ANALISI LIMITE IN PRESENZA DI SOLLECITAZIONI COMPOSTE E STATI DI TENSIONE PLURI-ASSIALI

Il calcolo a rottura può essere applicato a tutte le tipologie strutturali esistenti, sia monodimensionali in presenza di uno stato di sollecitazione generico che bi e tri dimensionali.

1) si presenta l'estensione del concetto di cerniera plastica al caso delle sollecitazioni composte. Ci si limita per brevità a studiare l'interazione fra sforzo normale e momento flettente rimandando alla letteratura tecnica la presentazione degli altri casi di sollecitazione. si introducono i concetti di dominio di ammissibilità e di flusso plastico diretto secondo la normale esterna al dominio stesso indispensabili per comprendere i punti successivi.

ANALISI LIMITE IN PRESENZA DI SOLLECITAZIONI COMPOSTE E STATI DI TENSIONE PLURI-ASSIALI

2)vengono brevemente riportati i criteri di snervamento pluri-assiali di più frequente impiego tecnico, peraltro in parte presentati nel corso di Scienza delle Costruzioni

3) viene presentata in modo unitario la classica teoria della plasticità (flow theory) a partire dal postulato della dissipazione massima

4) vengono discusse le equazioni costitutive elasto-plastiche, incrementali.

ANALISI LIMITE IN PRESENZA DI SOLLECITAZIONI COMPOSTE E STATI DI TENSIONE PLURI-ASSIALI

5) vengono presentati I teoremi dell'analisi limite

6) vengono discussi problemi piani di tensione e di deformazione

7) Infine viene presentato un caso di plasticità non associata: l'attrito alla Coulomb.

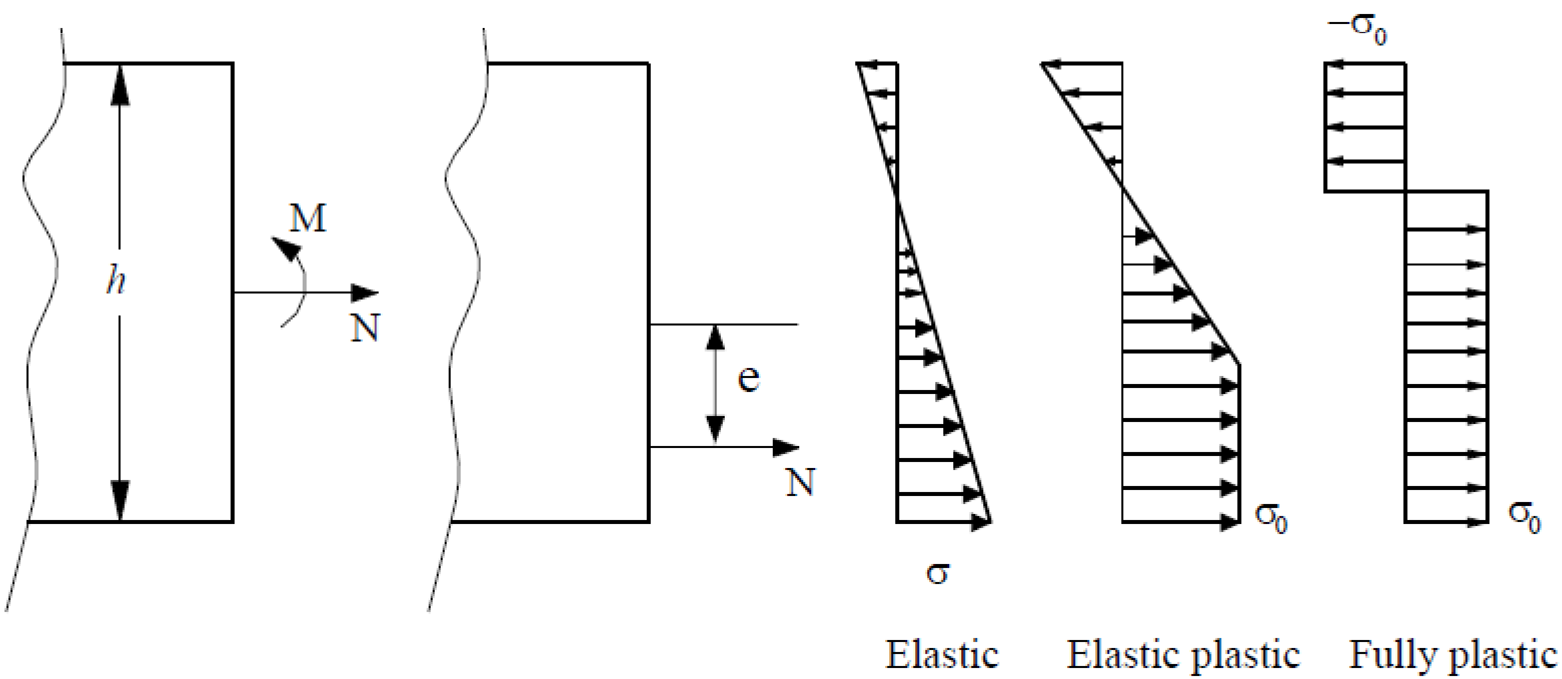
Cerniera plastica generalizzata: Dominio di ammissibilità N-M

Si considera il comportamento di una trave di materiale elastico-plastico (EPP) in presenza di una sollecitazione composta da un momento flettente M ed uno sforzo normale N, ovvero uno sforzo normale eccentrico di *eccentricità*
e = M/N.

Si assume inoltre che, come nei capitoli precedenti, valga anche in questo caso l'ipotesi di Eulero-Bernoulli di conservazione delle sezioni piane.

Cerniera plastica generalizzata: Dominio di ammissibilità N-M

la distribuzione delle tensioni normali σ in una sezione rettangolare di larghezza b ed altezza h.



Cerniera plastica generalizzata: Dominio di ammissibilità N-M

Si assume inoltre di far crescere lo sforzo normale N senza variare l'eccentricità.

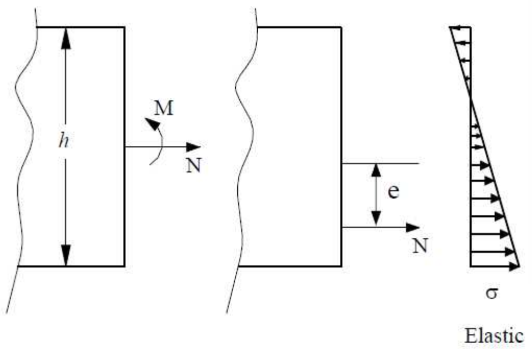
La distribuzione delle tensioni normali σ resta lineare (come descritto dalla formula di Navier):

$\sigma = N/A + My/I$ $\quad\quad$ $W_{el} = I/(0,5\ h) = bh^2/6)$,

finché $\sigma < \sigma 0$, ovvero il materiale non giunge allo snervamento.

Pertanto la sezione rettangolare resta tutta in campo elastico finché:

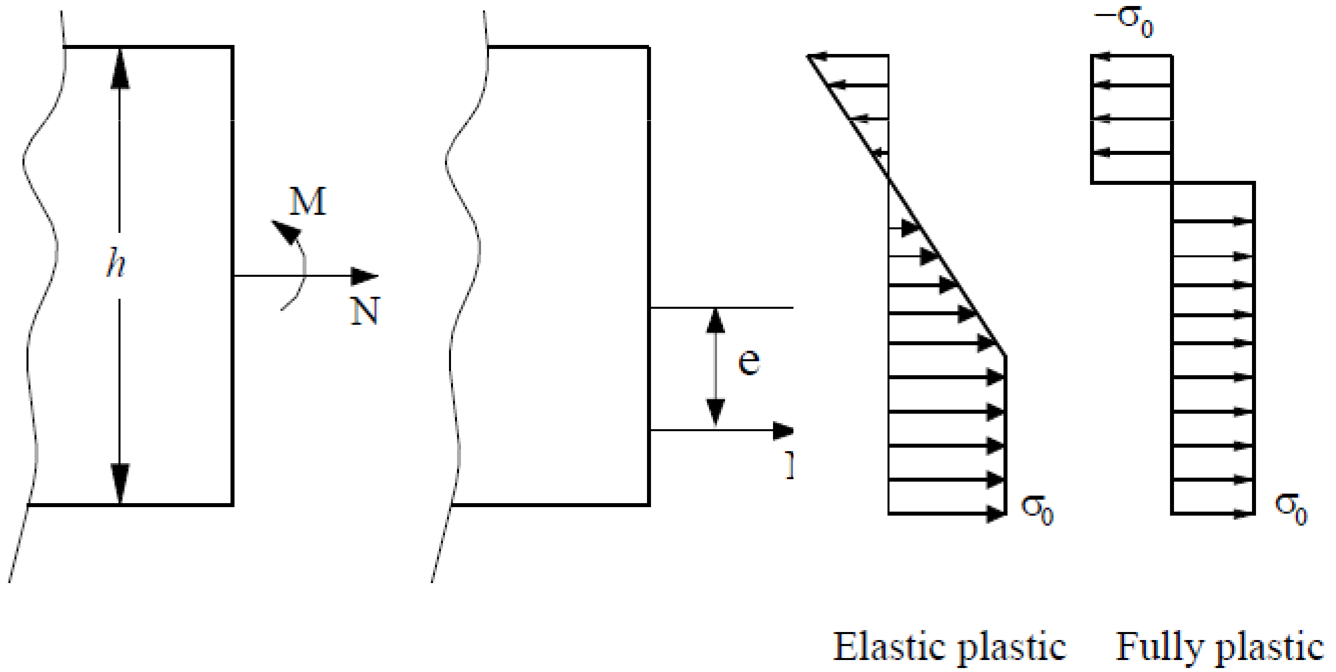
$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_{el}} \le \sigma_0 \qquad \sigma_{min} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W_{el}} \ge -\sigma_0 ,$$



