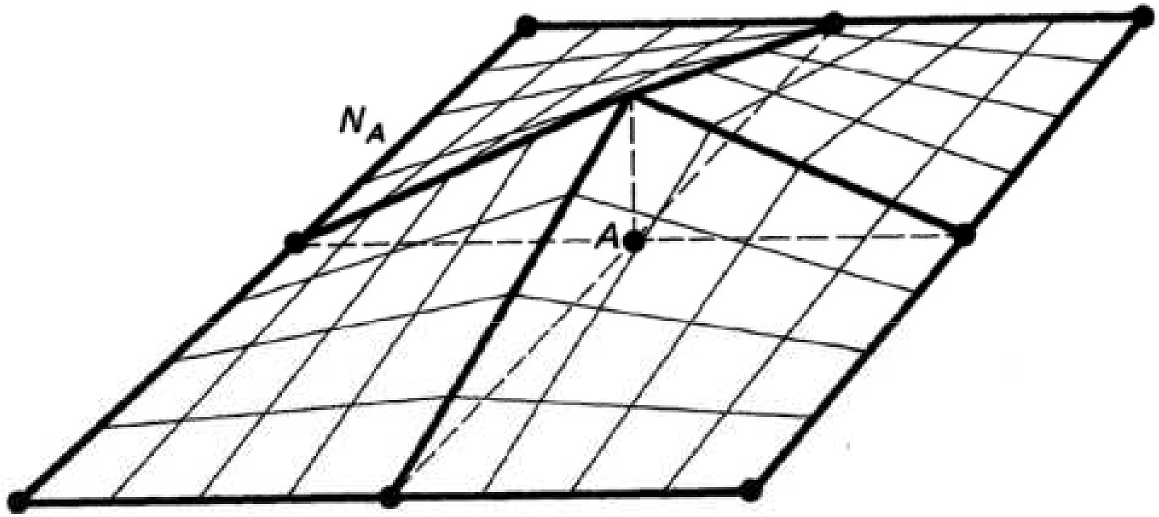
Elementi finiti piani



- Definizione degli elementi finiti piani classici

Elementi isoparametrici piani a 4 nodi
Elementi isoparametrici piani a 3 nodi
Elementi isoparametrici piani di ordine superiore (a 8 o a 6 nodi)

Elementi finiti piani

- Nella definizione delle funzioni di forma si segue il principio che, all'aumentare del grado di raffinamento della mesh, la soluzione di Galerkin converga alla soluzione esatta.
- Le seguenti condizioni sulle funzioni di forma sono sufficienti affinche' cio' accada:

1. devono essere regolari (almeno C^1) all'interno dell'elemento;
2. devono essere continue (C^0) attraverso il contorno degli elementi;
3. devono essere complete.

- Si possono costruire elementi finiti convergenti anche se le funzioni di forma non rispettano tali condizioni.

Continuità e Regolarità

- Le prime due condizioni garantiscono che le derivate prime delle funzioni di forma abbiano, nella situazione peggiore, un salto finito nelle interfacce tra gli elementi. Quindi, tutti gli integrali sono ben definiti all'interno dell'elemento (dato che in essi appaiono al piu' le derivate prime delle funzioni di forma).
- Elementi finiti che soddisfano le prime due condizioni sono spesso chiamati elementi-C^0.
- Per gli elementi strutturali (la cui cinematica e' definita in base a teorie di comportamento strutturale, come travi, piastre e gusci) e' richiesta in genere una continuita' di ordine superiore, in quanto le equazioni che governano l' equilibrio contengono derivate di grado superiore al primo.
- Nel caso in cui gli integrali della matrice di rigidezza includano derivate di ordine m, la prima condizione deve implicare continuita' fino a C^m. Gli elementi finiti che rispettano questa condizione vengono detti conformi.

Completezza

- Le funzioni di interpolazione (che sono combinazioni lineari delle funzioni di forma) di un elemento si dicono complete se, esprimendo i gradi di libertà nodali come una combinazione lineare delle coordinate del nodo, le funzioni di interpolazione sono in grado di rappresentare in modo esatto tale polinomio.

$$u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{n} N_a d_{i\,a}^e$$

$$d_{i\,a}^e = c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e + c_3 z_a^e \implies u_i^h(\mathbf{x}) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

- Questa condizione si traduce nel fatto che ogni singolo elemento e' in grado di riprodurre i moti rigidi di traslazione e di rotazione e gli stati a deformazione costante. Spesso per completezza si intende proprio la capacita' di rappresentare moti rigidi e deformazioni costanti.

- Per elementi strutturali, nei cui integrali appaiono derivate di ordine m, la condizione di completezza si estende fino ai polinomi di ordine m.

