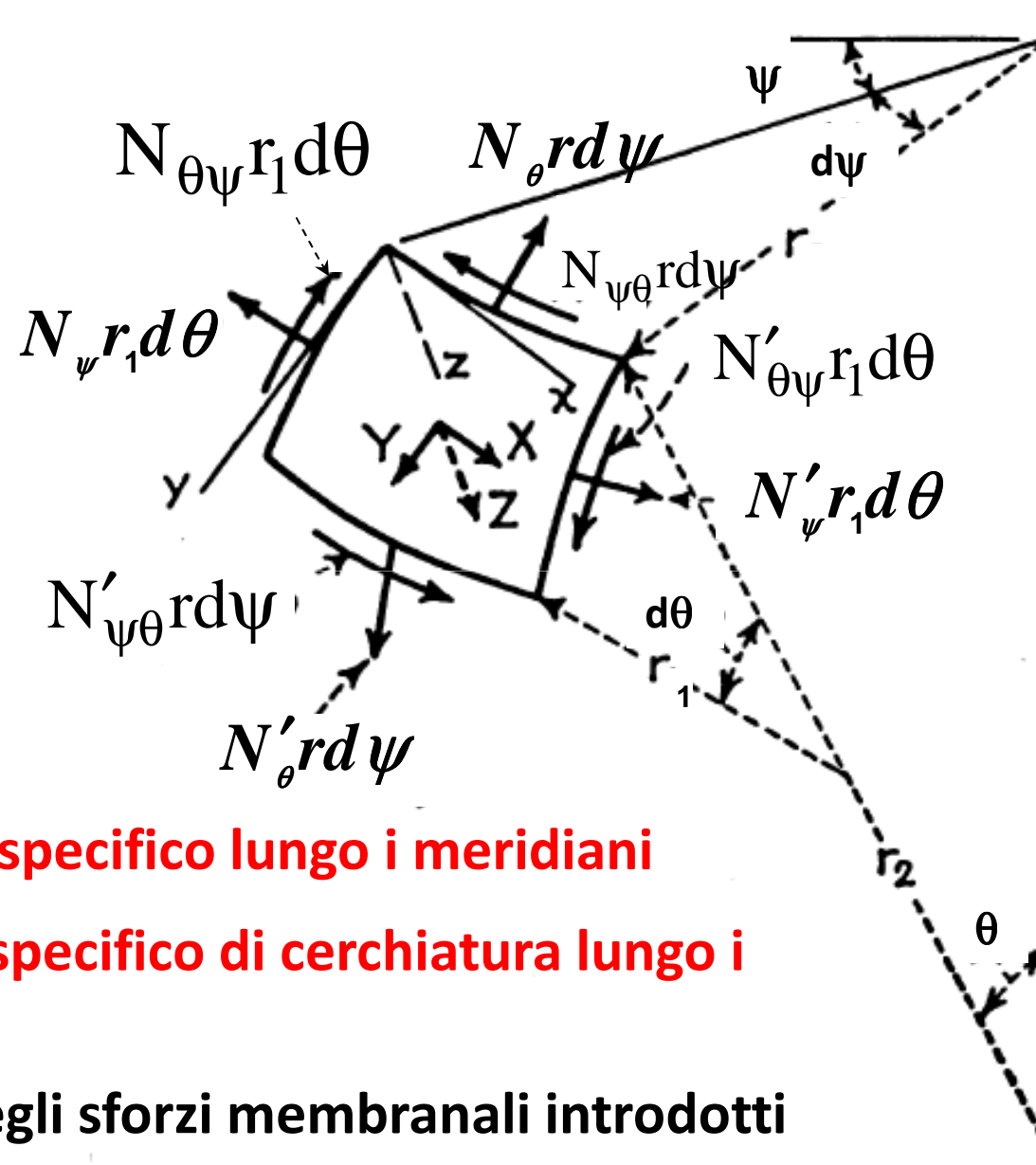
$$P_{\theta} = p_{\theta} r d\psi r_1 d\theta$$

$$P_{\psi} = p_{\psi} r d\psi r_1 d\theta$$

$$P_N = p_N r d\psi r_1 d\theta$$



Membrane di rivoluzione



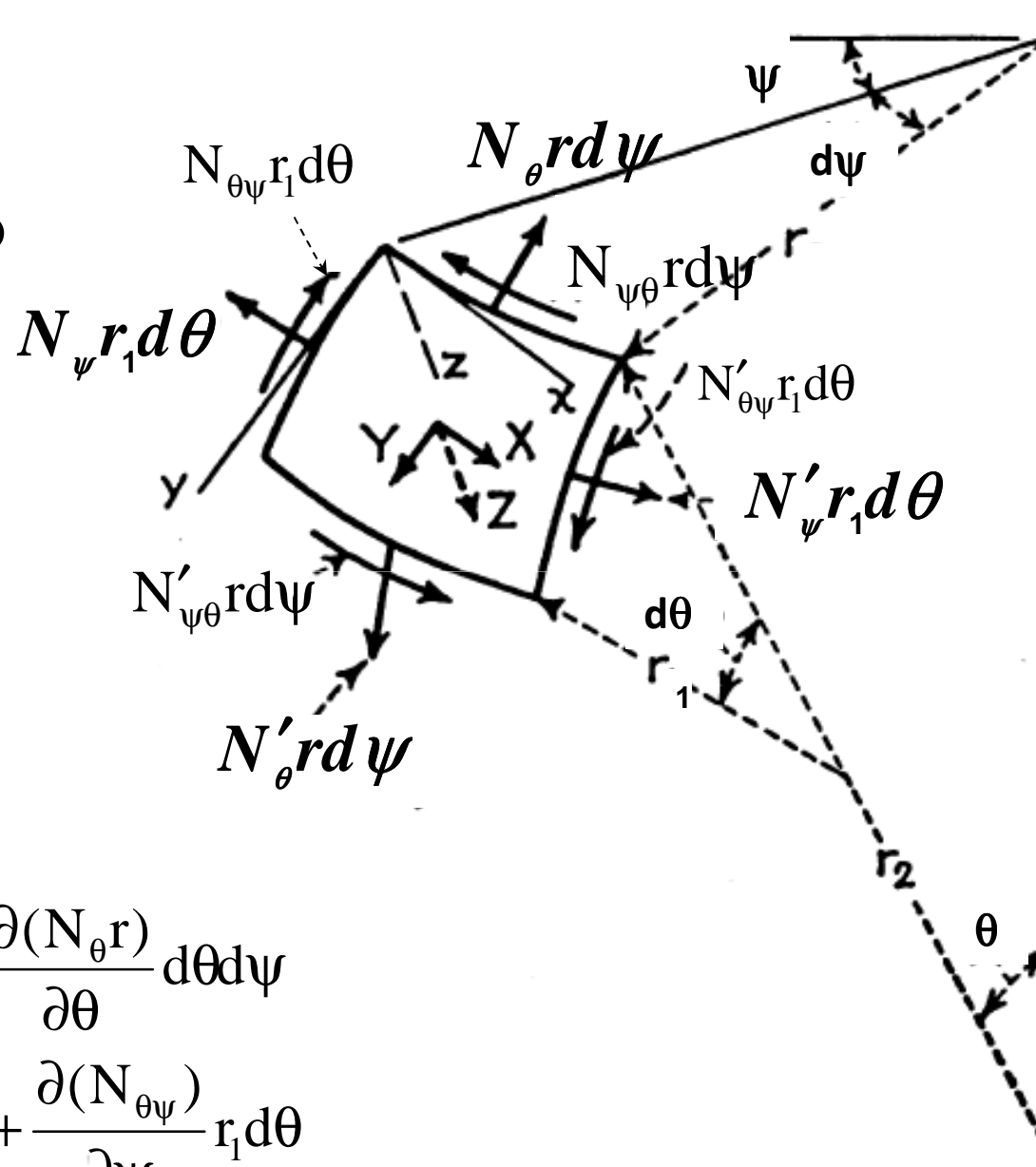
N_θ : sforzo normale specifico lungo i meridiani

N_ψ : sforzo normale specifico di cerchiatura lungo i paralleli

Sono gli analoghi degli sforzi membranali introdotti nelle piastre

Membrane di rivoluzione

Considero gli sforzi e le loro variazioni lungo i lati dell'elemento infinitesimo di membrana

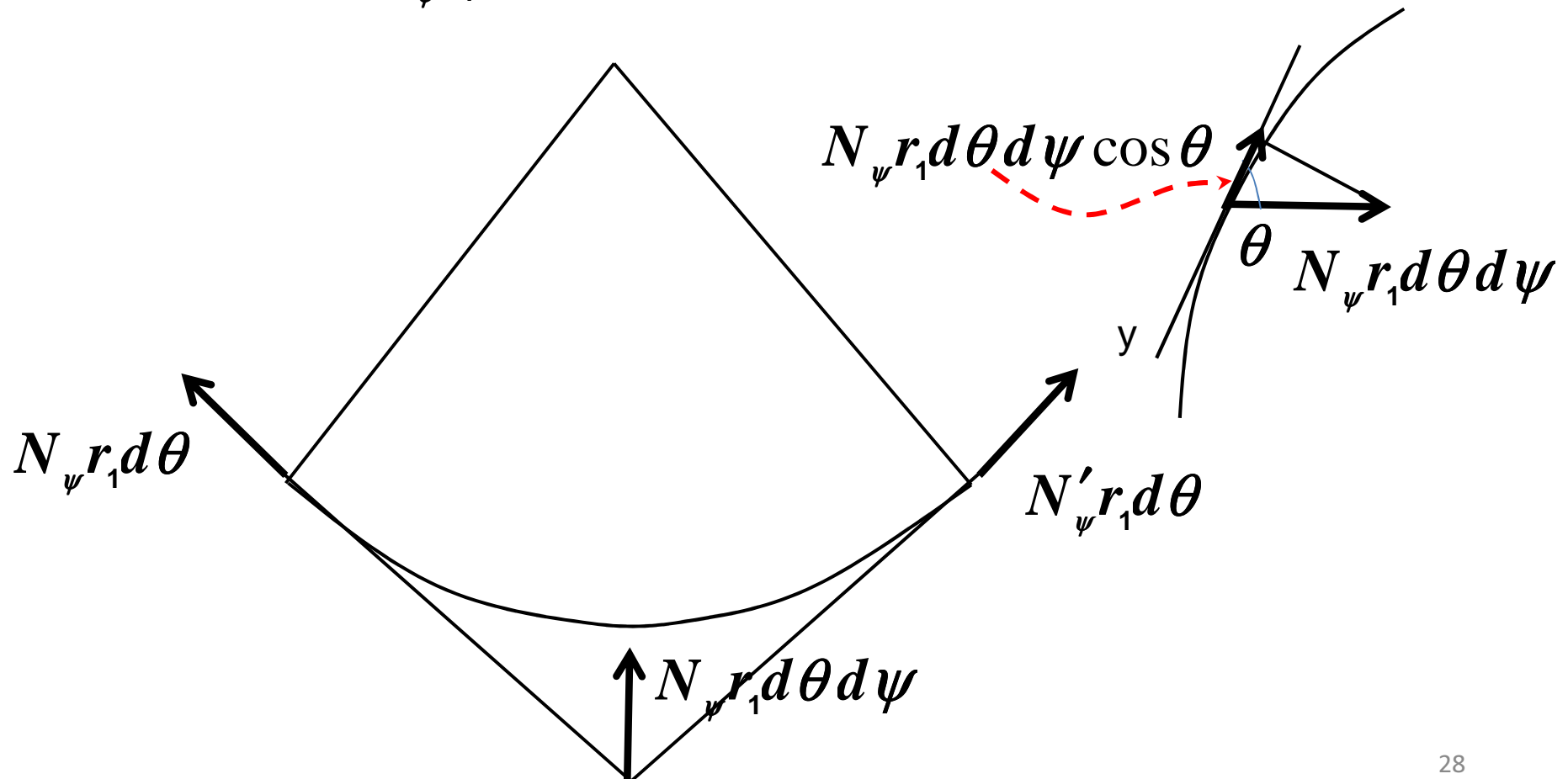


$$N'_\theta r d\psi = N_\theta r d\psi + \frac{\partial(N_\theta r)}{\partial\theta} d\theta d\psi$$