$$\left| \frac{N}{\sigma_0 A} \pm \frac{M}{\sigma_0 W_{el}} \right| \le 1 .$$

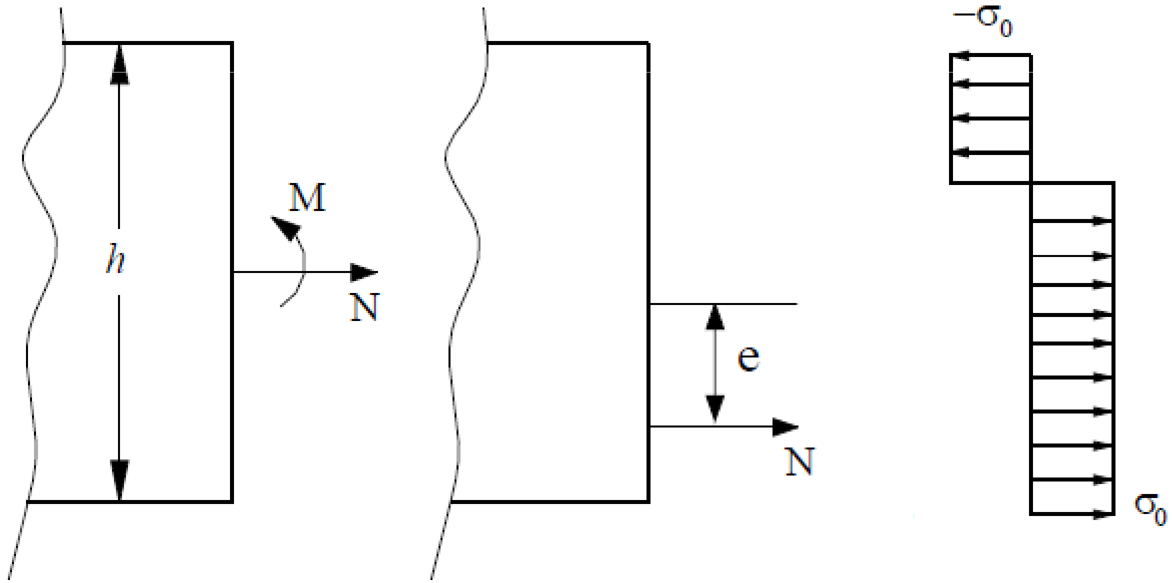
Cerniera plastica generalizzata: Dominio di ammissibilità N-M

Poi come visto nel caso della flessione semplice la tensione rimane costante e pari alla tensione di snervamento σ_0.



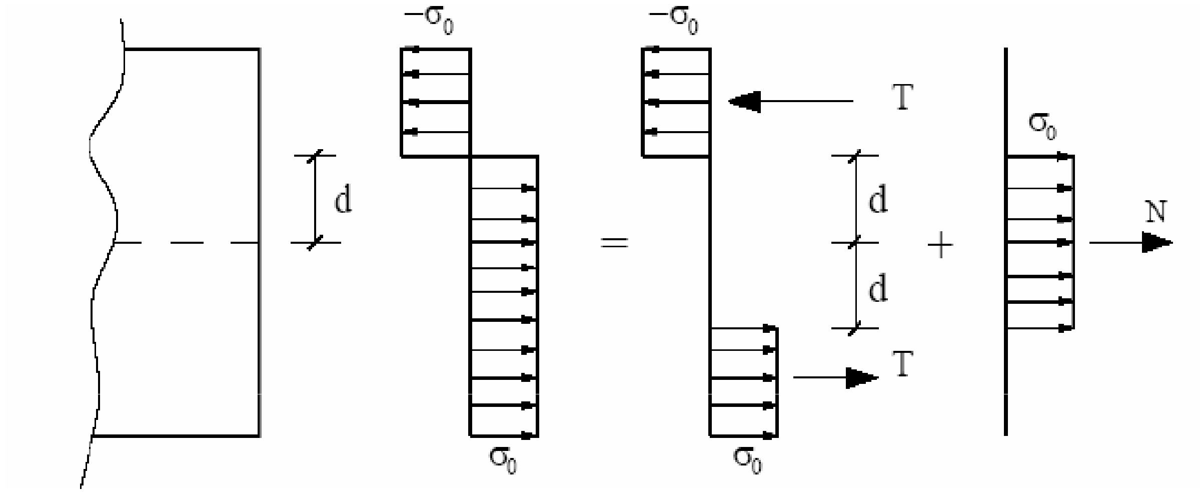
Cerniera plastica generalizzata: Dominio di ammissibilità N-M

Nella situazione limite tutta la sezione è in campo plastico come rappresentato in figura



Cerniera plastica generalizzata: Dominio di ammissibilità N-M

Nella situazione limite tutta la sezione è in campo plastico come rappresentato in figura



Al fine di valutare gli stati di sollecitazione ammissibili e di rappresentarli nel piano N-M calcoliamo

$$T = \sigma_0 b\left(\frac{h}{2} - d\right) \Rightarrow$$

$$M = T\left[h - \left(\frac{h}{2} - d\right)\right] = \sigma_0 b\left(\frac{h^2}{4} - d^2\right) = \frac{\sigma_0 b h^2}{4}\left(1 - 4\frac{d^2}{h^2}\right)$$

$$N = \sigma_0\ 2bd$$

Cerniera plastica generalizzata: Dominio di ammissibilità N-M

Poiché lo sforzo normale limite N_0 ed il momento limite M_0 valgono rispettivamente

$$N_0 = \sigma_0 bh, \quad M_0 = \frac{\sigma_0 bh^2}{4}$$

$$\frac{N}{N_0} = \frac{2d}{h},$$

$$M = M_0\left[1 - \left(\frac{N}{N_0}\right)^2\right], \quad M > 0$$

Cerniera plastica generalizzata: Dominio di ammissibilità N-M

$$M = M_0\left[1-\left(\frac{N}{N_0}\right)^2\right], \quad M > 0$$

Il termine entro parentesi quadra è interpretabile come il coefficiente che misura la riduzione della resistenza flessionale dovuta allo sforzo assiale. Valori di N/N_0 non troppo elevati causano variazioni modeste (per $N = .2\, N_0$ si ottiene $M = .96 M_0$).

Questa caratteristica risulta comune a tutte le *sezioni doppiamente simmetriche anche se le espressioni sono ovviamente diverse.*

Per sezioni con un solo asse di simmetria la dipendenza è più sensibile (L. Corradi p. 27)

Cerniera plastica generalizzata

Procedendo in modo analogo anche per M<0 si ottiene la funzione limite o di snervamento f(N,M)

$$f(N,M) = \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 + \left|\frac{M}{M_0}\right| - 1 = 0$$

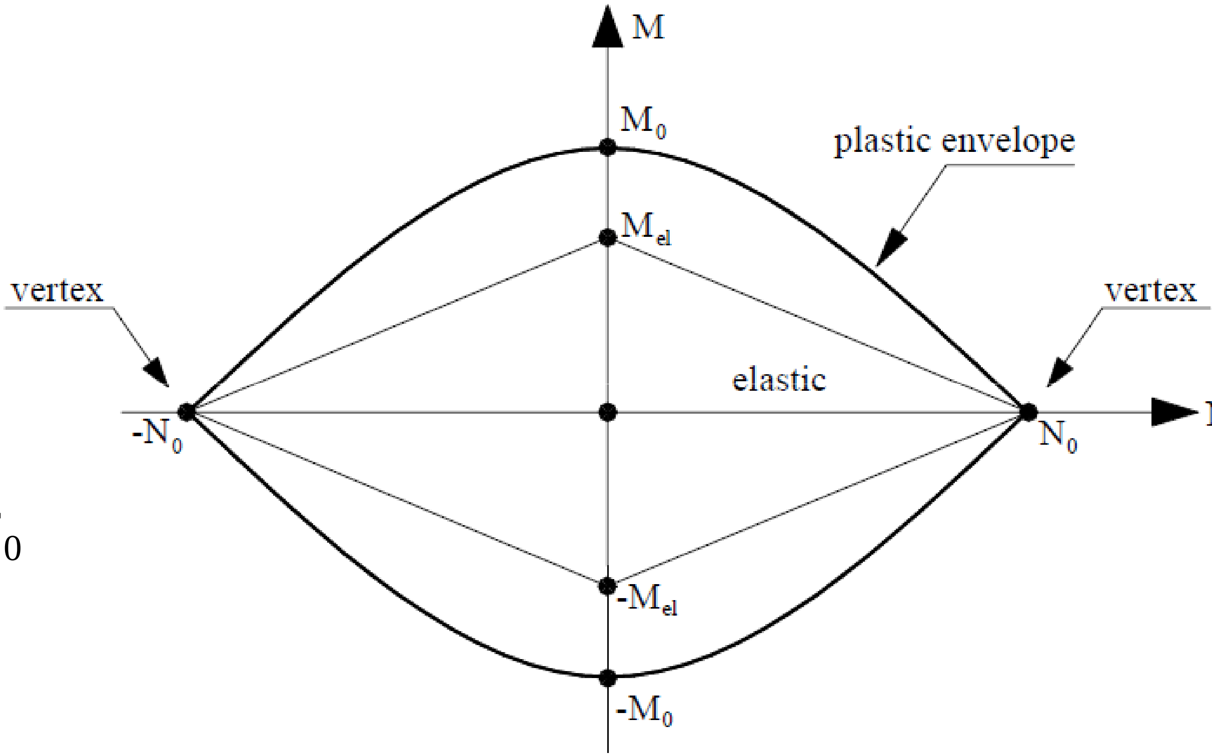
funzione di snervamento e il dominio limite elastico