Elementi triangolari piani

- Elemento finito introduttivo per i problemi piani.
- Nei triangoli possono essere definite funzioni di forma speciali, basate sul concetto di coordinate d'area. Si definisce dapprima l'elemento parente, un triangolo rettangolo isoscele, caratterizzato da due coordinate r ed s lungo i due lati ortogonali. Si introduce una terza coordinata t, non indipendente, definita come:

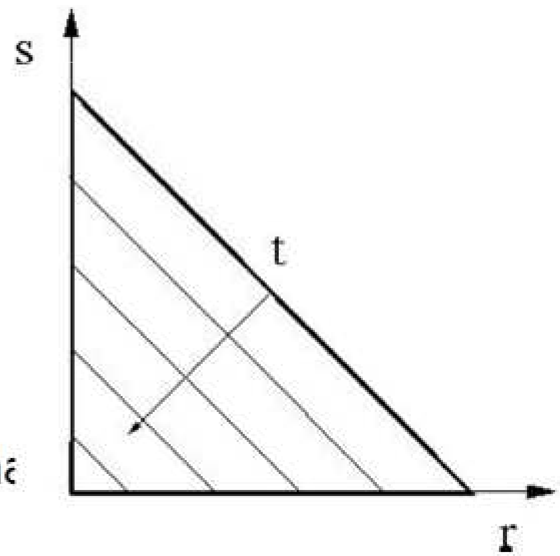
$$t = 1 - r - s$$

- Le funzioni di forma sono date dalle tre coordinate:

$$N_1(r,s,t) = r$$
$$N_2(r,s,t) = s$$
$$N_3(r,s,t) = t = 1 - r - s$$

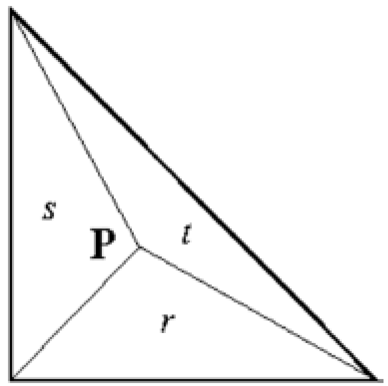
- raccolte nella matrice delle funzioni di forma

$$\mathbf{N} = [N_a] = [N_1\ N_2\ N_3]$$



Coordinate d'area

- Nel caso di elementi triangolari, le tre coordinate r, s, e t di un punto **P** rappresentano le 3 aree adimensionali in cui il triangolo e' suddiviso dalle rette che uniscono il punto con i vertici.



- Si osserva che l'area del triangolo A e' data da:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = rA + sA + tA$$

$$2A = b_1 a_2 - b_2 a_1 \quad a_i = x_k - x_j \quad b_i = y_j - y_k$$

- La trasformazione dal riferimento parente a quello reale e' data da:

$$x^e = r\, x_1^e + s\, x_2^e + (1-r-s)\, x_3^e \quad y^e = r\, y_1^e + s\, y_2^e + (1-r-s)\, y_3^e$$

- Pur essendo la coordinata t ridondante, conviene usare sempre le 3 coordinate nel calcolo delle grandezze relative agli elementi triangolari.
- Lo Jacobiano vale: $J = 2A = \det\left[\dfrac{\partial \mathbf{x}^e}{\partial \mathbf{r}}\right]$

Derivate delle funzioni di forma

- Le funzioni inverse si calcolano come:

$$r = \frac{1}{2A}(2A_1^0 + b_1\, x^e + a_1\, y^e) \qquad 2A_i^0 = x_j y_k - x_k y_j$$

$$s = \frac{1}{2A}(2A_2^0 + b_2\, x^e + a_2\, y^e) \qquad 2A_3^0 = -2A_1^0 - 2A_2^0$$

$$t = \frac{1}{2A}(2A_3^0 + b_3\, x^e + a_3\, y^e) \qquad a_3 = -a_1 - a_2 \quad b_3 = -b_1 - b_2$$

- Nell'eseguire la derivazione di una funzione, si deve applicare la regola di derivazione a catena:

$$\frac{\partial f(r,s,t)}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(b_1 \frac{\partial f(r,s,t)}{\partial r} + b_2 \frac{\partial f(r,s,t)}{\partial s} + b_3 \frac{\partial f(r,s,t)}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial f(r,s,t)}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left(a_1 \frac{\partial f(r,s,t)}{\partial r} + a_2 \frac{\partial f(r,s,t)}{\partial s} + a_3 \frac{\partial f(r,s,t)}{\partial t}\right)$$

Derivate delle Funzioni di Forma e Matrice **B**

- In particolare, nel calcolo delle derivate delle funzioni di forma per problemi 2D, si osserva che queste sono costanti e si possono esprimere in forma esplicita:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{2A} = \frac{b1}{2A}, \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{y_3 - y_1}{2A} = \frac{b2}{2A}, \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{y_1 - y_2}{2A} = \frac{b3}{2A}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{2A} = \frac{a1}{2A}, \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{x_1 - x_3}{2A} = \frac{a2}{2A}, \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{2A} = \frac{a3}{2A}$$

- Di solito le derivate delle funzioni di forma vengono raccolte nella matrice di congruenza $\mathbf{B}$, in un ordine che dipende dal problema che deve essere risolto.