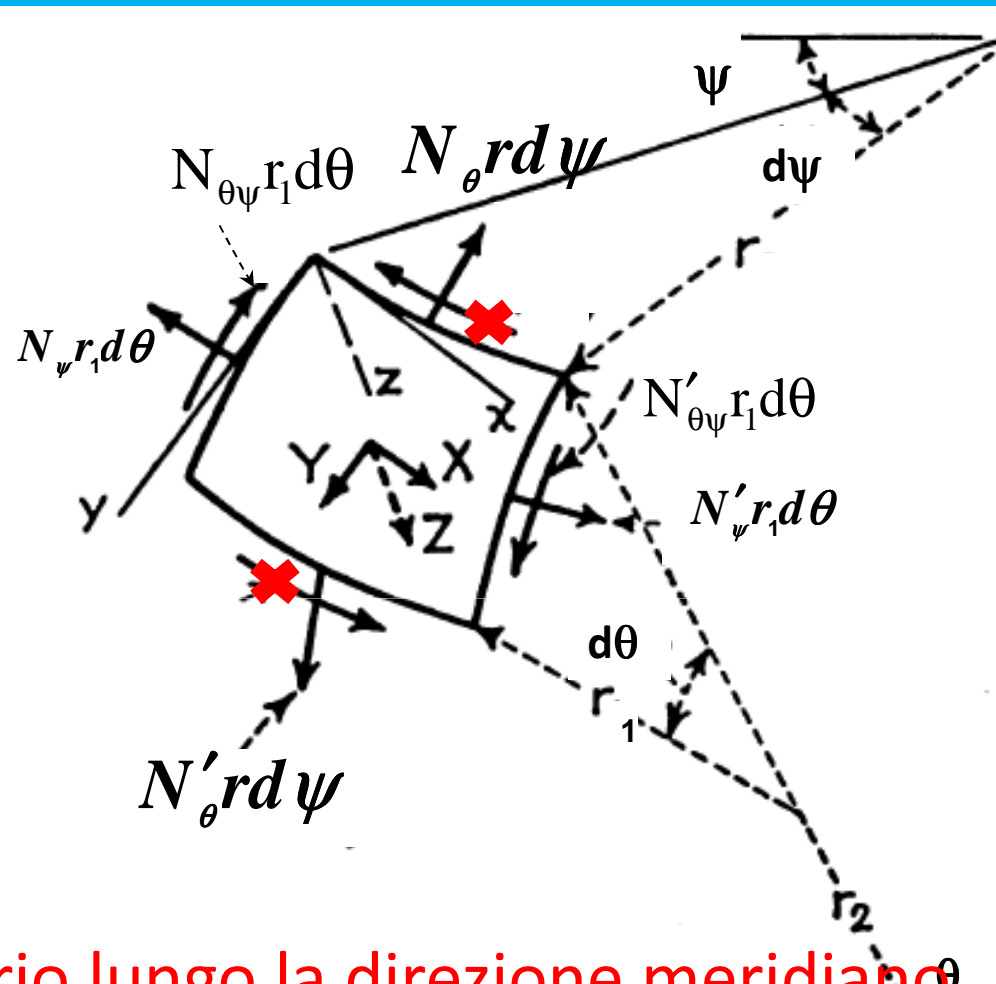
$$N'_{\theta\psi} r_1 d\theta = N_{\theta\psi} r_1 d\theta + \frac{\partial(N_{\theta\psi})}{\partial\psi} r_1 d\theta$$

Equilibrio lungo y (tangente al meridiano)

Gli sforzi normali $N_{\psi} r_1 d\theta$ ed $N'_{\psi} r_1 d\theta$ hanno la risultante diretta secondo r che vale a meno di infinitesimi di ordini superiori $N_{\psi} r_1 d\theta d\psi$ e questa ha secondo y una componente $N_{\psi} r_1 d\theta d\psi \cos \theta$



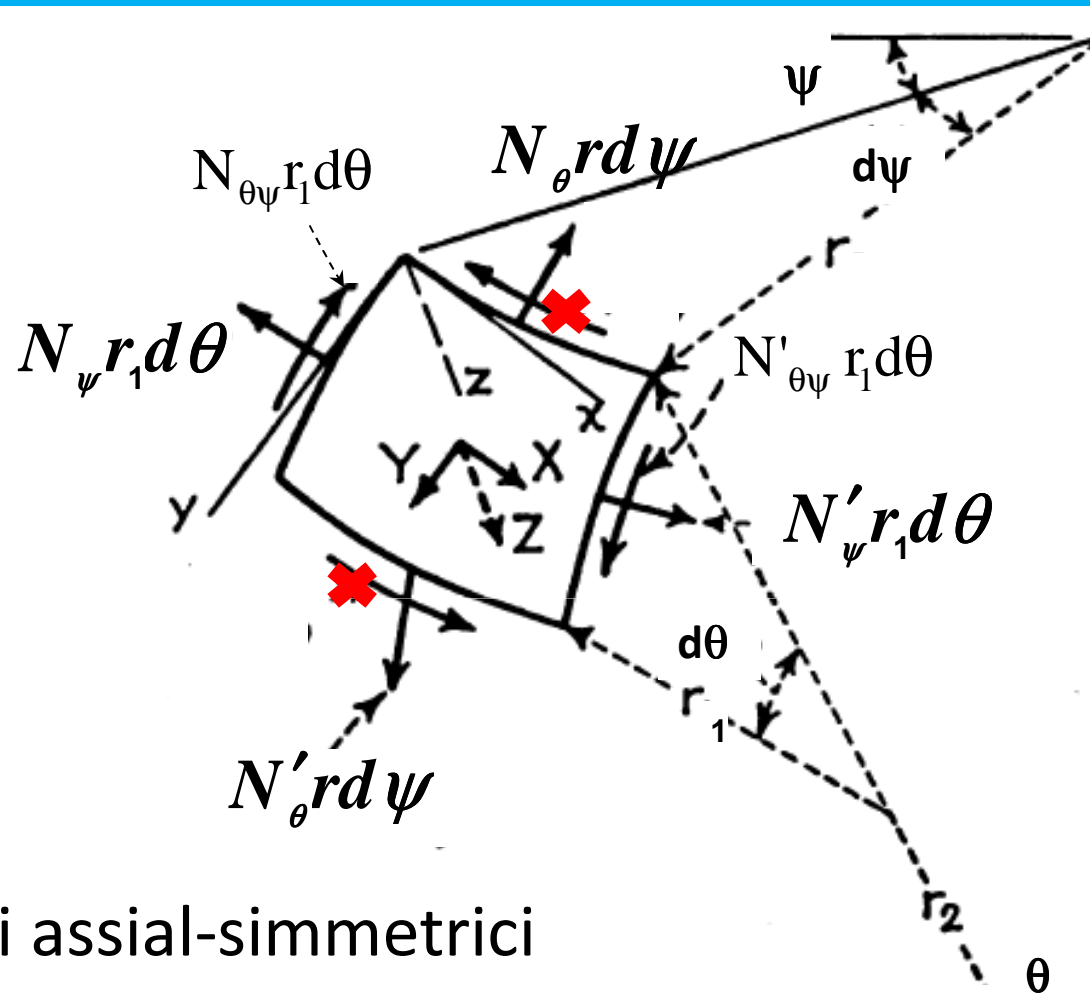
Equilibrio lungo ψ (tangente al meridiano)



Equazione di equilibrio lungo la direzione meridiano

$$\frac{\partial(N_{\theta}r)}{\partial\theta}d\theta d\psi + \frac{\partial N_{\theta\psi}}{\partial\psi}r_1 d\theta d\psi - N_{\psi}r_1 \cos\theta d\theta d\psi + p_{\theta}r r_1 d\theta d\psi = 0$$

Equilibrio lungo ψ (tangente al meridiano)

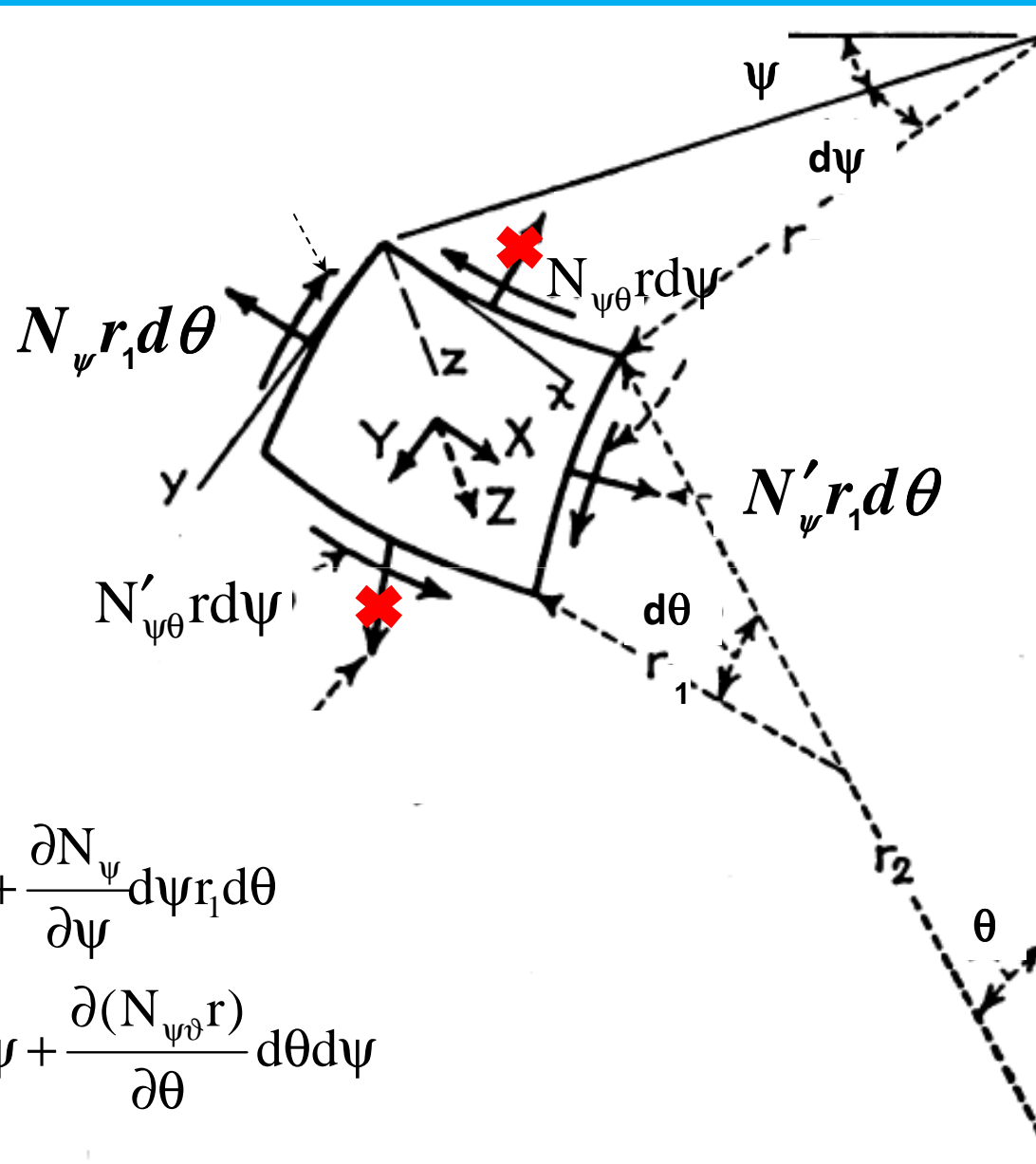


Nel caso di carichi assial-simmetrici

$$N_{\psi\theta} = N_{\theta\psi} = 0$$

N_ψ *non varia con ψ*

Equilibrio lungo x (tangente al parallelo)