Il dominio limite elastico si ottiene dalle seguenti diseguaglianze

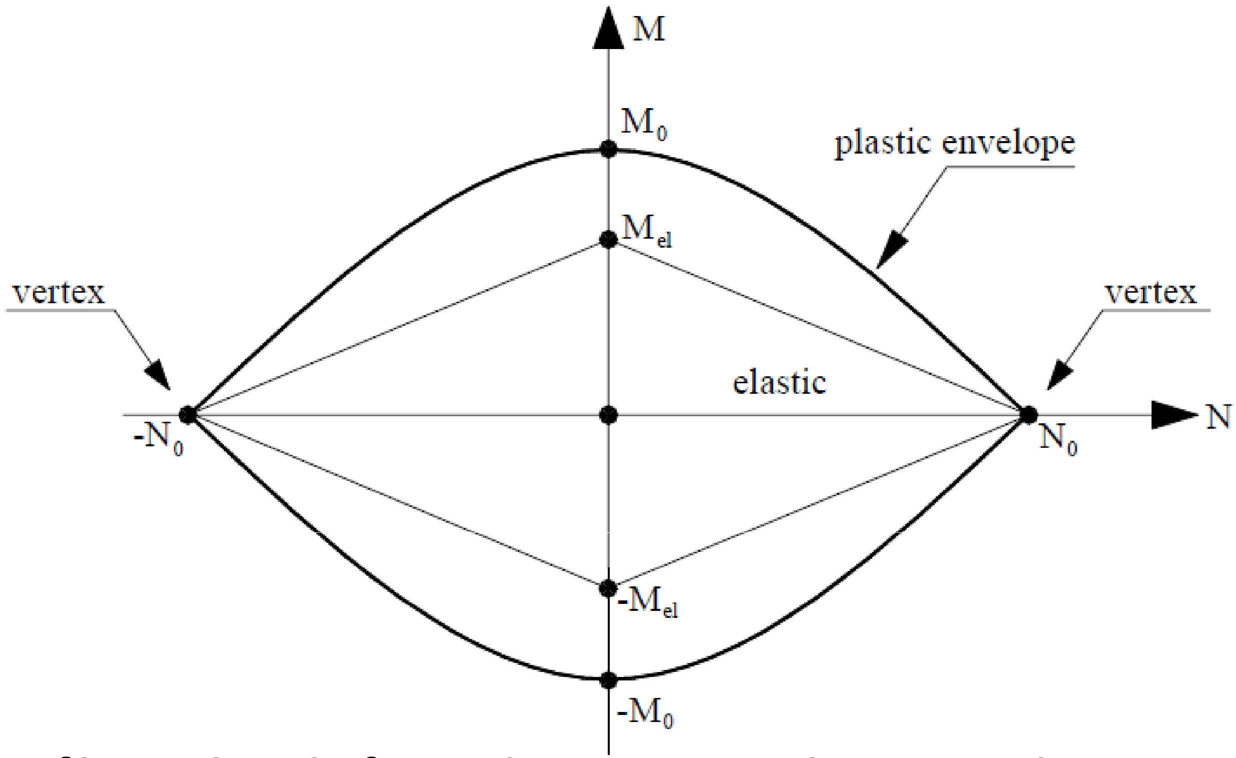
$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_{el}} \leq \sigma_0$$

$$\sigma_{min} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W_{el}} \geq -\sigma_0$$

$$\left| \frac{N}{\sigma_0 A} \pm \frac{M}{\sigma_0 W_{el}} \right| \leq 1$$



funzione di snervamento e il dominio limite elastico



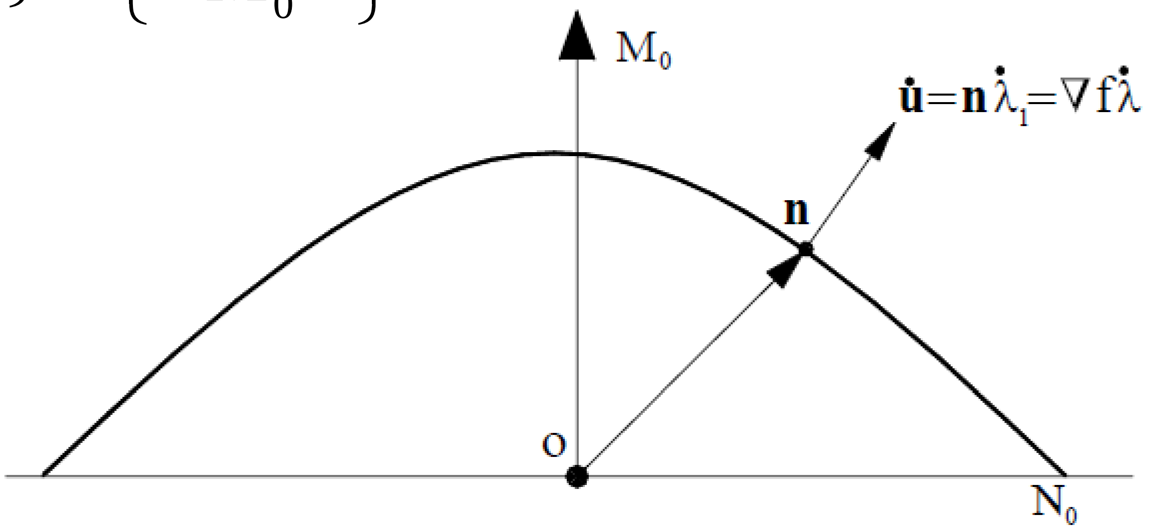
nel caso di sezioni doppiamente simmetrica anche il dominio presenta due assi di simmetria

per sezioni con un solo asse di simmetria gli assi di simmetria del dominio limite elastico non sono più due

Flusso plastico e legge di normalità

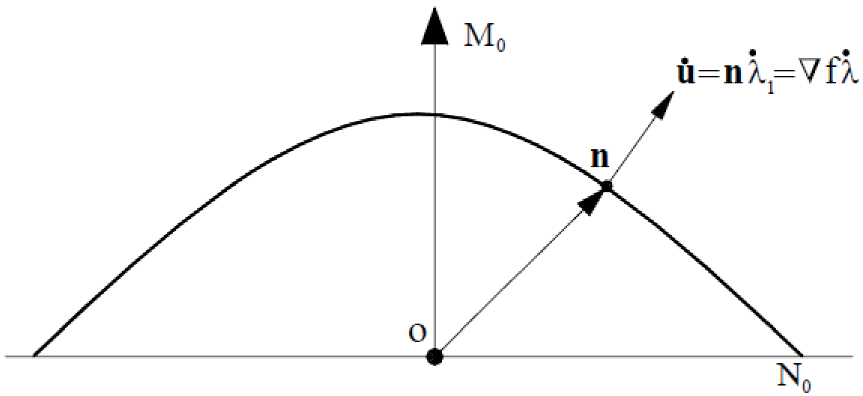
Come noto assegnata una generica funzione f(N,M)=0 il gradiente di essa rappresenta la normale esterna al dominio di cui essa rappresenta la frontiera

$$\nabla f = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial N} \\ \dfrac{\partial f}{\partial M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{2}{N_0} \dfrac{N}{N_0} \\ \dfrac{1}{M_0} \end{Bmatrix} = |\nabla f| n$$



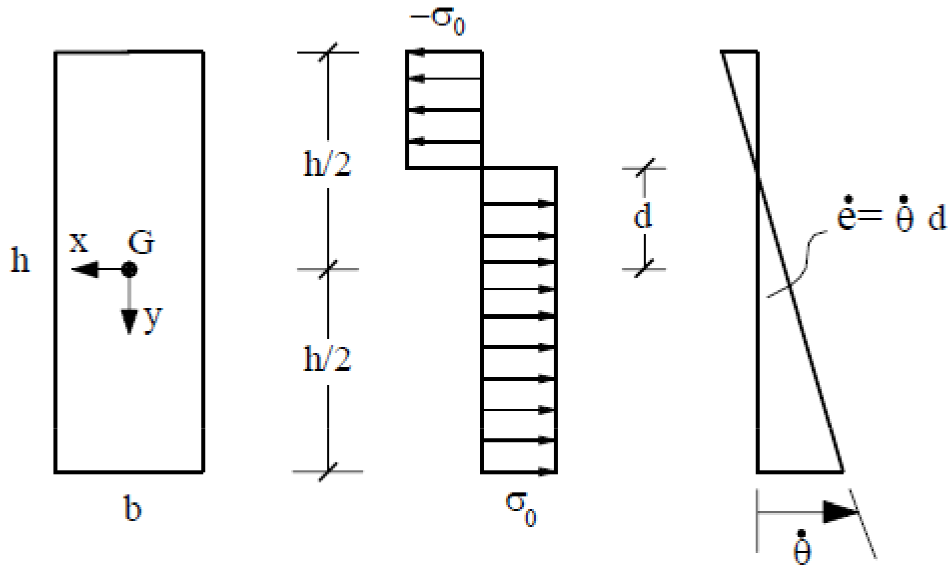
Flusso plastico e legge di normalità

Si intende dimostrare che l'atto di moto generalizzato nella cerniera, che presenta una deformazione assiale ε ed una rotazione relativa θ, $\dot{u} = \{\dot{\varepsilon}, \dot{\theta}\}^T$ ***è diretto secondo la normale al dominio di ammissibilità plastica.***



Flusso plastico e legge di normalità

Ricordando l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane si può scrivere:



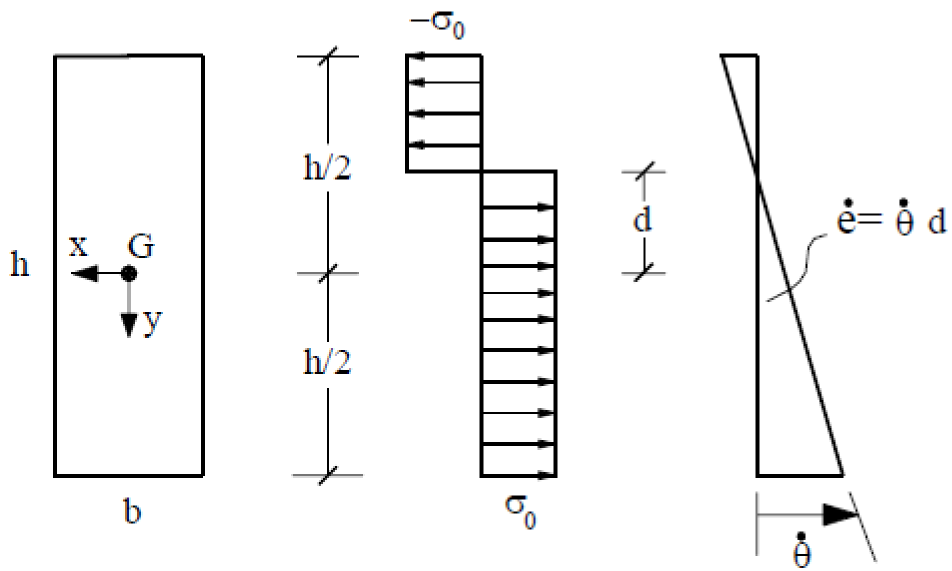
$$\Rightarrow \dot{u} = \begin{Bmatrix} d \\ l \end{Bmatrix} \dot{\theta}$$

$$d = \frac{N}{N_0}\frac{h}{2} \Rightarrow \dot{u} = \begin{Bmatrix} \frac{N}{N_0}\frac{h}{2} \\ l \end{Bmatrix} \dot{\theta}$$

Flusso plastico e legge di normalità

Poichè

$$\dot{u} = \begin{Bmatrix} \dfrac{N}{N_0} & \dfrac{h}{2} \\ & 1 \end{Bmatrix} \dot{\theta}$$