Matrice di compatibilità B

- Per i problemi statici, dove le derivate sono usate per descrivere le deformazioni, la matrice $\mathbf{B}$ risulta (come si vedra' piu' avanti):

$$\mathrm{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

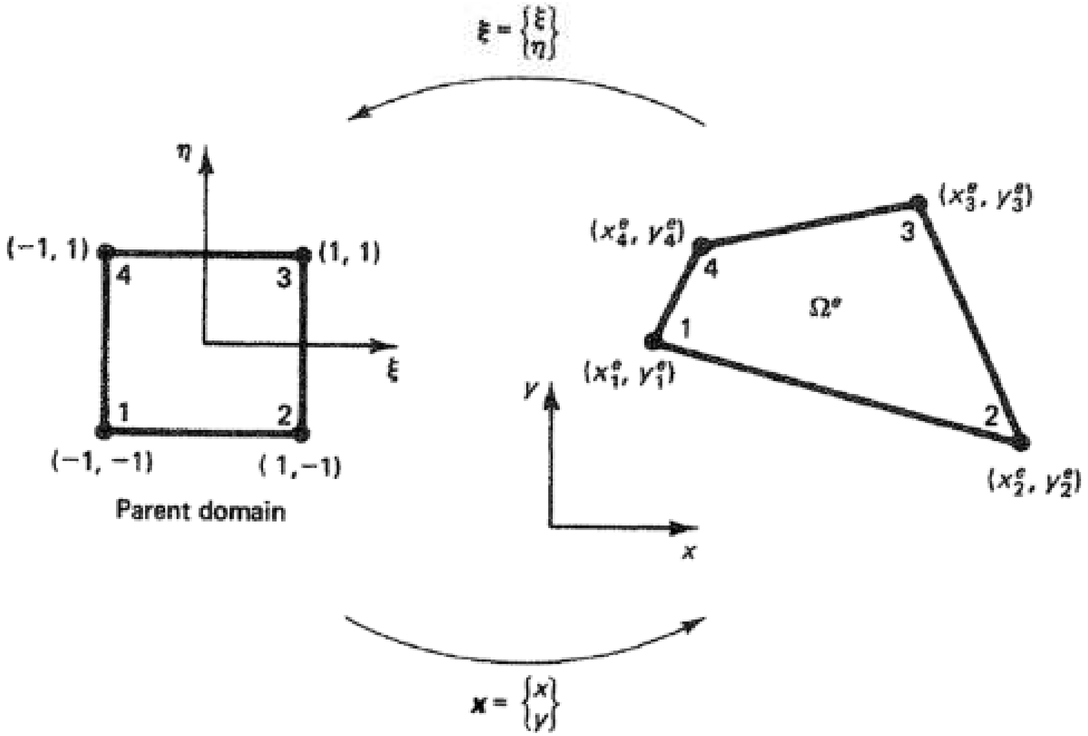
Elemento quadrilatero bilineare

- Elemento piano a 4 lati rettilinei, definito da 4 nodi, situati nei vertici, numerati in verso antiorario, di coordinate

$$\mathbf{x}_a^e, \quad a = 1, 2, 3, 4$$

- L'elemento biunitario e' chiamato elemento parente. Le coordinate ξ sono chiamate coordinate naturali. Le coordinate reali $\mathbf{x}$ e quelle naturali sono legate tra loro dalla stessa trasformazione lineare (mapping) vista per gli elementi monodimensionali.

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}$$



$$x(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^{4} N_a(\xi, \eta) x_a^e$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^{4} N_a(\xi, \eta) y_a^e$$

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^{4} N_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_a^e$$

Costruzione delle funzioni di forma

- Le funzioni di forma vengono costruite partendo da una funzione di interpolazione "bilineare" delle coordinate vere sull'elemento:

$$x(\xi,\eta) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\xi\eta = \sum_{a=1}^{4} N_a(\xi,\eta)\, x_a^e$$

- dove le α_i sono costanti da deteminare imponendo che la funzione (espressione a destra) interpoli i quattro dati nodali (le coordinate dei nodi nell'elemento parente sono in tabella):

$$x(\xi_a, \eta_a) = x_a^e$$

- Le condizioni sono equivalenti al sistema lineare in α_i:

$$\begin{Bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

a	ξ_a	η_a
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

Costruzione delle funzioni di forma

- La soluzione del sistema, confrontata con il membro di destra della funzione di partenza, fornisce l'espressione delle funzioni di forma:

$$N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta)$$

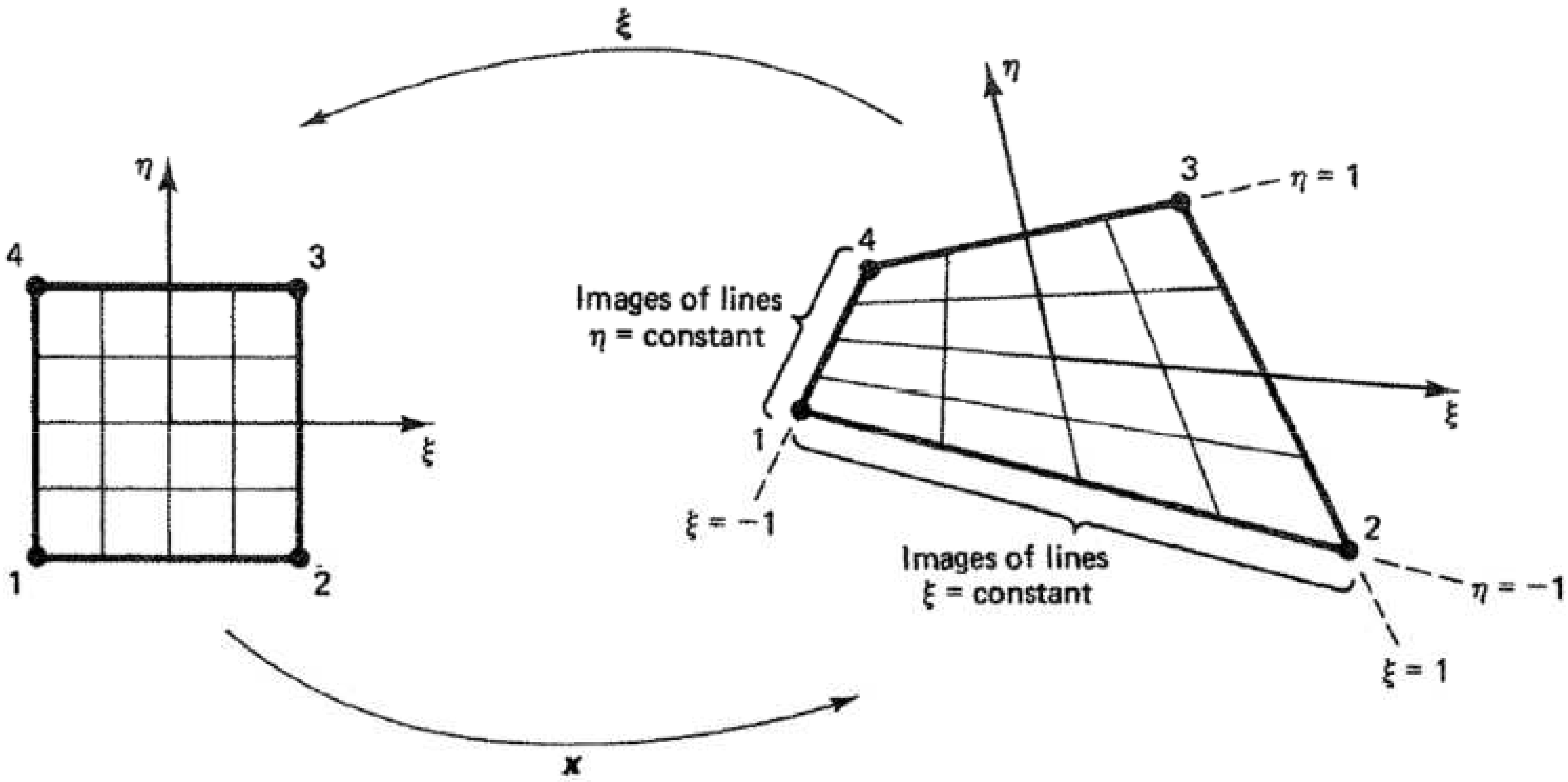
- Esse sono la generalizzazione al caso 2D di quelle gia' viste per gli elementi monodimensionali.
- Si ripete lo stesso procedimento per la coordinata y, partendo da:

$$y(\xi, \eta) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta = \sum_{a=1}^{4} N_a(\xi, \eta)\, y_a^e$$

- Si ottengono le medesime funzioni di forma.
- Si osserva che per le funzioni di forma vale la seguente condizione (detta proprieta' di interpolazione):

$$N_a(\boldsymbol{\xi}_b) = \delta_{ab}$$

Superfici rigate



- Per gli elementi bilineari, le linee coordinate (a ξ o η costante) sono delle rette.
- Le funzioni di interpolazione sono funzioni "quadriche" delle coordinate naturali.

Elementi isoparametrici

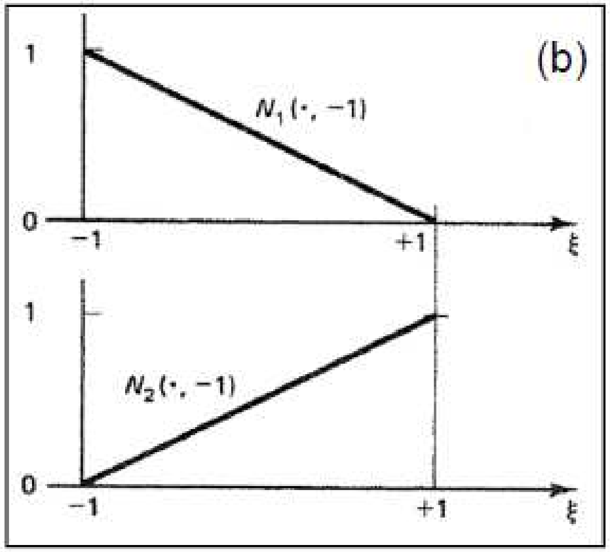
- Costruite le funzioni di interpolazione delle coordinate, si assume che le funzioni di interpolazione della funzione incognita (temperatura o spostamenti) abbiano la stessa espressione delle funzioni di interpolazione delle coordinate [Taig, 1961 ed Irons, 1966].
- Elementi finiti cosi' costruiti sono detti isoparametrici.