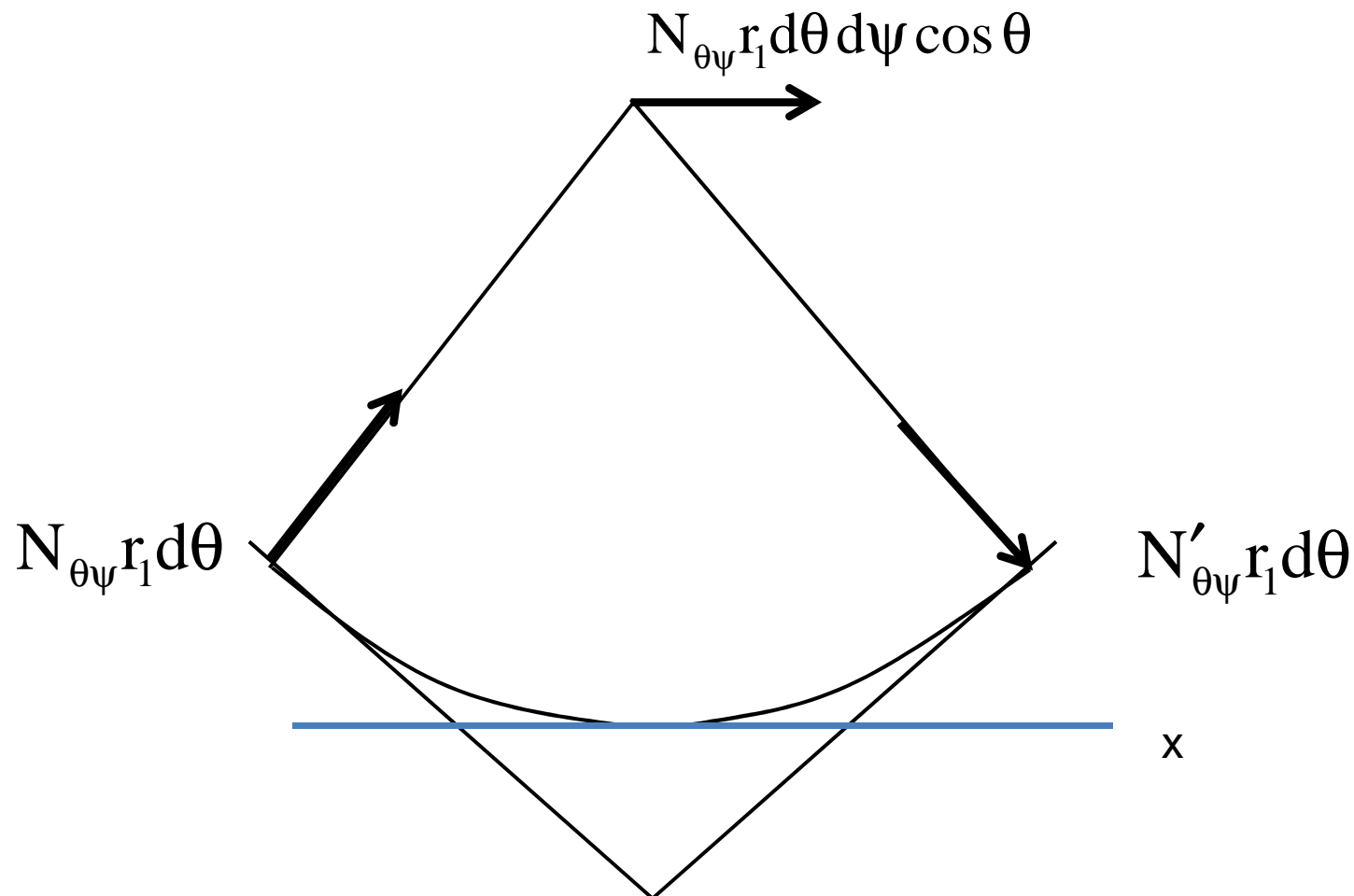


$$N'_{\psi} r_1 d\theta = N_{\psi} r_1 d\theta + \frac{\partial N_{\psi}}{\partial \psi} d\psi r_1 d\theta$$

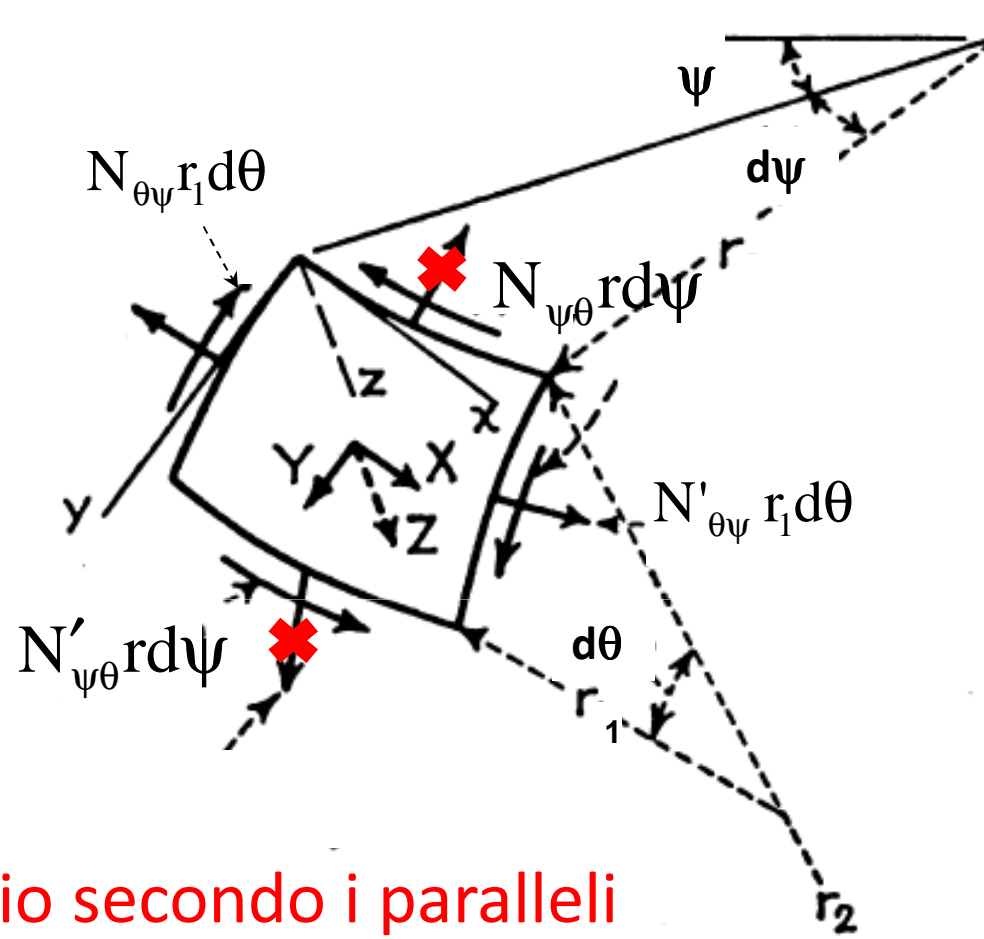
$$N'_{\psi\vartheta} r d\psi = N_{\psi\vartheta} r d\psi + \frac{\partial (N_{\psi\vartheta} r)}{\partial \theta} d\theta d\psi$$

Equilibrio lungo x (tangente al parallelo)

Gli sforzi $N_{\theta\psi}r_1d\theta$ ed $N'_{\theta\psi}r_1d\theta$ hanno una risultante la cui componente secondo x vale a meno di infinitesimi di ordini superiori $N_{\theta\psi}r_1d\theta d\psi \cos \theta$



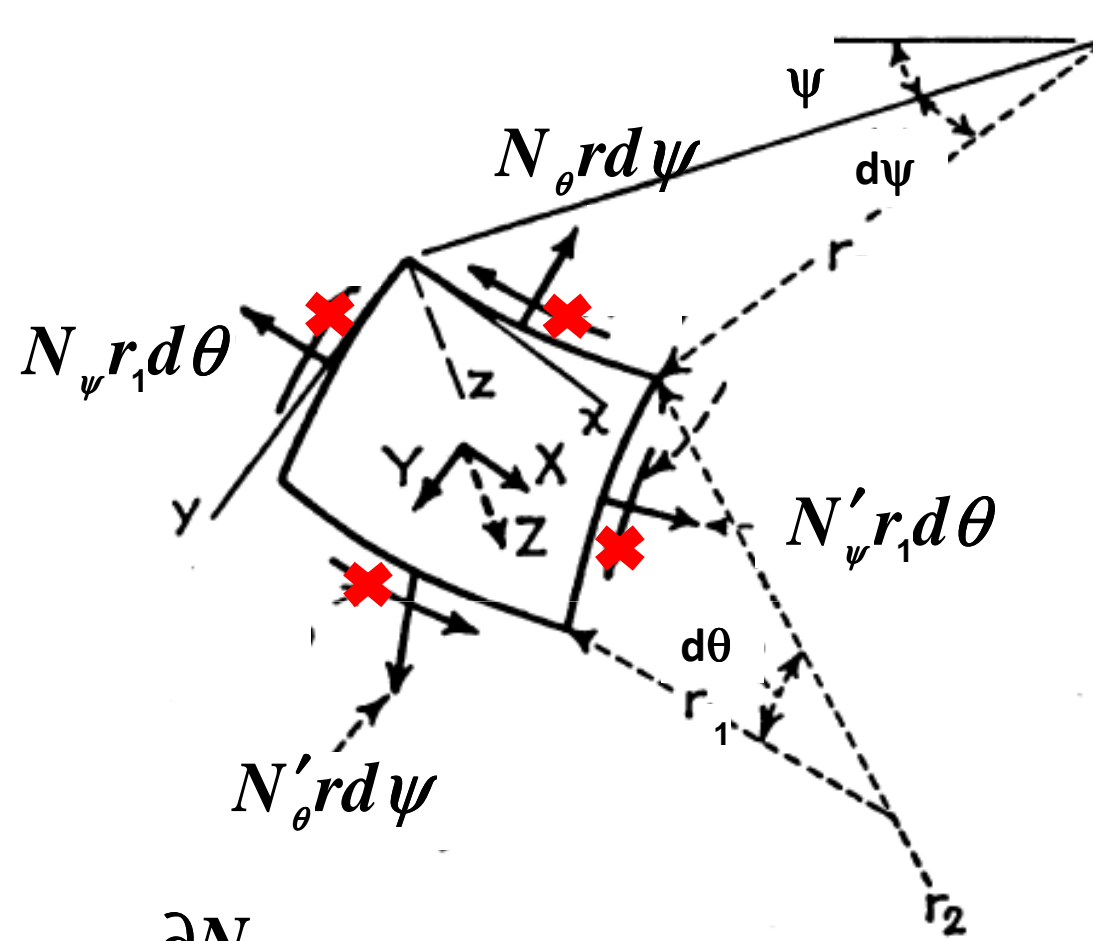
Equilibrio lungo x (tangente al parallelo)