Moltiplicando e dividendo per M0 si ottiene

$$\dot{u} = \begin{Bmatrix} \dfrac{N}{N_0} & \dfrac{h}{2M_0} \\ & \dfrac{1}{M_0} \end{Bmatrix} M_0 \dot{\theta}$$

Flusso plastico e legge di normalità

Poiché $h=4M_0/N_0$ si ottiene

$$\dot{u} = \begin{Bmatrix} \dfrac{N}{N_0}\dfrac{h}{2M_0} \\ \dfrac{1}{M_0} \end{Bmatrix} M_0\dot{\theta} = \nabla f\ \dot{\lambda} = n\left|\nabla f\right|\dot{\lambda} = n\dot{\lambda}_1$$

Si può pertanto affermare che il flusso plastico è diretto secondo la normale alla curva

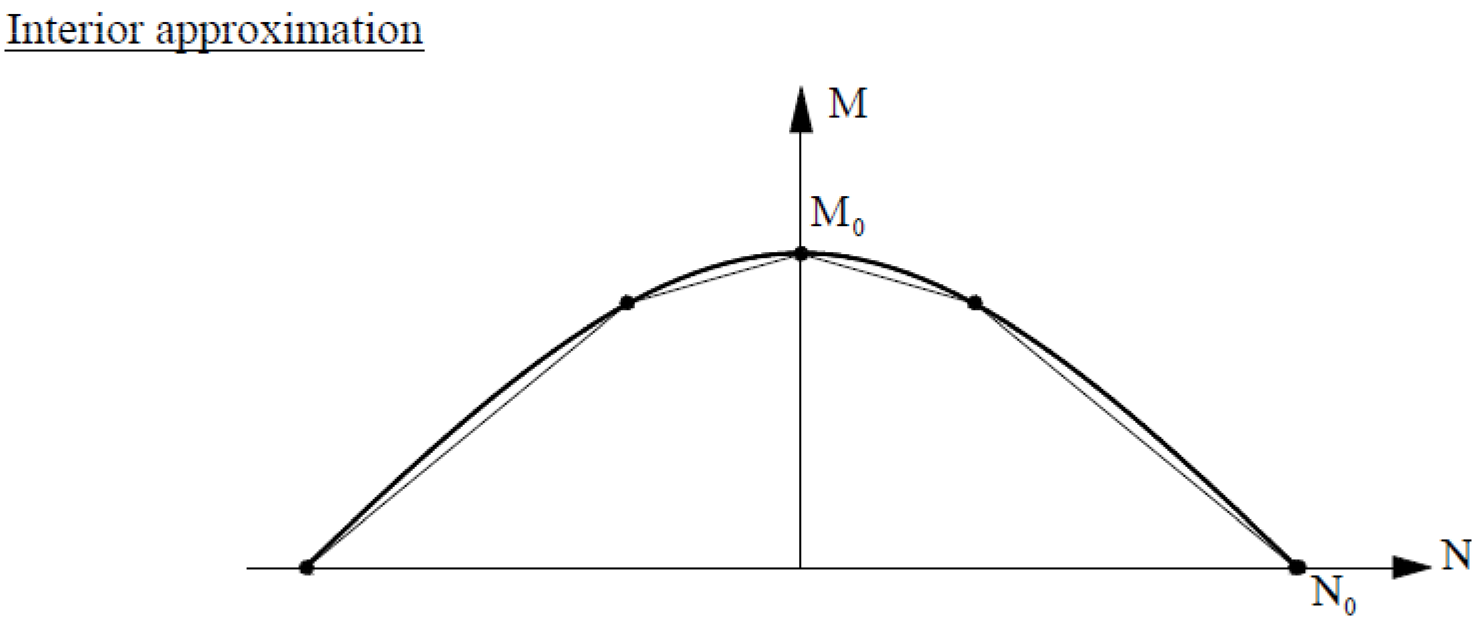
Approssimazione lineare a tratti (piecewise-linear) della funzione di snervamento

Per poter applicare gli algoritmi di programmazione lineare alla determinazione del moltiplicatore di collasso è necessario trasformare la funzione f(N,M)=0, che è non lineare, in un poligono i cui lati sono espressi da funzioni lineari di N e M.

Di seguito, vengono rappresentate una approssimazione interna (poligono inscritto) che fornisce un moltiplicatore di collasso μ_{int} ed una esterna (poligono circoscritto) che fornisce un moltiplicatore di collasso μ_{ext}.

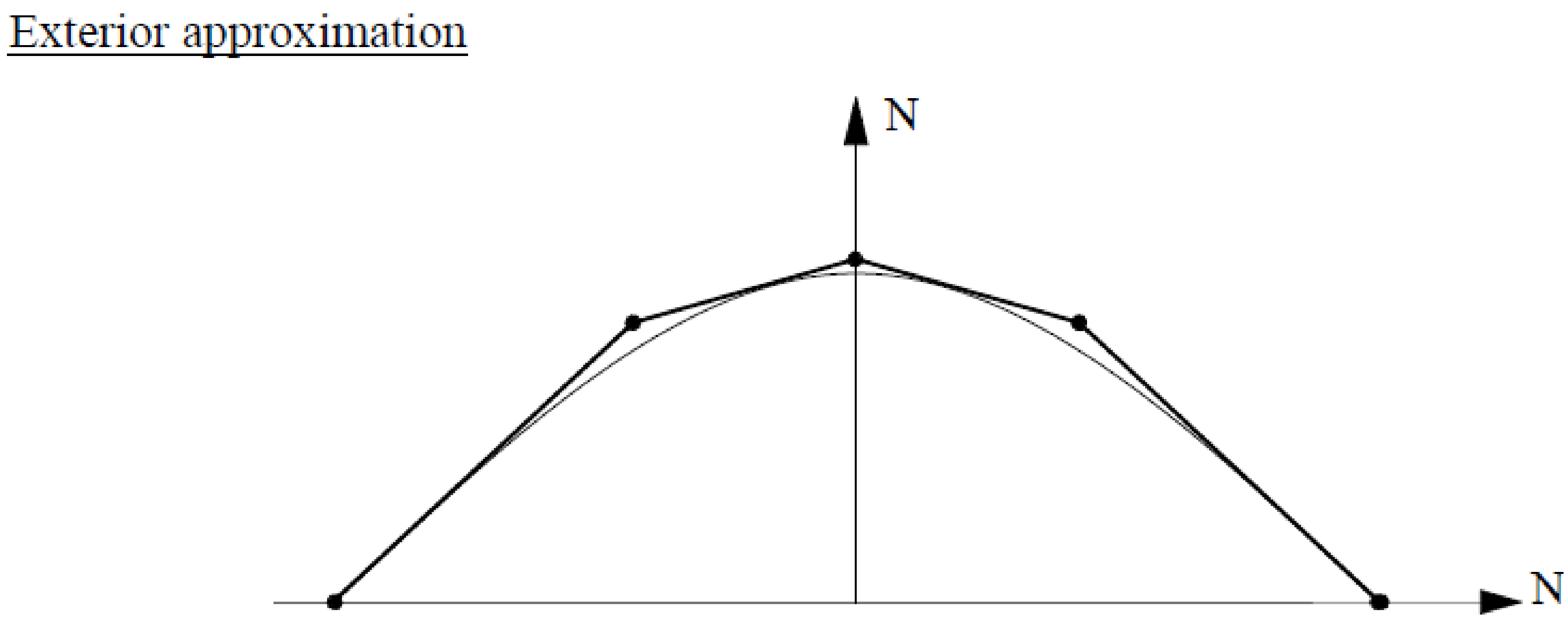
Approssimazione lineare a tratti (piecewise-linear) della funzione di snervamento

approssimazione interna (poligono inscritto) che fornisce un moltiplicatore di collasso μ_{int}



Approssimazione lineare a tratti (piecewise-linear) della funzione di snervamento

Approssimazione esterna (poligono circoscritto) che fornisce un moltiplicatore di collasso μ_{ext}.



Approssimazione lineare a tratti (piecewise-linear) della funzione di snervamento

Si può dimostrare in virtù del V corollario dei teoremi dell'analisi limite che risulta:

$$\boxed{\mu_{\mathrm{int,s}} \leq \mu_{\mathrm{int}} \leq \mu_{\mathrm{c}} \leq \mu_{\mathrm{ext}} \leq \mu_{\mathrm{ext,k}}}$$

Criteri di snervamento e di crisi pluri-assiali

Scienza delle Costruzioni (L. Gambarotta, L. Nunziante, A. Tralli, capitolo 7, pp. 485-520).

Supposto di poter considerare un comportamento plastico e sufficientemente duttile per il materiale solido in (materiali metallici, terreni) , la funzione di snervamento (yield surface) $f(\sigma) = 0$ definisce l'insieme degli stati di tensione per cui il materiale presenta flusso plastico:

$f(\sigma) < 0$ Stato elastico

$f(\sigma) = 0$ Stato plastico

$f(\sigma) > 0$ Stato non supportato dal materiale

Criteri di snervamento e di crisi pluri-assiali

Per semplicità si considereranno solo materiali che presentano *funzioni di snervamento di tipo isotropo (ovvero uguali in tutte le direzioni) che dipendono pertanto solo dalle* tensioni principali e/o dagli invarianti di tensione

si faccia riferimento al tensore degli sforzi di Cauchy σ per cui si ha

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\,;$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma})^2 - \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^2\right] = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\,;$$

$$I_3 = \det\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Criteri di snervamento e di crisi pluri-assiali

Si utilizza anche il tensore deviatorico $\sigma^D = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}$ **tale che**

$$J_1 = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^D = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{D2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_1^{D2} + \sigma_2^{D2} + \sigma_3^{D2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]$$

$$J_3 = \det \boldsymbol{\sigma}^D = \sigma_1^D \sigma_2^D \sigma_3^D\,.$$

Principali criteri usati

Criterio di snervamento di Huber-Henky -von Mises

$$f(J_2) = \sqrt{J_2} - \tau_0 = 0$$

Dove τ_0 **è un parametro del materiale**

Criterio di snervamento di Tresca

$$\max|\tau| = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) = \tau_0 \qquad (\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III})$$

$$f(I_1, J_2, J_3) = 4J_2^3 - 27\,J_3^2 + 36\,\tau_0^4 J_2 + 96\tau^4 J_2 - 64\tau_0^6 = 0\,.$$

Principali criteri usati

Criterio di snervamento di Mohr-Coulomb

$$\max|\tau| = c - \sigma \ \mathrm{tg}\varphi$$

c=coesione; φ=angolo di attrito interno

Criterio di snervamento di Drucker-Prager

$$f(I_1, I_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \tau_0 = 0$$

Il comportamento dei continui in campo plastico

Si vuole estendere al caso dei continui i risultati ottenuti per travi ed aste

Si assumano le seguenti ipotesi :

- **Mentre nel caso mono-assiale si possono avere deformazioni plastiche se e solo se $\sigma = \sigma_0$, in generale è possibile uno stato di deformazione plastica caratterizzato dal tensore ε_p solo se il tensore degli sforzi σ, che rappresenta un punto nello spazio delle tensioni, verifica la condizione di snervamento:**

$$f(\sigma)=0.$$

Il comportamento dei continui in campo plastico

- **Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, come nel caso mono-assiale, il tensore di deformazione ε può essere decomposto nella somma di una parte elastica ε_e e di una parte plastica ε_p *(decomposizione additiva):***

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

- **Il tensore degli sforzi σ dipende linearmente dal tensore delle deformazioni elastiche ε_e**

$$\sigma = C\, \varepsilon_e$$

Avendo indicato con $C = C^T$ il tensore costitutivo (iper)elastico, simmetrico e definito positivo.