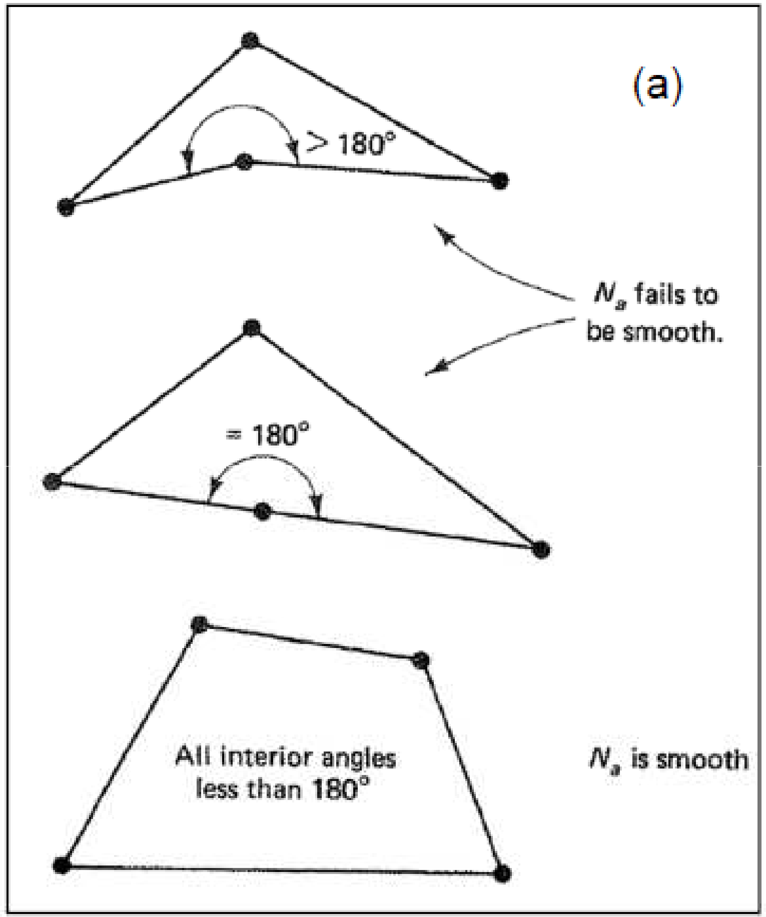
- Per l'elastostatica, le funzioni di interpolazione degli spostamenti sono:

$$u_i^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^{4} N_a(\boldsymbol{\xi})\, d_{i\,a}^{e}$$

Regolarità

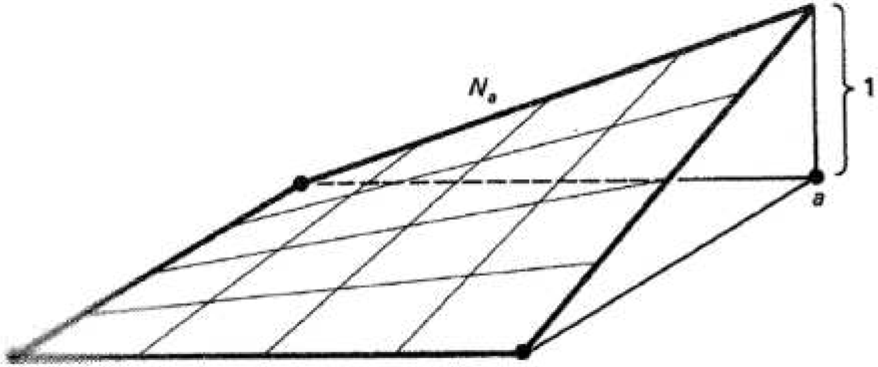
- Le funzioni di forma degli elementi bilineari sono sicuramente regolari, nell'ipotesi che i quattro angoli interni formati dai lati siano inferiori a 180° (a).
- Sui 4 contorni dell'elemento (ad esempio sul lato tra i nodi 1 e 2) le funzioni di forma variano linearmente (b).

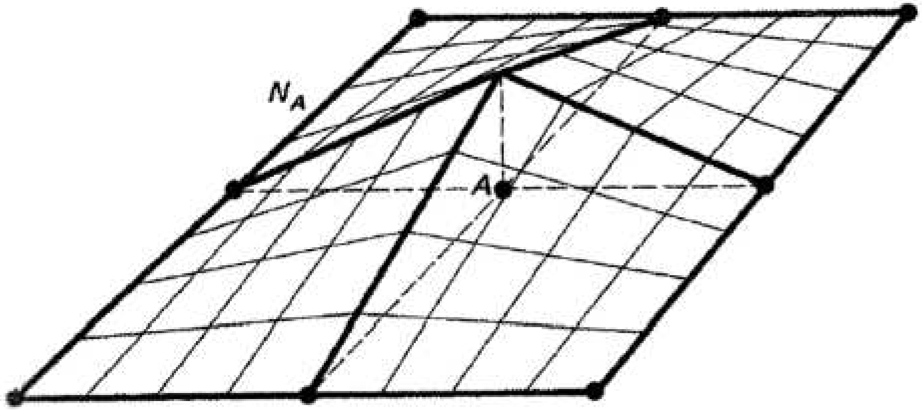




Continuità attraverso il contorno

- Ne segue che all'interno dell'elemento esse hanno l'aspetto a tenda (paraboloide iperbolico).
- La linearita' delle funzioni di forma garantisce la continuita' delle funzioni di interpolazioni globali relative al nodo a.
- Inoltre, il comportamento della funzione di interpolazione lungo il lato di un elemento dipende solo dai valori dei due nodi all'estremita'.