Equazione di equilibrio secondo i paralleli

$$\frac{\partial(N_{\psi\theta}r)}{\partial\theta}d\theta d\psi + \frac{\partial N_{\psi}}{\partial\psi}r_1d\theta d\psi + N_{\theta\psi}r_1d\theta d\psi \cos\theta + p_{\psi}r_1d\theta r d\psi = 0$$

Equilibrio lungo z (normale)

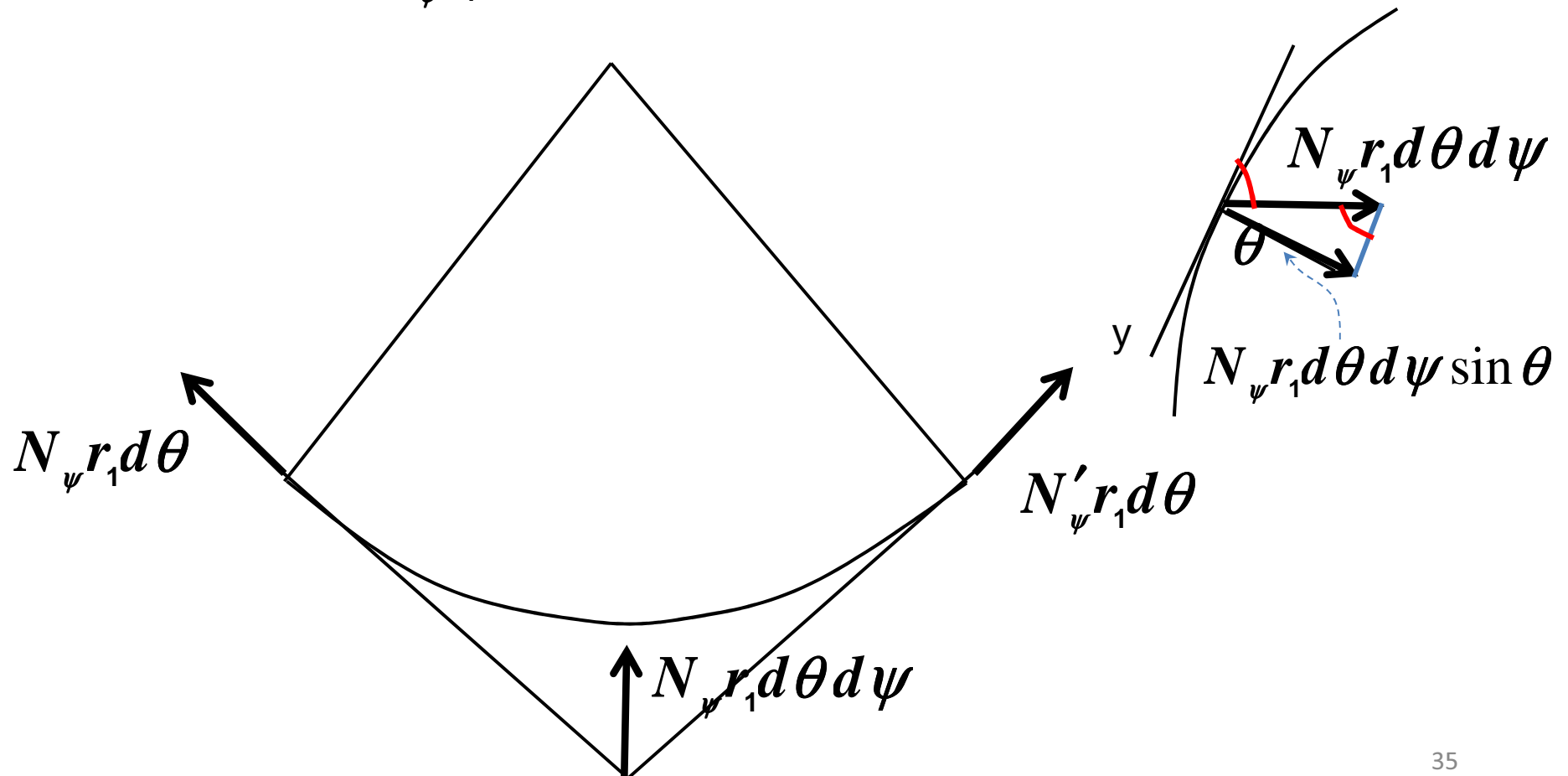


$$N'_{\psi} r_1 d\theta = N_{\psi} r_1 d\theta + \frac{\partial N_{\psi}}{\partial \psi} d\psi r_1 d\theta$$

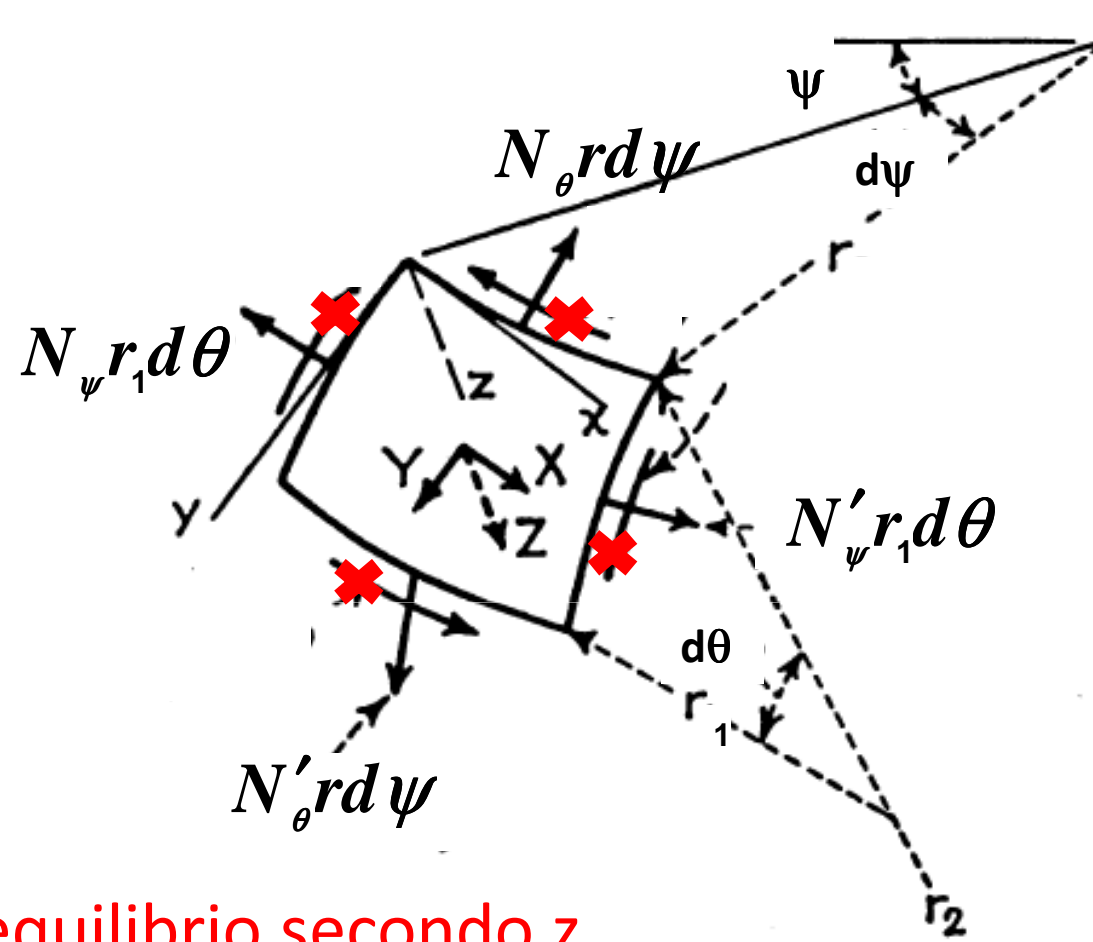
$$N'_{\theta} r d\psi = N_{\theta} r d\psi + \frac{\partial (N_{\theta} r)}{\partial \theta} d\theta d\psi$$

Equilibrio lungo z

Gli sforzi normali $N_\psi r_1 d\theta$ ed $N'_\psi r_1 d\theta$ hanno la risultante diretta secondo r che vale, a meno di infinitesimi di ordini superiori, $N_\psi r_1 d\theta d\psi$ e questa ha secondo z una componente $N_\psi r_1 d\theta d\psi \sin \theta$



Equilibrio lungo z (normale)