- **Materiale plastico incrementale standard**

Postulato della Massima Dissipazione - Hill

Nel caso mono-assiale, il postulato della massima dissipazione risulta una semplice conseguenza delle condizioni di ammissibilità plastica
nel caso generale, esso deve essere assunto a priori

$\dot{\varepsilon}_p$ ***indichi un generico stato di deformazione plastica incrementale, fra tutti gli stati di tensione ammissibili*** σ^* ***, lo stato di tensione effettivo*** σ ***rende massima la potenza dissipata***

$$\max \sigma^{*T} \dot{\varepsilon}_p = \sigma^T \dot{\varepsilon}_p = D(\dot{\varepsilon}_p)$$

Conseguenze del Postulato di Hill

I materiali il cui comportamento verifica questo postulato vengono detti materiali standard.
Per questi materiali in conseguenza del postulato di Hill risultano verificate una serie di proprietà.
Esse risultano inoltre verificate anche dal dominio di interazione N-M

- **Convessità della superficie di snervamento f(σ)**
- **Legge di normalità del flusso**

Conseguenze del Postulato di Hill

Convessità della superficie di snervamento $f(\sigma)$

***Convessità: un dominio di snervamento è convesso se dati due stati di tensione* ammissibili σ_1 ed σ_2 risulta ammissibile un qualunque stato**

$$\sigma = \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 \quad (0<\alpha,\ \beta<1,\ \alpha+\beta=1)$$

ottenuto mediante una loro combinazione lineare

Conseguenze del Postulato di Hill

Legge di normalità del flusso plastico associato

La direzione del flusso plastico è diretta secondo la normale alla superficie di snervamento.
E ciò viene usualmente definita "Legge di normalità o flusso plastico associato"
Come conseguenza del postulato di Hill risulta

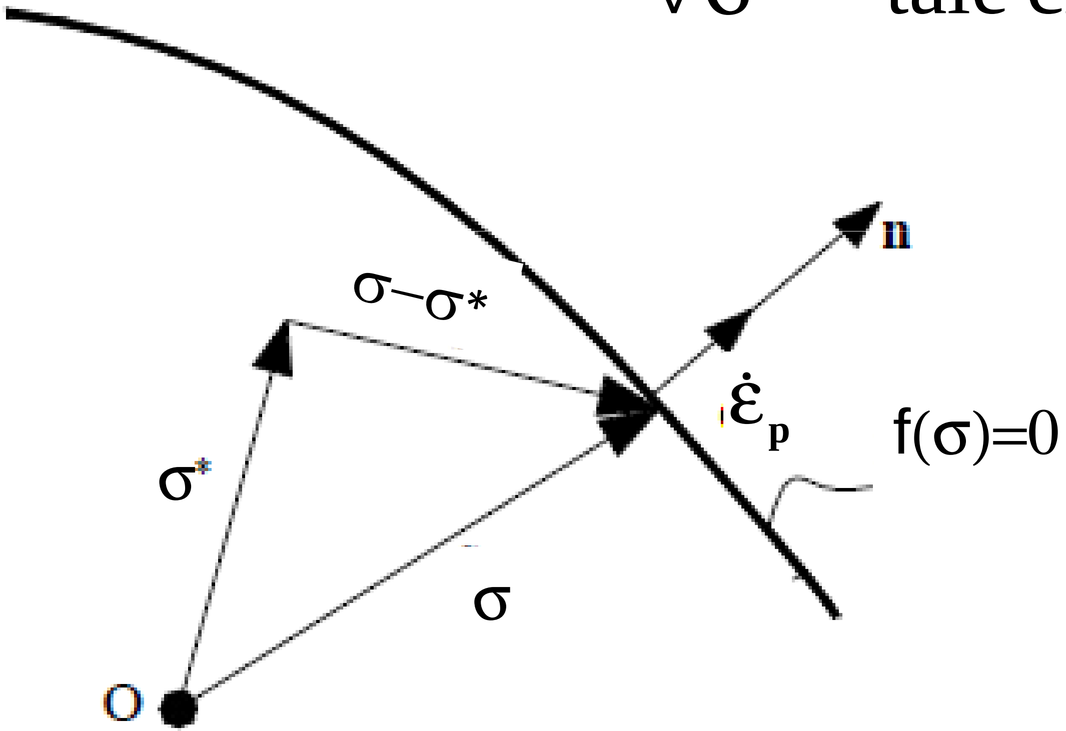
$$\sigma^{*T}\dot{\varepsilon}_p \leq \sigma^T\dot{\varepsilon}_p \quad \Rightarrow \quad (\sigma - \sigma^*)^T\dot{\varepsilon}_p \geq 0$$

Dove σ* è un qualunque stato tale che f(σ*)<=0 e σ è t.c. che massimizza la dissipazione

Conseguenze del Postulato di Hill

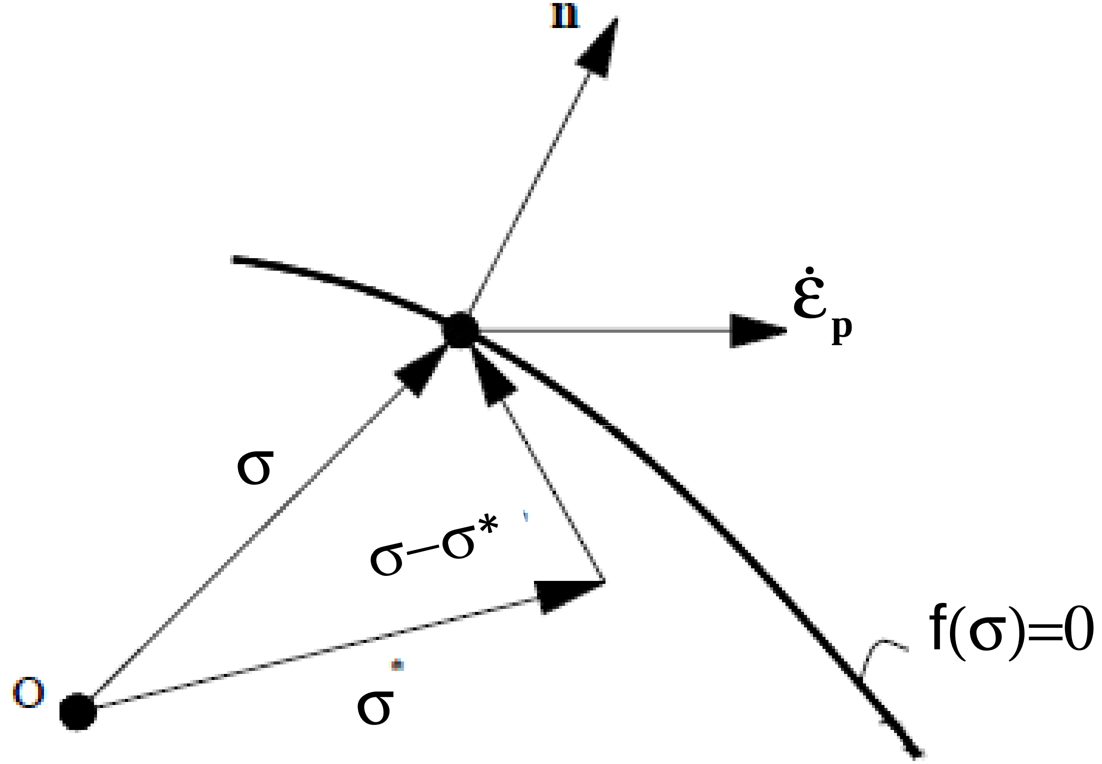
$$(\sigma - \sigma^*)^T \dot{\varepsilon}_p \geq 0$$

$$\forall \sigma^* \quad \text{tale che } f(\sigma^*) \leq 0$$



Conseguenze del Postulato di Hill

Se venisse violato il principio di normalità

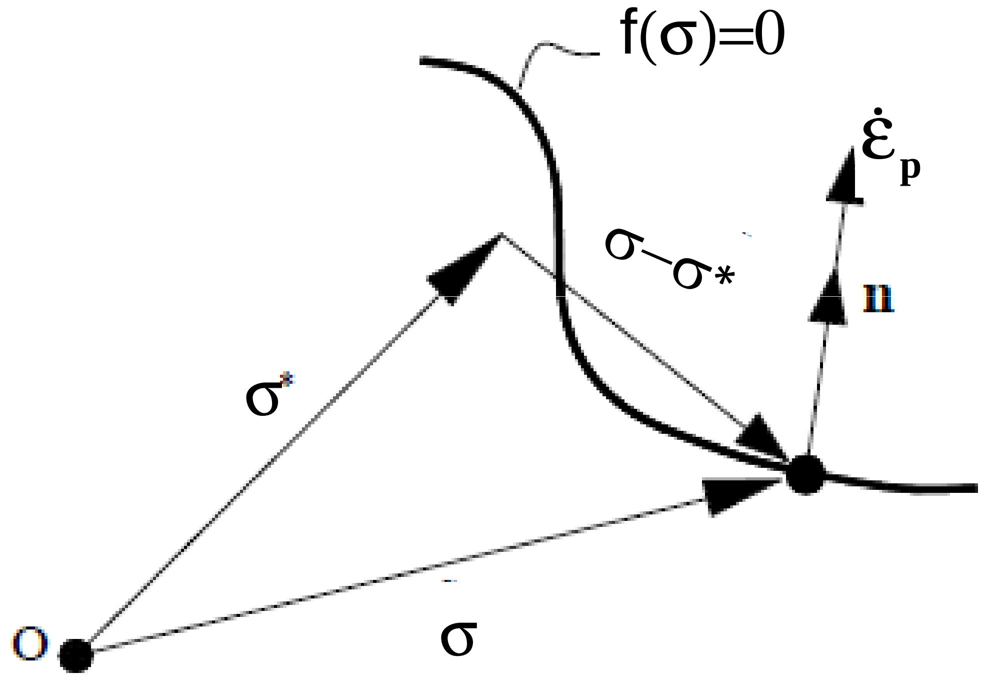


Verrebbe violato il postulato di Hill

$$(\sigma - \sigma^*)^T \dot{\varepsilon}_p < 0$$

Conseguenze del Postulato di Hill

Se venisse violato la convessità



Verrebbe violato il postulato di Hill

$$(\sigma - \sigma^*)^T \dot{\varepsilon}_p < 0$$

Osservazioni

Nel testo di L. Corradi, a pag. 53, la relazione

$$(\sigma - \sigma^*)^T \dot{\varepsilon}_p \geq 0$$

viene assunta come ipotesi indipendente e definita ***Postulato di Stabilità di Drucker.***