Completezza

- Partendo dalla funzione di interpolazione, si esprime ogni grado di liberta' nodale come combinazione lineare delle coordinate del nodo stesso:

$$
\begin{aligned}
u^h &= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a d_a^e \\
&= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a (c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e) \\
&= \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a \right) c_0 + \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a x_a^e \right) c_1 + \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a y_a^e \right) c_2 \\
&= c_0 + x(\xi, \eta) c_1 + y(\xi, \eta) c_2
\end{aligned}
$$

- Si verifica che la somma delle funzioni di forma dell'elemento e' uguale a 1:

$$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) = 1$$

Elementi isoparametrici

- Un elemento e' detto isoparametrico se la trasformazione dall'elemento parente all'elemento reale e' descritta da:

$$\mathbf{x}^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^{4} N_a(\boldsymbol{\xi})\, \mathbf{x}_a^e$$

- E le funzioni di interpolazione sono descritte dalla stessa espressione:

$$\mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^{4} N_a(\boldsymbol{\xi})\, \mathbf{u}_a^e$$

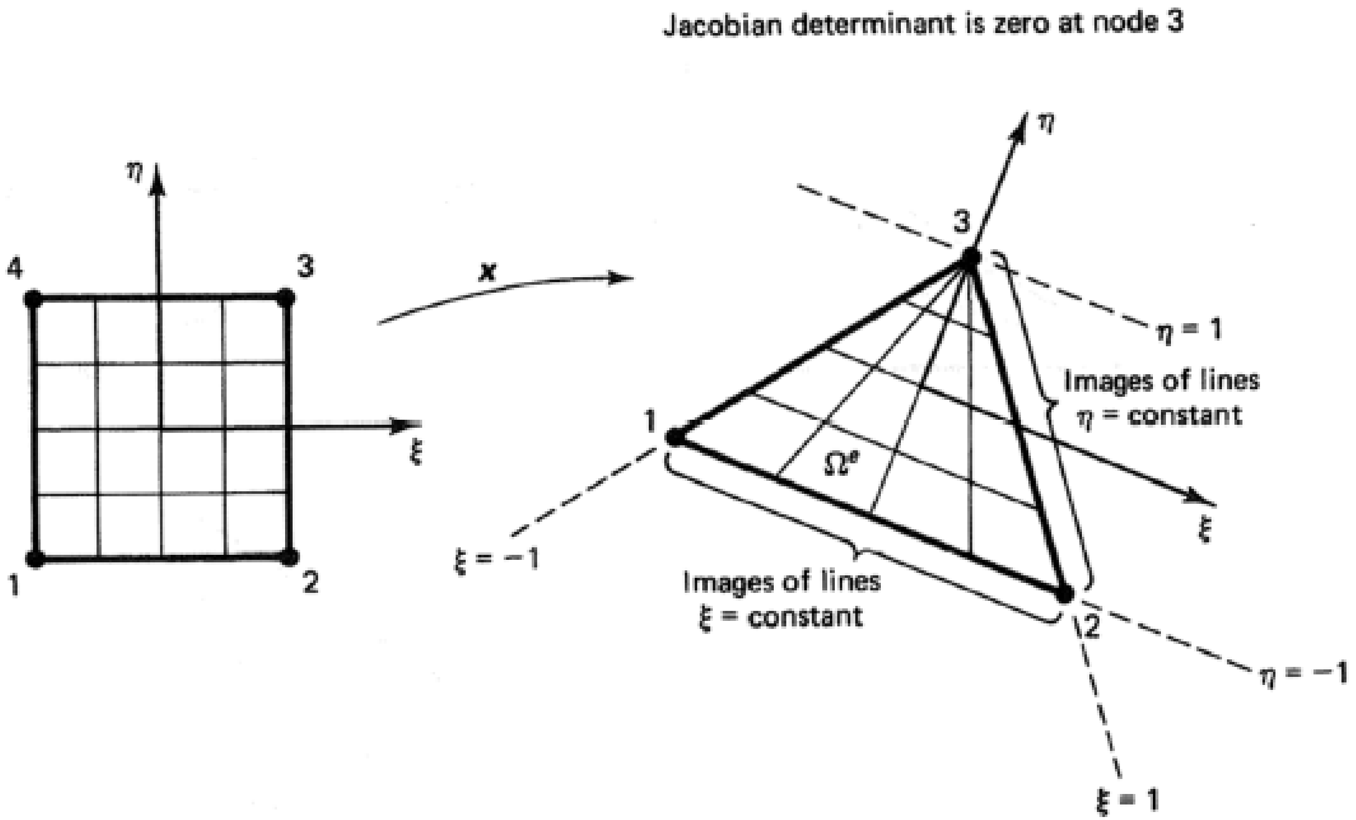
- La trasformazione e' detta biunivoca (one-to-one) se due punti distinti non vengono mappati nel medesimo punto.
- La trasformazione e' detta suriettiva (onto) se ogni punto dell'elemento reale e' l'immagine di un punto dell'elemento parente.
- La trasformazione e' detta C^k se e' continua con tutte le derivate fino all'ordine k.