Equazione di equilibrio secondo z

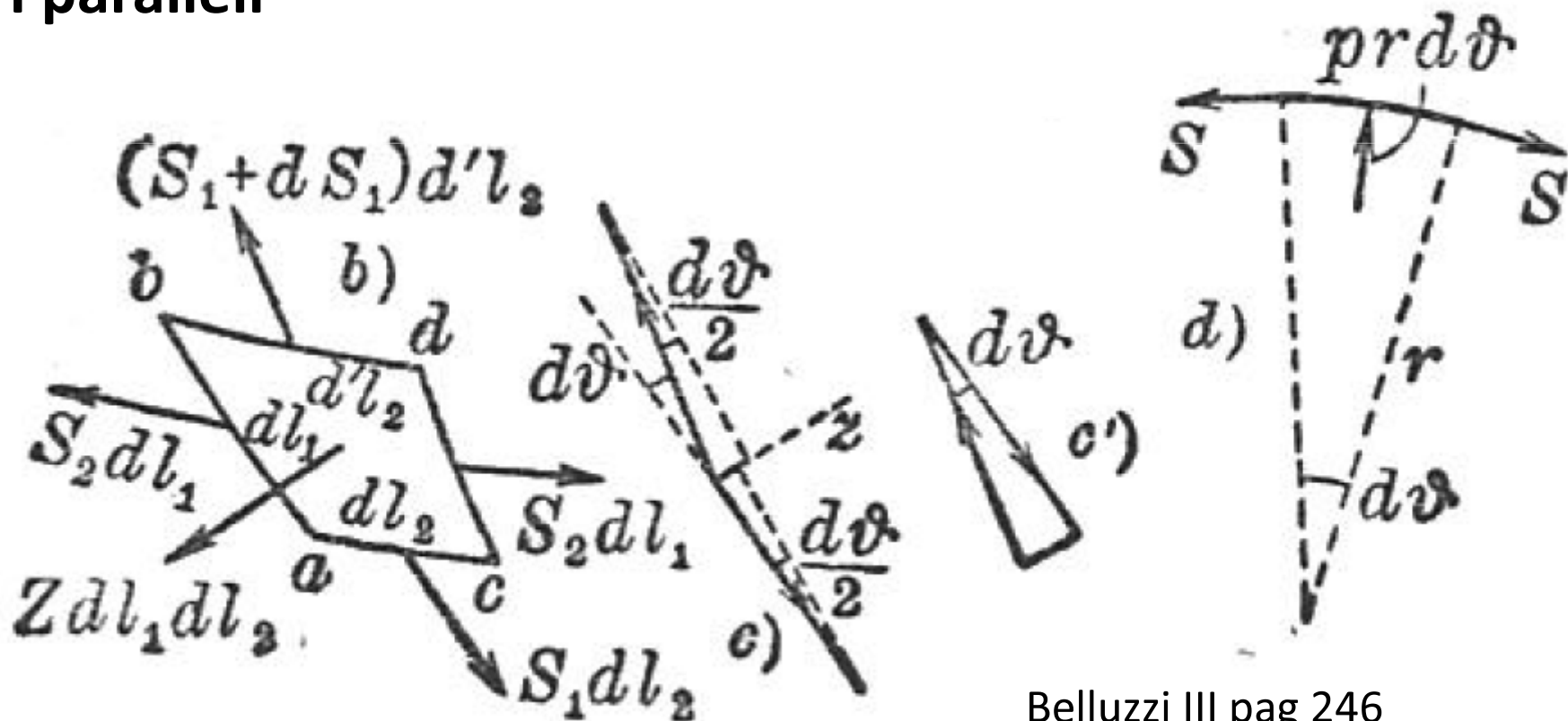
$$N_\theta r_2 \sin \theta d\psi d\theta + N_\psi r_1 \sin \theta d\psi d\theta = p_N r_2 r_1 \sin \theta d\psi d\theta$$

Membrane di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico

Consideriamo un elemento abcd di membrana;

In tale caso lo sforzo tangenziale si annulla

Rimangono solo gli sforzi membranali lungo i meridiani ed i paralleli



Belluzzi III pag 246

Membrane di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico

Consideriamo un elemento di membrana;

In tale caso lo sforzo tangenziale si annulla

Il piano meridiano ed il piano perpendicolare al meridiano diventano i piani principali di curvatura in un punto della superficie di rivoluzione

Chiamiamo i corrispondenti raggi di curvatura R_1 ed R_2

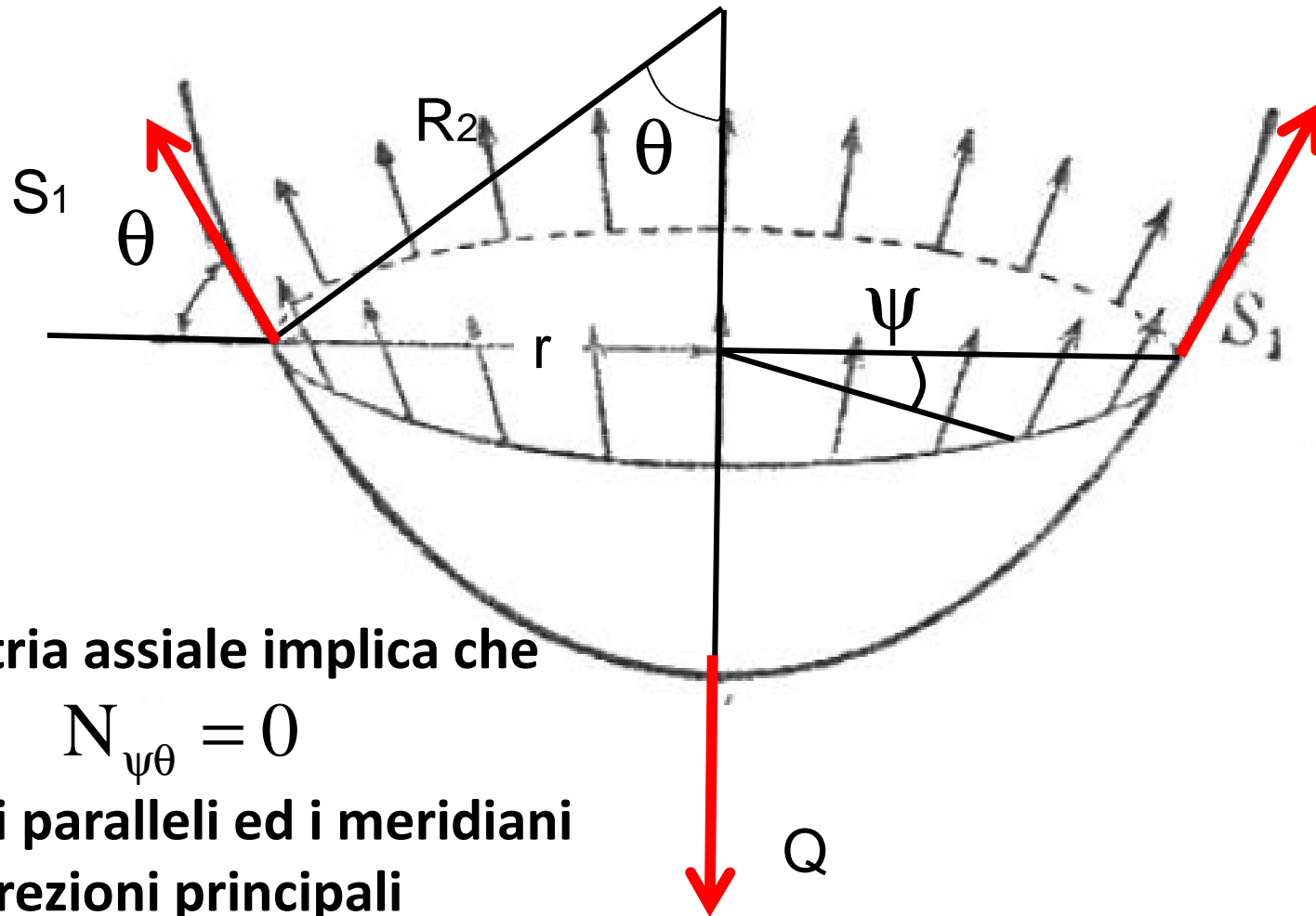
$1/R_1$ e $1/R_2$ sono dette curvatures Gaussiane della superficie

$$S_1 R_2 \sin \theta d\psi d\theta + S_2 R_1 \sin \theta d\psi d\theta = p_N R_2 R_1 \sin \theta d\psi d\theta$$