Conviene ricordare come Drucker sulla base di considerazioni di carattere termodinamico abbia proposto due disuguaglianze.

I diseguaglianza di Drucker

I disuguaglianza o stabilità in piccolo.

$$\sigma^{T}\dot{\varepsilon}_{p} \geq 0$$

Questa condizione esprime semplicemente che occorre fornire dall'esterno energia per modificare lo stato di deformazione del materiale. Si osservi tuttavia che un materiale che in una prova mono-assiale presenta un tratto softening (tratto discendente nella curva carico-spostamento) viene a violare questa disuguaglianza. Tuttavia per ottenere una curva carico spostamento softening occorre sottoporre il campione sperimentale (di cls o di qualunque altro materiale elasto-fragile ad una prova a spostamento controllato in grado di seguire il materiale in un tratto instabile

II diseguaglianza di Drucker

Il secondo principio della termodinamica (disuguaglianza di Clausius-Duhem) richiede peraltro che sia non negativa la potenza lungo un qualunque ciclo chiuso nello spazio delle deformazioni.
Se si considera un ciclo a partire da un generico punto di tensione σ* interno alla funzione di snervamento fino a giungere al punto di tensione σ sulla superficie esterna, poiché il lavoro associato alle deformazioni elastiche è nullo perché uguale nei due sensi, la potenza dissipata totale risulta

$$(\sigma - \sigma^*)^T \dot{\varepsilon}_p \geq 0$$

Osservazioni sulla legge di normalità

La legge di normalità si scrive

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda}\mathbf{n} \qquad \dot{\lambda}\ \textbf{moltiplicatore plastico}$$

In alcuni casi , e.g. i terreni che presentano fenomeni di dilatanza ovvero i materiali di tipo attritivo, le deformazioni plastiche non sono dirette lungo la normale a f. Leggi di flusso di questo tipo vengono dette leggi di *flusso non associate :*

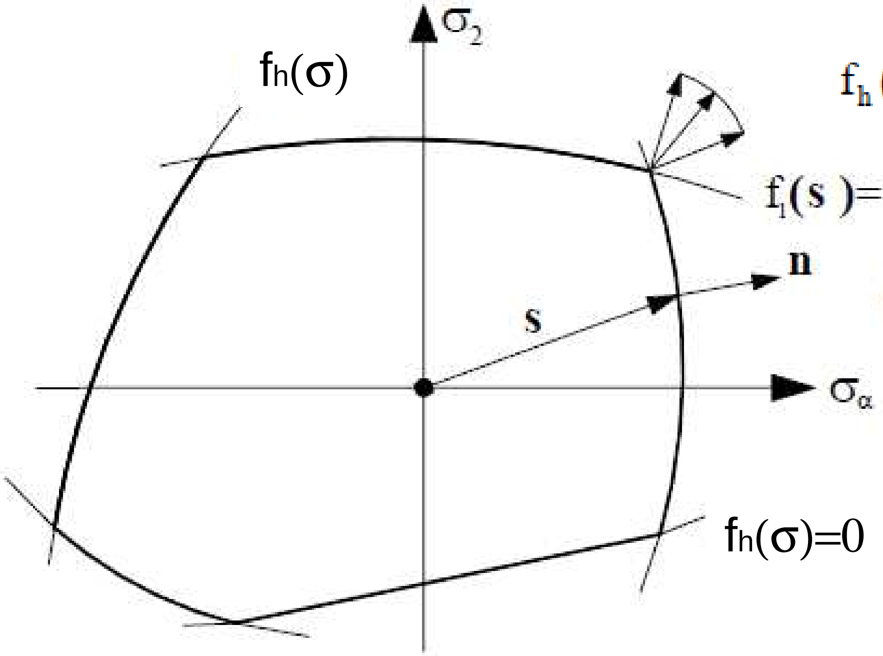
$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \sigma} = \dot{\lambda}\mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \neq \mathbf{n}$$

La funzione g(σ) viene definita *potenziale plastico e nel caso associato il potenziale viene assunto* coincidere con la funzione di snervamento: g(σ) = f(σ)

Osservazioni sulla legge di normalità

In un punto angoloso della superficie limite dove f è non differenziabile (punti angolosi sono presenti in vari criteri e.g. Tresca, Mohr-Coulomb) il postulato della massima dissipazione implica che $\dot{\varepsilon}_{\mathbf{p}}$ deve appartenere al cono delle normali uscenti

$$\dot{\varepsilon}_{\mathbf{p}} = \dot{\lambda}_{\mathbf{i}} \mathbf{n}_{\mathbf{i}} \qquad \dot{\lambda}_{\mathbf{i}} \geq 0$$



$$f_h(\boldsymbol{\sigma}) = 0\,,\ h=1,n \Rightarrow \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad \mathbf{f} = \{f_1 \ldots\ldots f_n\}^T$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \sum_1^n {}_h\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ph} = \sum_1^n {}_h\left(\frac{\partial f_h}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\dot{\lambda}_h = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right]^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{G}\,\dot{\lambda}$$

Equazioni costitutive elasto-plastiche

Qualitativamente continuano a valere tutte le considerazioni fatte in precedenza per le equazioni costitutive mono-assiali , occorre tuttavia tener conto del fatto che lo stato di tensione e di deformazione sono ora rappresentati da due grandezze tensoriali σ e ε

Equazioni costitutive elasto-plastiche

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}})$$

Legge costitutiva elasto-plastica

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda} \qquad \dot{\lambda} \geq 0$$

Legge di flusso associata

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$$

Condizioni di carico-scarico

Karush Kuhn Tucker conditions

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\lambda} = \dot{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\lambda} = 0$$

Consistency conditions

Equazioni costitutive elasto-plastiche

Si ha *risposta elastica del materiale se il punto tensione* è :
a- all’interno del dominio di ammissibilità

$$\mathbf{f}(\sigma) < 0 \quad \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{\mathbf{p}} = 0$$

b- sulla superficie di snervamento ma è in atto uno scarico elastico

$$\mathbf{f}(\sigma) = 0 \;\mathbf{e}\; \dot{\mathbf{f}} < 0 \quad \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{\mathbf{p}} = 0$$

Si ha una *risposta plastica se il punto è sulla superficie e non tende rientrare in campo elastico*.

$$\mathbf{f}(\sigma) = 0 \;\mathbf{e}\; \dot{\mathbf{f}} = 0 \quad \Rightarrow \dot{\lambda} > 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{\mathbf{p}} > 0$$

Tensore costitutivo elasto-plastico

A- nel caso in cui il punto si trovi all'interno del dominio si ha l'equazione costitutiva elastica

$$f(\sigma) < 0 \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_p = 0, \dot{\varepsilon}_e = \dot{\varepsilon}$$

$$\boxed{\Rightarrow \dot{\sigma} = C\dot{\varepsilon}}$$

Tensore costitutivo elasto-plastico

B- nel caso in cui il punto si trovi sulla superficie del dominio, f(σ)=0 si hanno 2 casi ulteriori

B1 lo stato di tensione si mantiene sulla superficie limite

$$\dot{f}(\sigma) = \frac{\partial f}{\partial \sigma}\dot{\sigma} = 0$$

L'equazione costitutiva elastica è

$$\dot{\sigma} = C(\dot{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \sigma}\dot{\lambda}) = 0$$

Procedendo come riportato nel seguito, in analogia al modulo elasto-plastico E_{ep} del caso mono-assiale, è utile definire in vista di analisi agli elementi finiti il tensore costitutivo elasto-plastico Cep.