Convergenza degli elementi isoparametrici

- Se la trasformazione e' differenziabile, il determinante J della derivata della trasformazione e' detto determinante Jacobiano.
- Si dimostra che se la trasformazione e' biunivoca, suriettiva, di ordine C^k e il determinante jacobiano $J > 0$, allora la trasformazione e' invertibile.
- L'invertibilita' e' un requisito in generale sempre soddisfatto dagli elementi finiti classici, con un'eccezione, legata ai cosiddetti elementi degeneri, per i quali il determinante J va a zero in un punto del dominio parente.
- In genere (anche nel caso di elementi degeneri) il determinante J viene calcolato in punti regolari. Anzi, la condizione di non positivita' del determinante viene considerata come un errore di input (elementi distorti o nodi scambiati).
- Se la somma delle funzioni di forma e' uguale ad 1, la condizione di completezza per gli elementi isoparametrici e' soddisfatta.
- L'unica condizione che puo' procurare problemi con gli isoparametrici e' la continuita' attraverso i contorni: questa va verificata a posteriori.

Elemento triangolare lineare

- Uno dei primi elementi finiti sviluppati [Courant, 1943 e Turner et al., 1956] e' l'elemento triangolare lineare, spesso noto come elemento a deformazione costante (CST) nella letteratura meccanica.
- Puo' essere ottenuto per degenerazione dell'elemento bilineare a 4 nodi facendo coincidere il 3 e il 4 nodo.



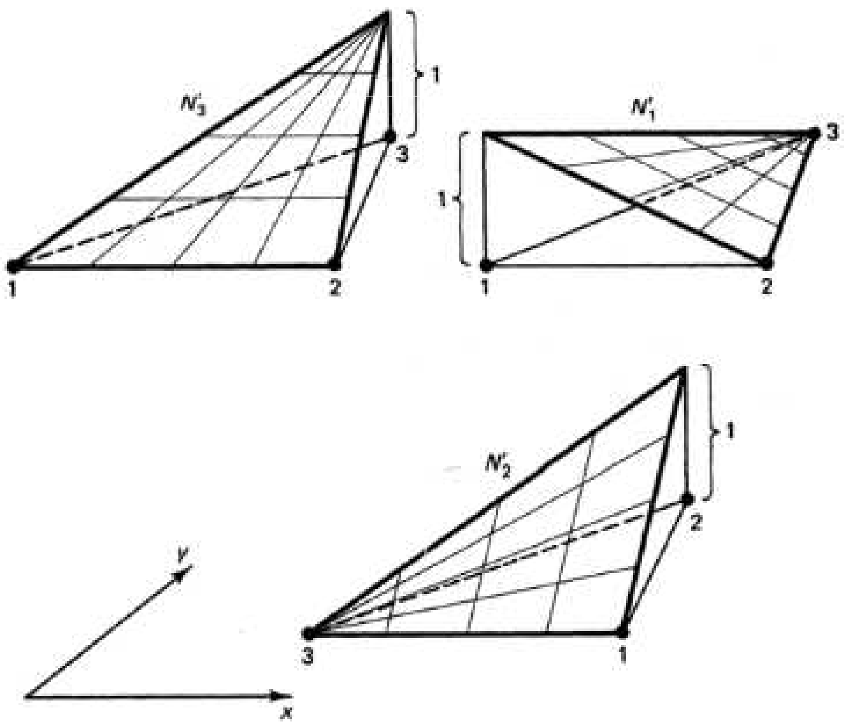
Elemento triangolare lineare: funzioni di forma

- Si assume che il nodo 3 coincida con il nodo 4 e si ridefiniscono le funzioni di forma come:

$$\mathrm{x} = \sum_{a=1}^{4} N_a \,\mathrm{x}_a = N_1\,\mathrm{x}_1^e + N_2\,\mathrm{x}_2^e + (N_3 + N_4)\,\mathrm{x}_3^e = \sum_{a=1}^{3} N'_a\,\mathrm{x}_a^e$$

- Le nuove funzioni sono piani (vedi figure):