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = p_N$$

formula di Mariotte per le membrane

Esempio: membrana di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico



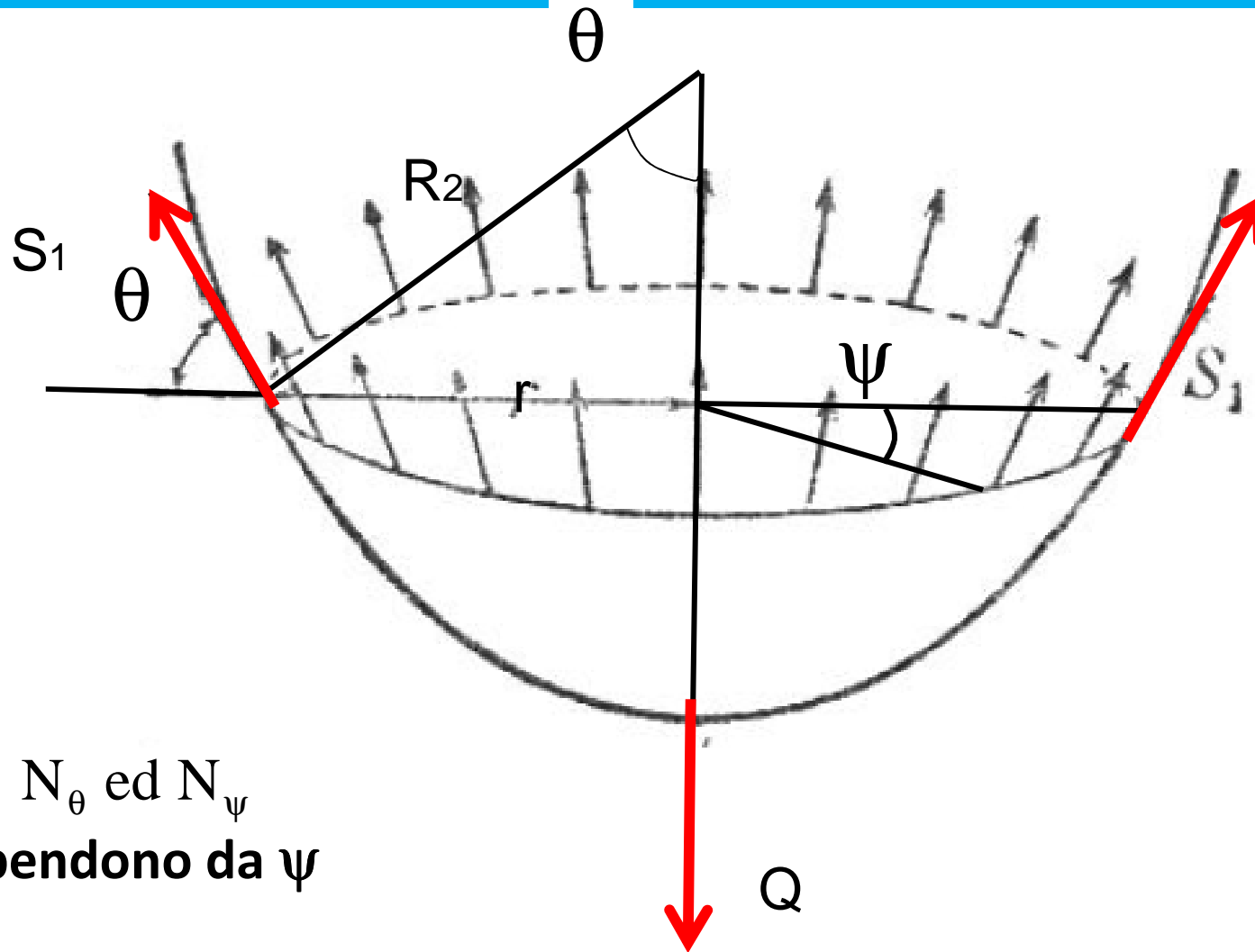
Simmetria assiale implica che

$$N_{\psi\theta} = 0$$

**Inoltre i paralleli ed i meridiani
sono direzioni principali**

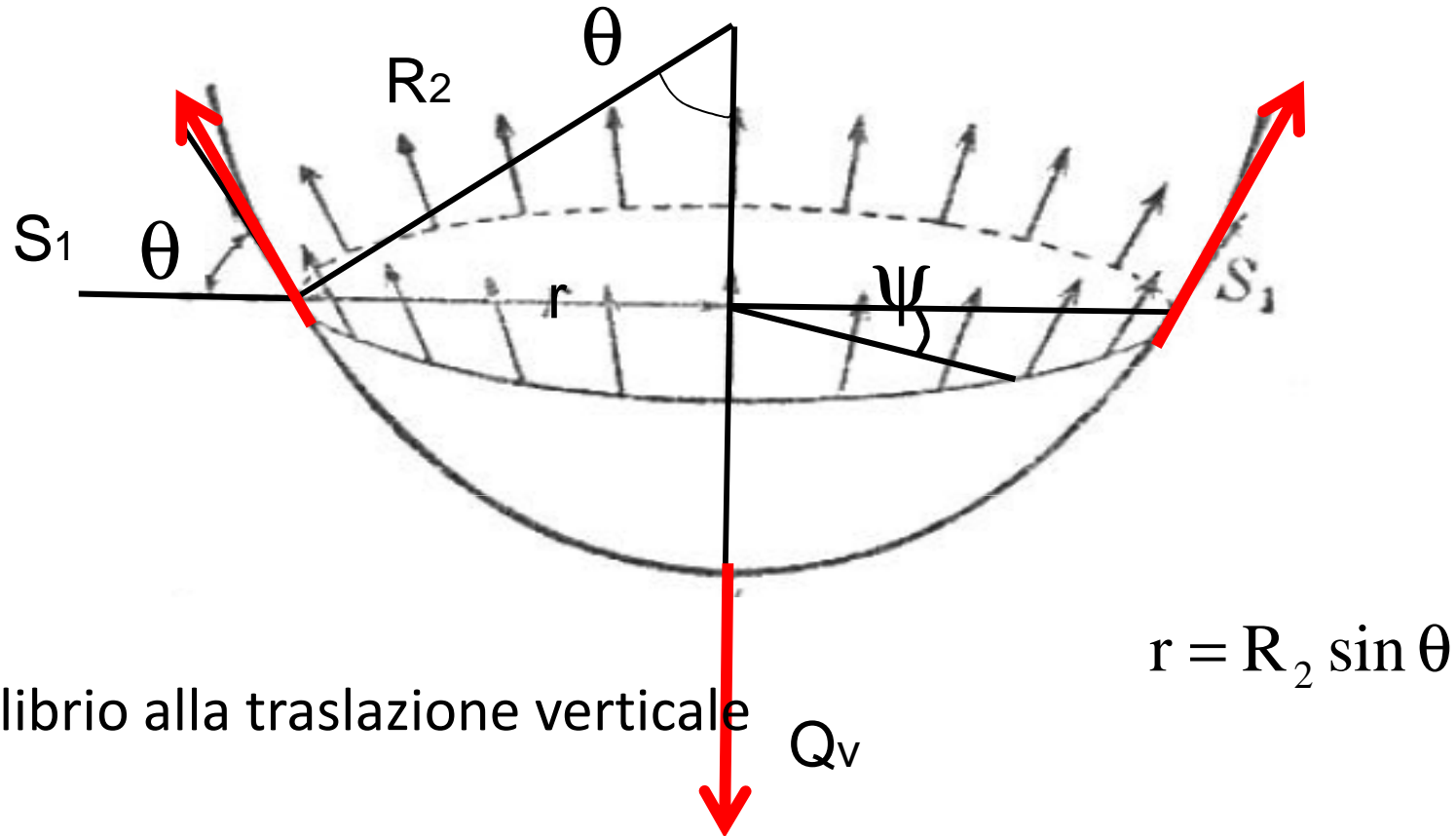
$$N_{\theta} = S_1 \quad N_{\psi} = S_2$$

Esempio: membrana di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico



Inoltre N_θ ed N_ψ
Non dipendono da ψ

Esempio: membrana di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico



Equilibrio alla traslazione verticale

$$S_1 \sin \theta 2\pi r = Q_v$$

$$S_1 = \frac{Q_v}{\sin \theta 2\pi r} = \frac{Q_v}{2\pi R_2 \sin^2 \theta}$$

Casi particolari: serbatoi in pressione per gas

Si trascura il peso del fluido ed il peso proprio del serbatoio

$$Q_v = p\pi r^2$$

$$S_1 = \frac{Q_v}{2\pi r \sin \theta} = \frac{p\pi r^2}{2\pi r \sin \theta} = \frac{pr}{2 \sin \theta} = \frac{pR_2}{2}$$

Dall'equazione di equilibrio si ha

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = p \Rightarrow \frac{pR_2}{2R_1} + \frac{S_2}{R_2} = p \Rightarrow S_2 = \frac{pR_2}{2} \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Casi particolari: serbatoi in pressione per gas

Caso di serbatoio cilindrico di spessore s

$$R_1 = \infty \quad R_2 = R$$

$$S_1 = \frac{pR}{2}$$

$$S_2 = \frac{pR}{2} \left(2 - \frac{R}{R_1}\right) \Rightarrow S_2 = pR$$

Le tensioni diventano(formula di Mariotte dei tubi sottili)

$$\sigma_1 = \frac{pR}{2s} \quad \sigma_2 = \frac{pR}{s} = 2\sigma_1$$

Casi particolari: serbatoi per liquidi

Belluzzi III pag 255-258

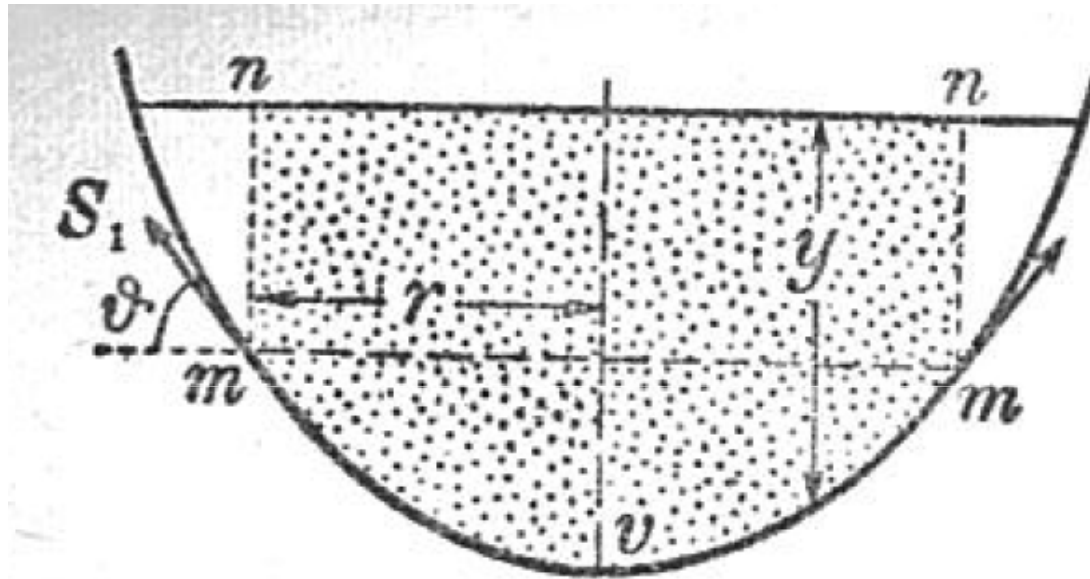


Fig. 1431.

Sia γ_l il peso specifico del liquido

Casi particolari: serbatoi per liquidi

Belluzzi III pag 255-258

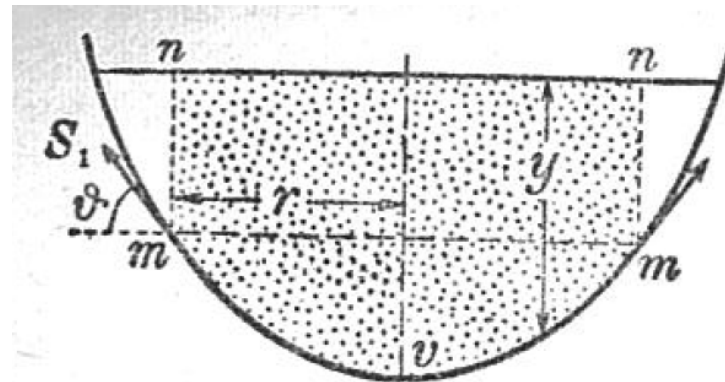


Fig. 1431.

Tagliato il serbatoio con un piano orizzontale mm , la risultante Q delle pressioni agenti sulla parete sottostante è= al peso $\gamma_l V$ del volume V di liquido punteggiato in figura. Da cui

$$S_1 = \frac{\gamma_l V}{2\pi r \sin \theta} = \frac{\gamma_l V}{2\pi R_2 \sin^2 \theta}$$

Casi particolari: serbatoi per liquidi

Belluzzi III pag 255-258

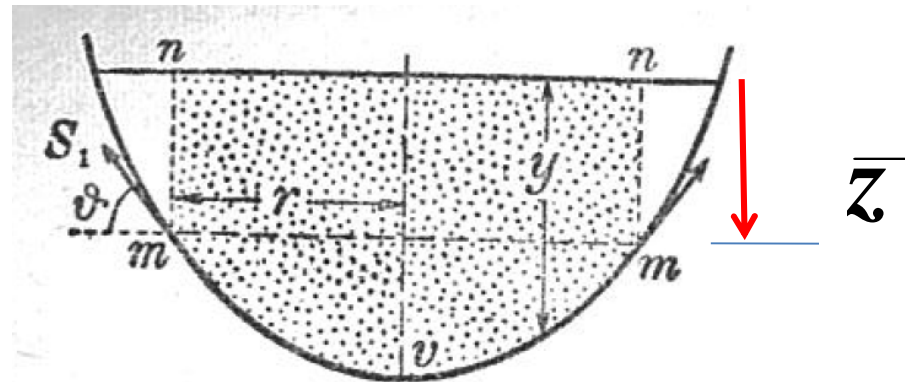


Fig. 1431.