Tensore costitutivo elasto-plastico

$$\dot{\mathbf{f}}(\sigma) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma}\dot{\sigma} = 0 \qquad\qquad \dot{\sigma} = C\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \sigma}\dot{\lambda}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^{T} C\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \sigma}\dot{\lambda}\right) = 0 \quad \Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^{T} C\dot{\varepsilon}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^{T} C\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)} > 0$$

poichè $\dot{\lambda} > 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma}\mathbf{C}\dot{\varepsilon} > 0$

Tensore costitutivo tangente elasto-plastico

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \mathbf{C}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \mathbf{C}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \mathbf{C}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)}\mathbf{C}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T\right]\mathbf{C}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}_{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C} - \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \mathbf{C}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)}\mathbf{C}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T\right]\mathbf{C}$$

Tensore costitutivo tangente elasto-plastico

Tensore costitutivo elasto-plastico

B2 lo stress ritorna dentro il dominio elastico dalla superficie

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T C\dot{\varepsilon} < 0$$

Si ha lo scarico elastico

Esempio: le equazioni di Prandtl-Reuss

Von Mises yield function $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2} - \tau_0 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{2\tau_0} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{1}{2\tau_0}\boldsymbol{\sigma}^D\dot{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \dot{\Delta}_p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{p1} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{p2} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{p3} = 0 \text{ plastic incomp}$$

$$\Rightarrow \mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C} - \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^{DT}\mathbf{C}\,\boldsymbol{\sigma}^D}\mathbf{C}\left[\boldsymbol{\sigma}^D\ \boldsymbol{\sigma}^{DT}\right]\mathbf{C}$$

<u>Elastic isotropy</u>

- $\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}^D = 2G\boldsymbol{\sigma}^D$ $\qquad G = \dfrac{E}{2(1+v)}$ Shearing elastic modulus
- $\mathbf{C}\left[\boldsymbol{\sigma}^D\ \boldsymbol{\sigma}^{DT}\right]\mathbf{C} = \left[\mathbf{c}\boldsymbol{\sigma}^D\right]\left[\boldsymbol{\sigma}^{DT}\mathbf{C}\right] = \left[\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}^D\right]\left[\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}^D\right]^T = 4G^2\left(\boldsymbol{\sigma}^D\boldsymbol{\sigma}^{DT}\right)$
- $\boldsymbol{\sigma}^{DT}\ \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}^D = 2G\,\boldsymbol{\sigma}^{DT}\boldsymbol{\sigma}^D = 2G\cdot 2J_2 = 4G\,\tau_0^2$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C} - \frac{G}{\tau_0^2}\left[\boldsymbol{\sigma}^D\ \boldsymbol{\sigma}^{DT}\right]}$$

Modelli di incrudimento

Per descrivere l'evolversi della superficie di snervamento al variare della storia di deformazione si assume che essa dipenda anche dalla parte plastica della deformazione oltre che dallo stress

$$f(\sigma, \varepsilon_p) = 0$$

Incrudimento isotropo

Si assume che la funzione di snervamento dipenda da una variabile scalare χ (work hardening) ed evolva in modo omotetico

$$\chi(\varepsilon_p) = \int_0^{\varepsilon_p} \sigma^t \, d\varepsilon_p$$

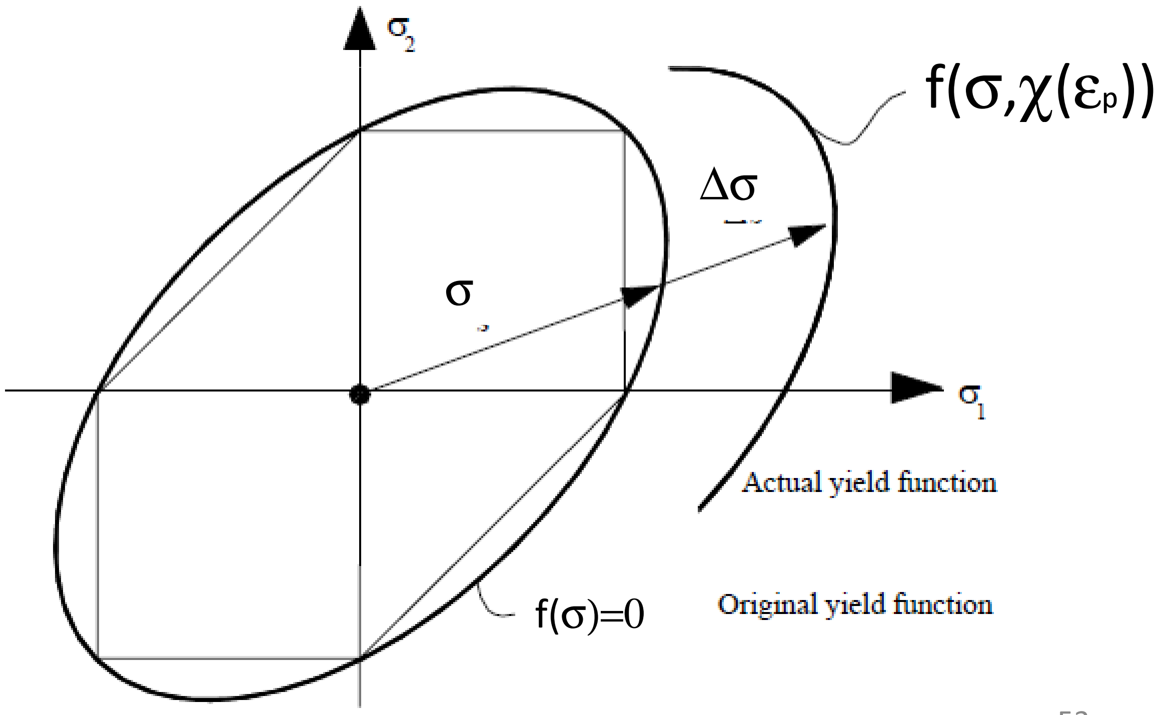


Fig.2.115

Incrudimento isotropo

$$\chi(\varepsilon_p) = \int_0^{\varepsilon_p} \sigma^t \mathbf{d}\varepsilon_p \quad \Rightarrow \quad d\chi(\varepsilon_p) = \sigma^t d\varepsilon_p$$

Per un punto sulla superficie di snervamento

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma}\dot{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \chi}\dot{\chi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma}\dot{\sigma} - \mathbf{h}\sigma^t \dot{\varepsilon}_p = 0 \qquad \mathrm{h} = -\frac{\partial f}{\partial \chi}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \mathbf{C}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) + \mathrm{h}\boldsymbol{\sigma}^T\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\right]}_{D}\dot{\lambda}$$

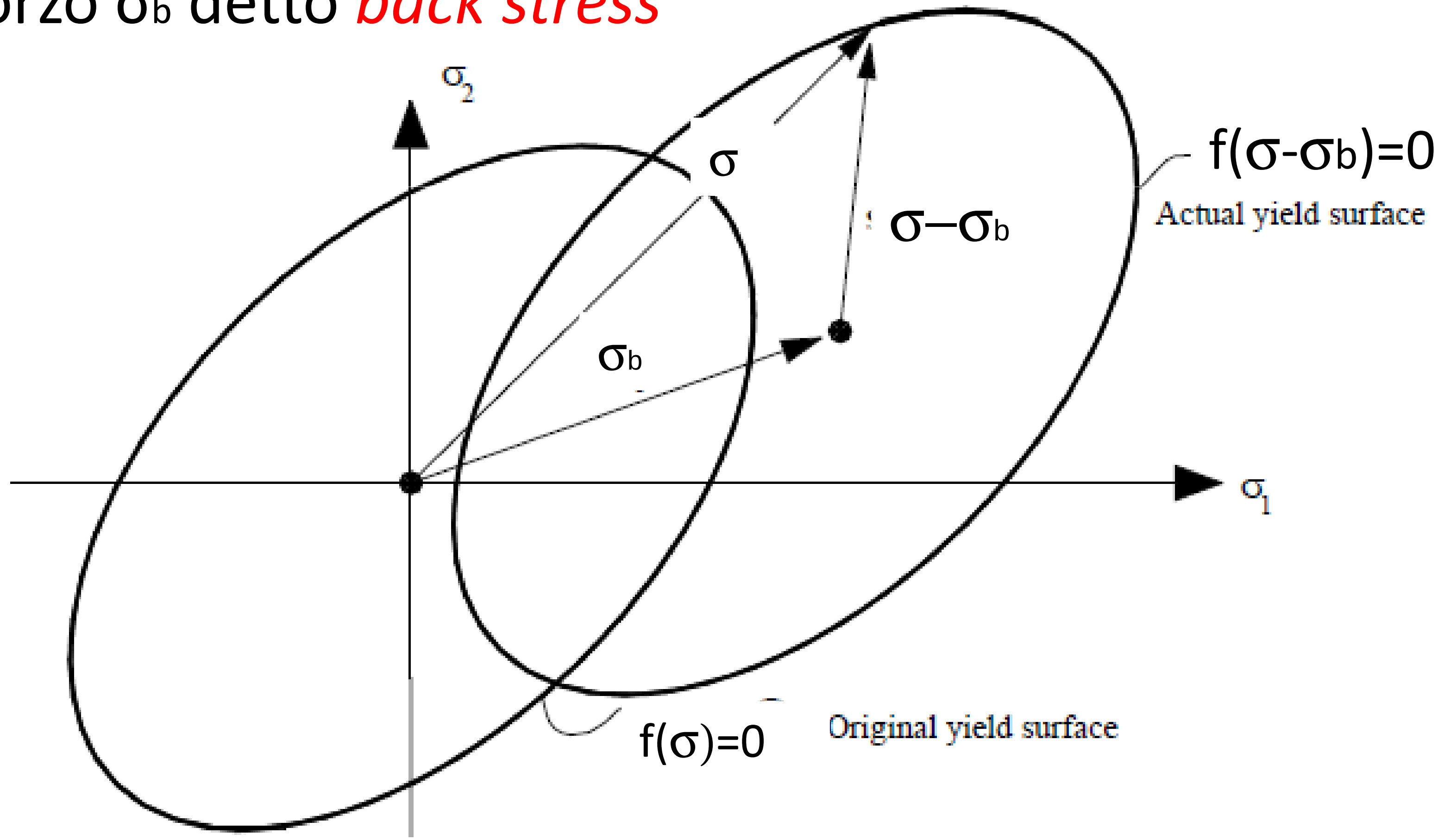
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{1}{D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \mathbf{C}\right]\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C} - \frac{1}{D}\mathbf{C}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T\right]\mathbf{C}$$