La S_2 si calcola noto S_1 come $S_1 = \frac{\gamma_1 V}{2\pi r \sin \theta} = \frac{\gamma_1 V}{2\pi R_2 \sin^2 \theta}$

$$S_2 = R_2 \left(-\frac{S_1}{R_1} + p_N \right) = R_2 \left(-\frac{S_1}{R_1} + \gamma_1 \bar{z} \right)$$

Casi particolari: tramoggia

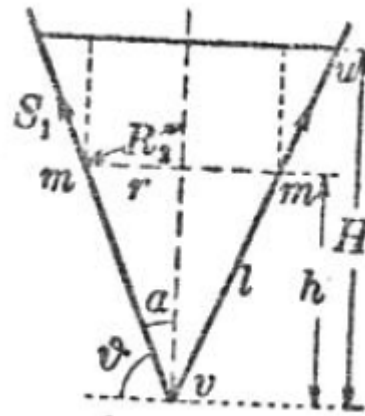


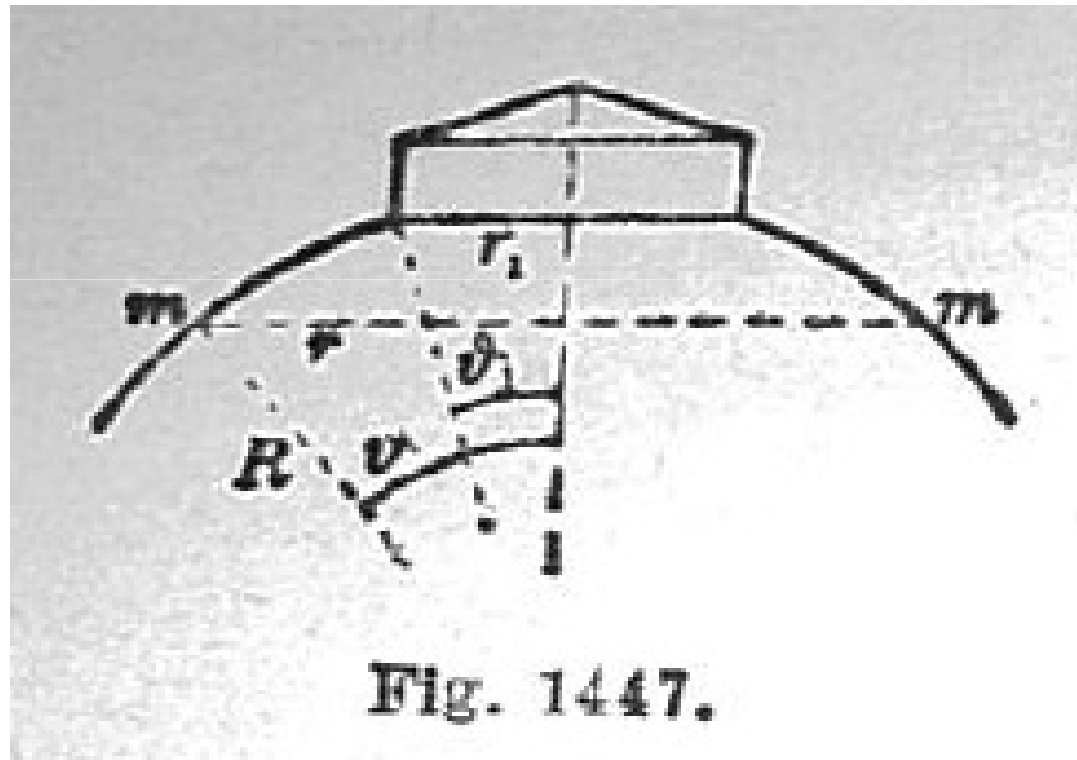
Fig. 1433.

Esercizio 1277. – Determinare l'angolo α che deve avere un serbatoio conico di data capacità V , affinché il volume v della lamiera risulti minimo.

$$\alpha = \sim 35^\circ .$$

Casi particolari: cupola con lanterna

Esercizio 1294. - Cupola sferica con lanterna (fig. 1447).



Casi particolari: cupola ogivale

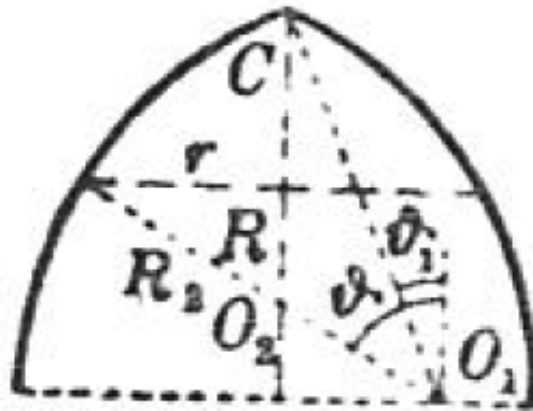
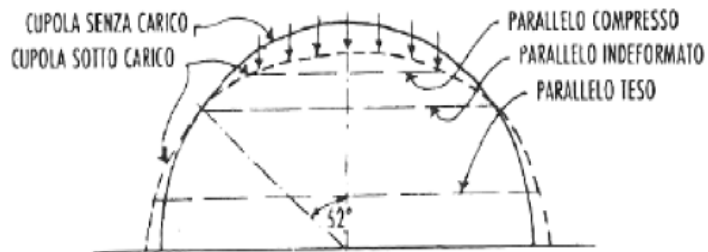


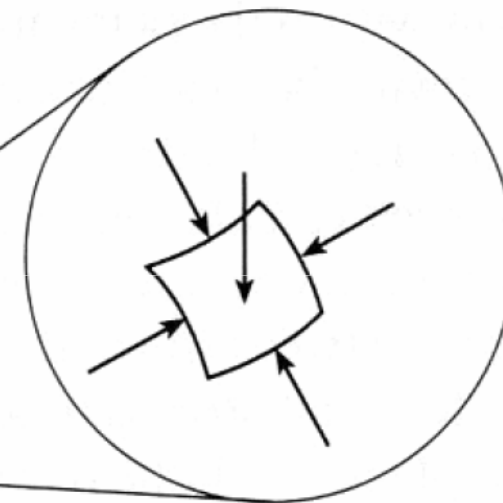
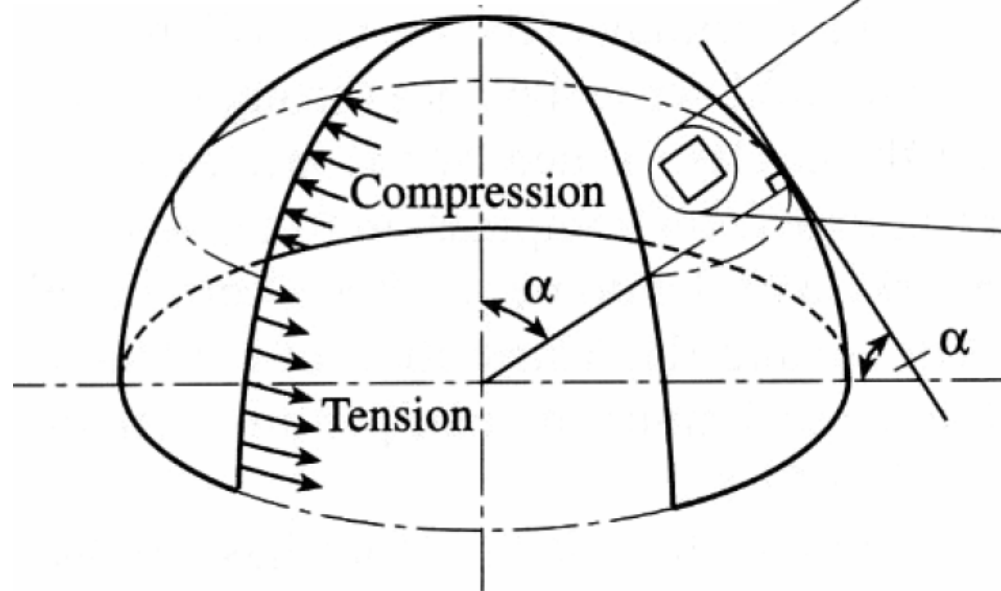
Fig. 1448.

Esercizio 1296. – Il meridiano di una cupola è un arco circolare, interrotto in un punto C nel quale l'inclinazione è θ_1 , così che ivi risulta una cuspide (fig. 1448). Determinare gli sforzi provocati dal peso proprio, essendo lo spessore costante.

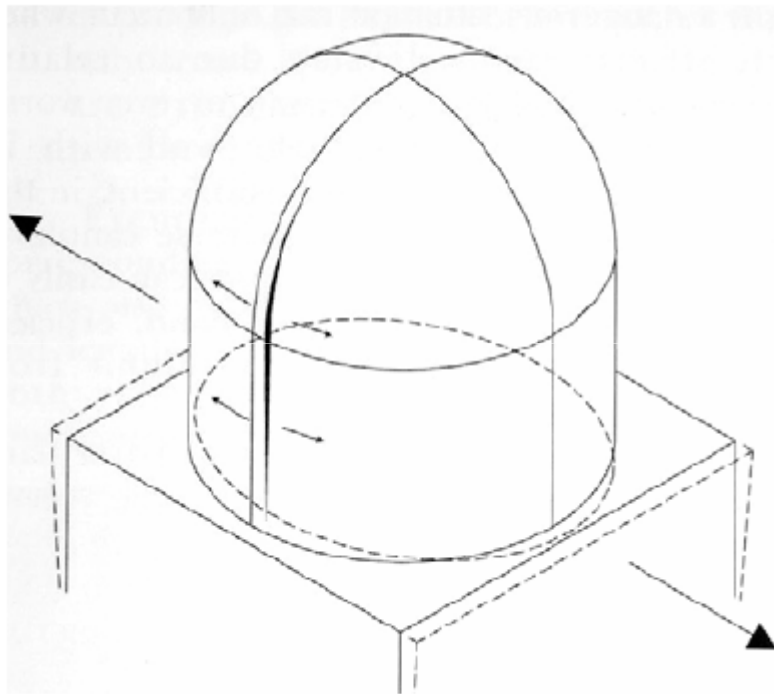
Danneggiamento delle cupole



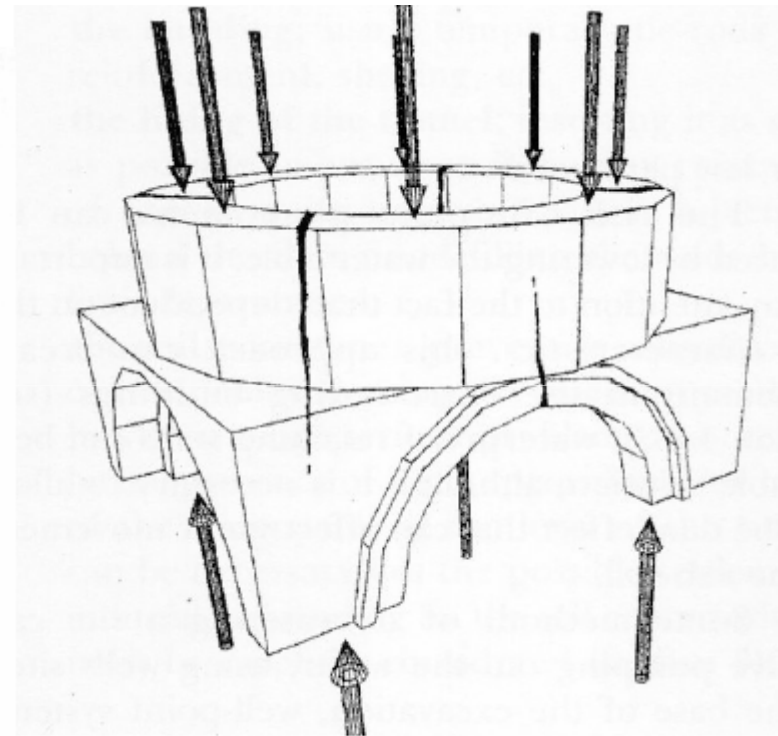
DEFORMAZIONE D'UNA CUPOLA AD OPERA DEI CARICHI VERTICALI



Danneggiamento delle cupole



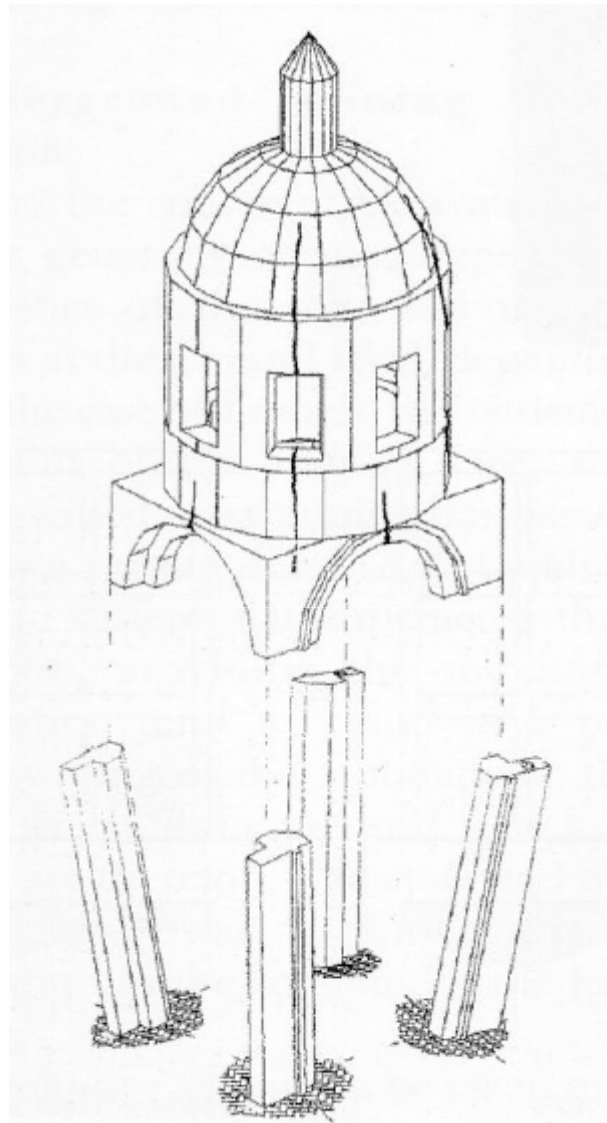
Assestamento delle imposte



Tamburo inefficiente

Danneggiamento delle cupole

***Traslazione
dei
pilastri/muri
di supporto***



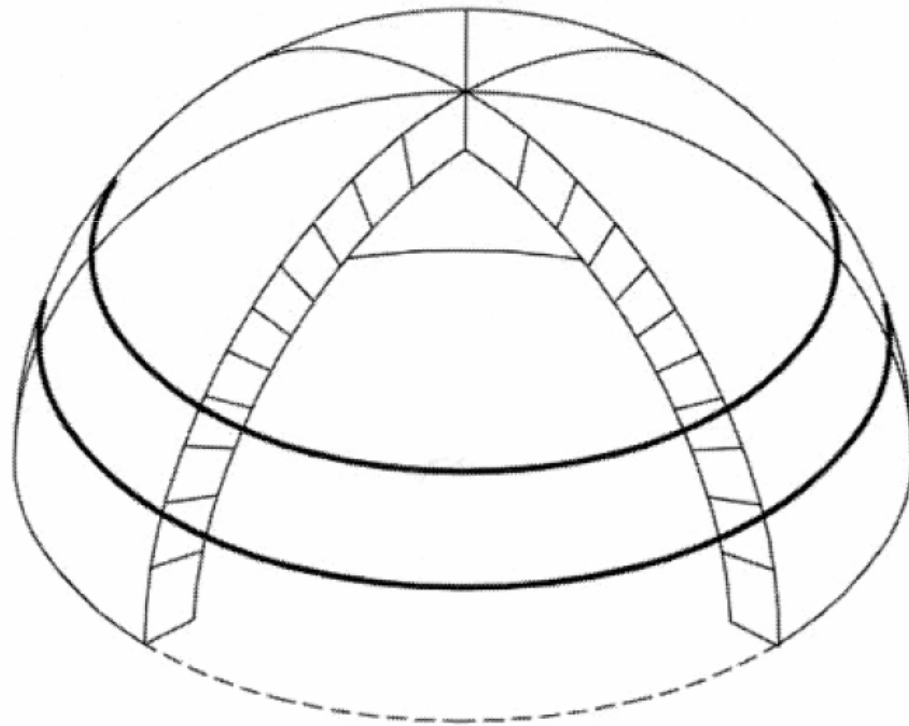
Danneggiamento delle cupole

Effetti biologici
Es piante..



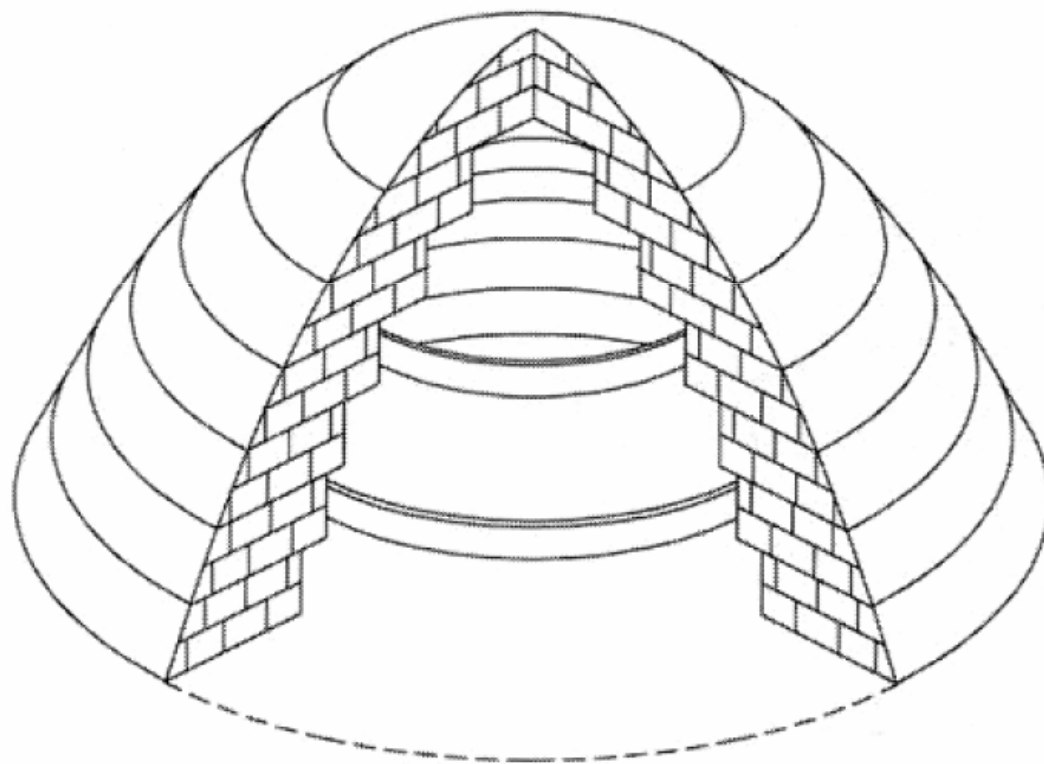
Interventi di ripristino

Cerchiatura cupola



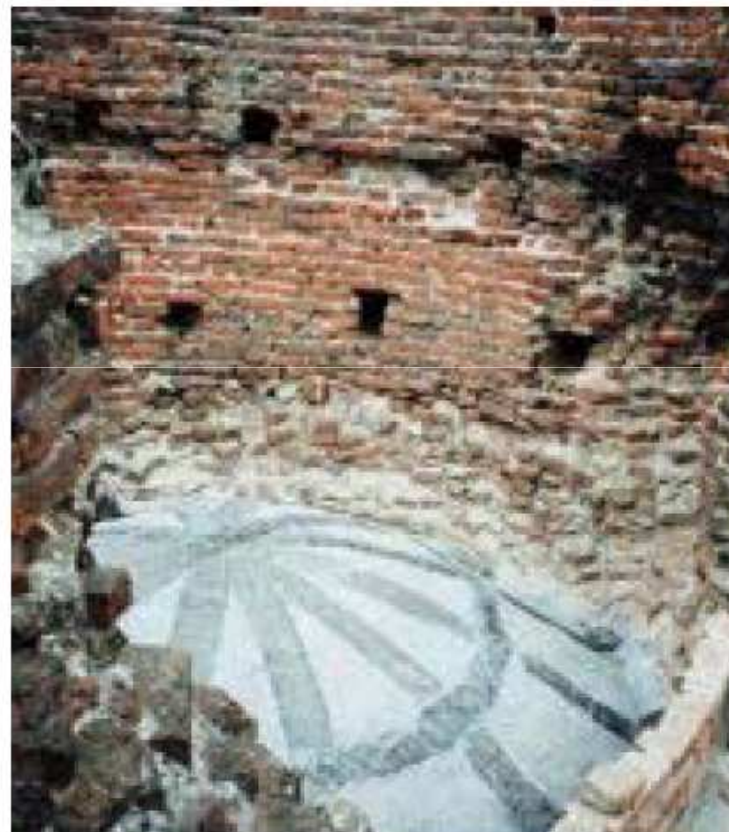
Interventi di ripristino

Anelli di rinforzo per false volte



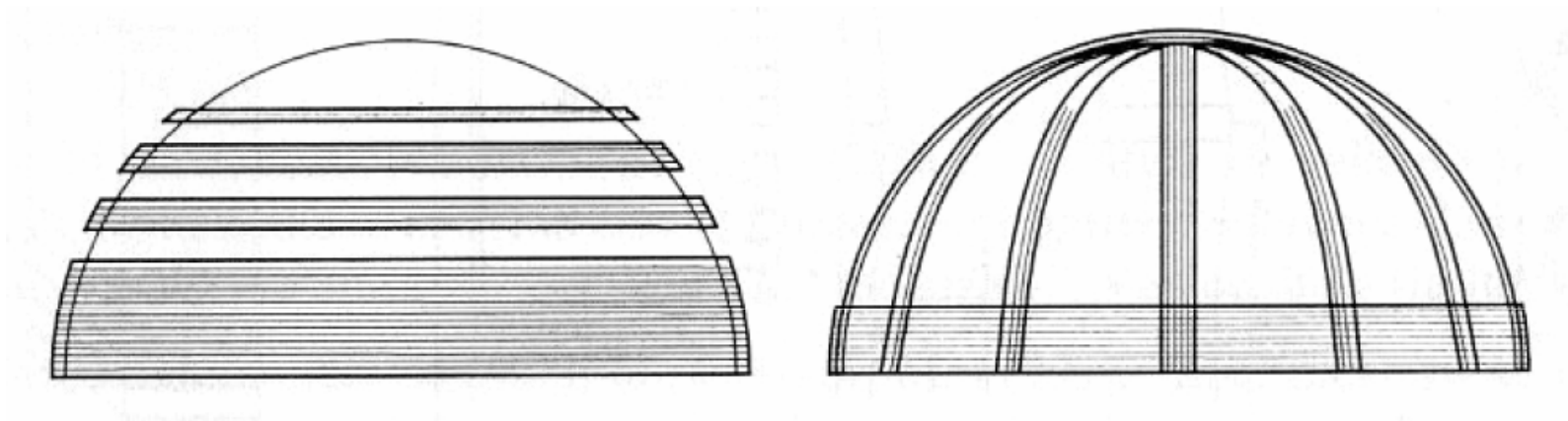
Interventi di ripristino

Cerchiatura cupola con FRP



Interventi di ripristino

Cerchiatura cupola con FRP



Interventi di ripristino

Cerchiatura cupola San Carlo, Roma