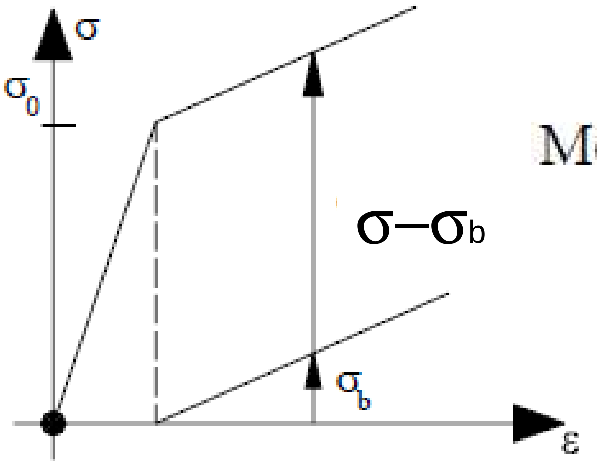
tensore tangente elasto-plastico

Incrudimento cinematico

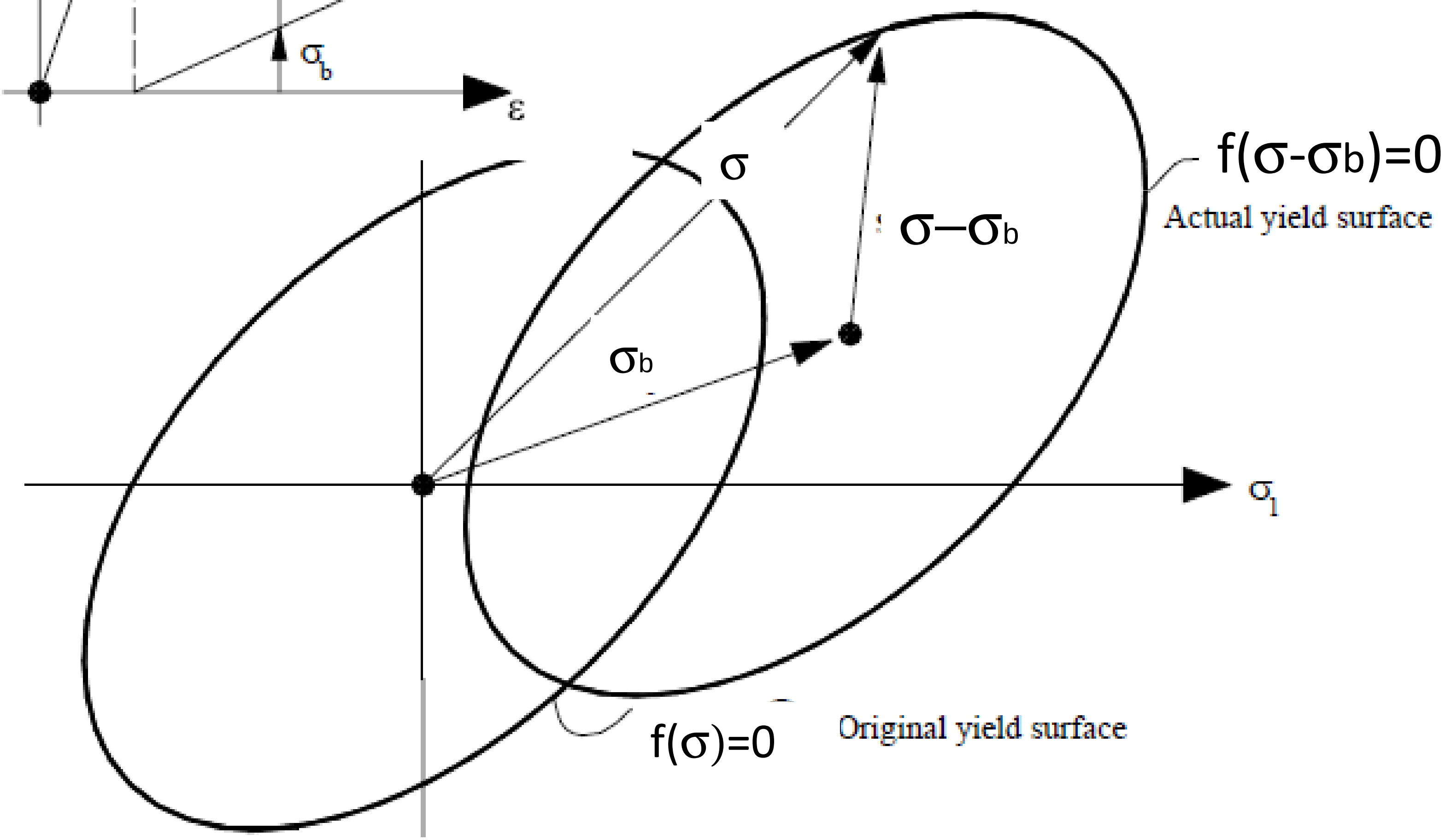
Per descrivere l'effetto Bauschinger si trasla l'origine degli assi nello spazio delle tensioni in cui è definita la funzione di snervamento f di uno stato di sforzo σ_b detto *back stress*



Incrudimento cinematico

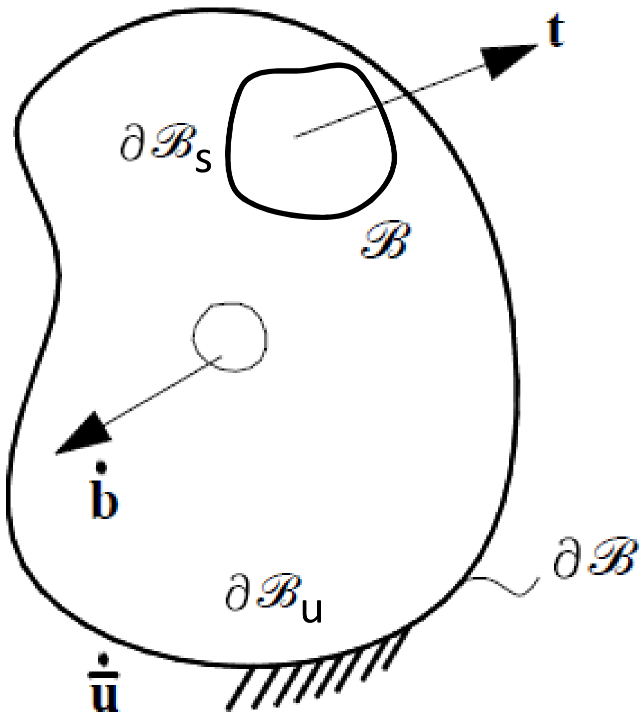


Melon- Prager hardening rule $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_b = C\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$



I teoremi dell'analisi limite

Si consideri un solido di materiale rigido-perfettamente-plastico standard , esso occupi il volume *B* dotato di superficie esterna $\partial B = \partial B_u \cup \partial B_s$ All'interno di esso siano assegnate forze di volume b mentre al bordo ∂B_s siano assegnate le forze di superficie t.



I teoremi dell'analisi limite per i continui

Quando lo stato di sforzo σ raggiunge in un punto la superficie limite si hanno deformazioni plastiche $\dot{\varepsilon}_p$ incrementali che soddisfano la legge di normalità (*flusso plastico associato)*

Quando diviene possibile un atto di moto infinitesimo che coinvolge tutto il corpo, od una sua parte, si ha il collasso incipiente

in questa condizione il corpo è ancora in equilibrio.

I teoremi dell'analisi limite per i continui

In analogia con quanto fatto in precedenza per i sistemi di travi conviene introdurre le seguenti definizioni

Stato di tensione staticamente ammissibile

Si definisce staticamente ammissibile uno stato di tensione σ_s equilibrato ed ammissibile in tutti i punti del corpo.
Un moltiplicatore dei carichi μ_s per cui questo possibile è detto moltiplicatore staticamente ammissibile.

$$B^T \dot{\sigma}_s + \mu_s \dot{b} = 0$$

$$\mu_s t = N \sigma_s$$

$$f(\sigma_s) \leq 0$$

I teoremi dell'analisi limite per i continui

Stato di velocità e deformazioni cinematicamente ammissibile

Le deformazioni plastiche devono essere compatibili, i.e essere derivabili da un campo di velocità sufficientemente regolare $\dot{u}$ in B che si annulli su ∂B_u

Un moltiplicatore dei carichi μ_k per cui diviene possibile un atto di moto si definisce cinematicamente ammissibile.

$$\dot{\varepsilon}_k = B\dot{u}_k = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_k \dot{\lambda}, \quad \dot{\lambda} \geq 0$$

$$\dot{u} = 0 \quad \text{su } \partial B_u$$

I teoremi dell'analisi limite per i continui

All'atto del collasso sono possibili moti relativi fra parti del corpo, perciò, al contrario di quanto accade nei corpi elastici, il campo di velocità $\dot{\mathbf{u}}$ può essere discontinuo su un numero finito di superfici. Il moltiplicatore cinematico viene definito uguagliando la potenza esterna

$$\dot{W}_{k,est} = \int_{B} b^T \dot{u}_k \, dV + \int_{\partial B} t^T \dot{u}_k \, dA$$

(necessariamente positiva) alla potenza interna D_{int} dissipata (via PLV)

$$\boxed{\mu_k = \frac{D_{int}}{\dot{W}_{k,est}} = \frac{\int_{B} D(\dot{\varepsilon}_k)\, dV}{\int_{B} b^T \dot{u}_k \, dV + \int_{\partial B} t^T \dot{u}_k \, dA}}$$

I teoremi dell'analisi limite per i continui

Il meccanismo di collasso μ_c è sia staticamente che cinematicamente ammissibile

Poichè si tratta di un meccanismo rigido plastico non si hanno deformazioni elastiche

I teoremi dell'analisi limite per i continui

Si enunciano nel seguito, senza riportarne la dimostrazione i teoremi fondamentali dell'analisi limite.

Teorema statico del calcolo a rottura (lower bound theorem)

Il moltiplicatore di collasso è il più grande fra quelli staticamente ammissibili

$\mu_c = \max \{ \mu_s \}$

Teorema cinematico del calcolo a rottura (upper bound theorem)

Il moltiplicatore di collasso è il più piccolo fra quelli cinematicamente ammissibili

$\mu_c = \min \{ \mu_k \}$

I teoremi dell'analisi limite per i continui

Per definizione lo stato di collasso incipiente è sia staticamente che cinematicamente ammissibile

$$\mu_s \leq \mu_c \leq \mu_k$$

Il moltiplicatore di collasso è quindi l'elemento di separazione tra i due insiemi di moltiplicatori

Il teorema statico dell'analisi limite è stato inizialmente enunciato agli inizi del secolo scorso (Kazinczy 1914, Kist 1914 , Gvodzev 1938). A quest'ultimo autore si deve anche il primo enunciato del teorema cinematico. La formulazione sopra riportata è sostanzialmente dovuta a lavori di Prager, Greenberg e Drucker del 1950.

Unicità dello stato di tensione e dei meccanismi al collasso

Si può dimostrare che la distribuzione della tensione al collasso è essenzialmente unica in quella parte di B ove il meccanismo di collasso dà luogo a deformazioni plastiche incrementali $\dot{\varepsilon}_p$
In particolare $\dot{\sigma}$ è univocamente determinato se la superficie di snervamento è strettamente convessa (non ha falde piane), altrimenti ad uno stesso valore di $\dot{\varepsilon}_p$ possono essere associati più incrementi di tensione.
Dove il materiale rimane rigido lo stato di tensione non è determinabile
Il meccanismo di collasso non è necessariamente unico, ma è univocamente determinato il moltiplicatore di collasso μ_c.