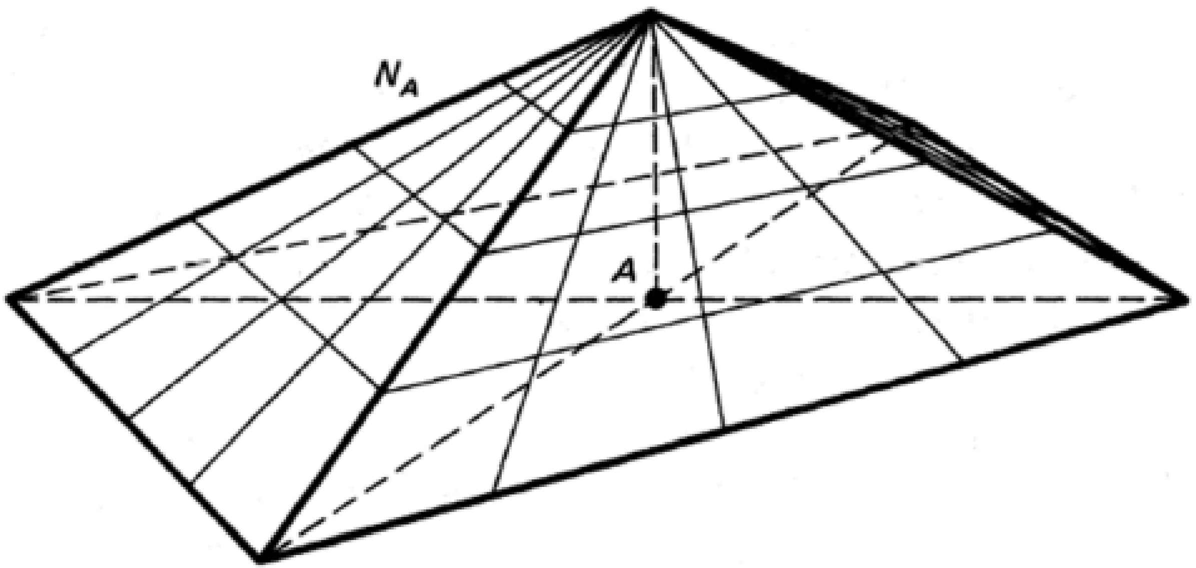
$$N'_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N'_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N'_3 = \frac{1}{2}(1+\eta)$$



- In questo caso, la mappa non e' biunivoca (due nodi finiscono nello stesso punto) e lo Jacobiano e' nullo nel punto x_3.

Elemento triangolare lineare: funzioni di forma

- La linearita' delle funzioni di forma garantisce la continuita' delle funzioni di interpolazione attraverso i contorni.
- La funzione di forma riferita a un nodo e' chiamata piramide.
- La completezza dell'elemento e' conseguenza della completezza dell'elemento bilineare di partenza.
- Una formulazione alternativa si basa sul concetto di coordinate d'area.



Elementi di ordine superiore

- Gli elementi visti finora erano stati ottenuti costruendo le funzioni di forma come prodotti di polinomi monodimensionali lineari.
- Si possono definire elementi di ordine superiore, in cui le funzioni di forma sono polinomi di ordine superiore al primo, che sono in grado di riprodurre con maggiore accuratezza sia la forma del dominio originario, sia la funzione di soluzione.
- A scapito della migliore prestazione, questi elementi sono generalmente piu' costosi da implementare e da calcolare. La scelta sull'uso di un elemento piuttosto che un altro e' dettata dal problema alla mano.
- Un modo sistematico di ottenere elementi finiti di ordine superiore consiste nell'uso dei polinomi di Lagrange.
- Una volta imparato il meccanismo, e' possibile costruire elementi di qualsiasi ordine.

Polinomi di Lagrange

- Dati n_{en} punti, i polinomi di Lagrange sono definiti come il prodotto di polinomi lineari nella forma:

$$L_a^{n_{en}-1}(\xi) = \frac{\prod_{b \neq a}^{n_{en}} (\xi - \xi_b)}{\prod_{b \neq a}^{n_{en}} (\xi_a - \xi_b)}$$

$$L_a^{n_{en}-1}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)\dots(\xi - \xi_{a-1})(\xi - \xi_{a+1})\dots(\xi - \xi_{n_{en}})}{(\xi_a - \xi_1)\dots(\xi_a - \xi_{a-1})(\xi_a - \xi_{a+1})\dots(\xi_a - \xi_{n_{en}})}$$

- E' facile verificare che i polinomi di Lagrange soddisfano la proprieta' di interpolazione:

$$L_a^{n_{en}-1}(\xi_b) = \delta_{ab}$$

- Per costruire i cosidetti elementi Lagrangiani, si identificano le n_{en} funzioni di forma con i polinomi:

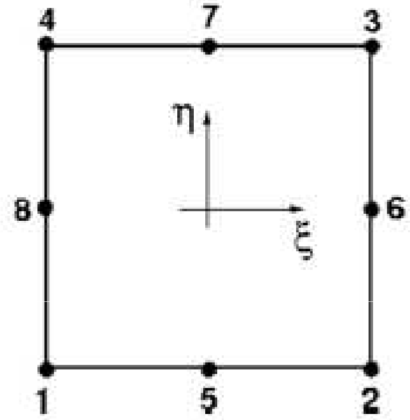
$$N_a = L_a^{n_{en}-1}$$

- Per il caso di 2 nodi, questi forniscono le formule di interpolazione lineare precedentemente utilizzate.

Elementi piani a 8 nodi

- Sono gli elementi parabolici piu' versatili per l'analisi di problemi piani. Con riferimento alla figura, le funzioni di forma sono:

$$N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(-1-\xi-\eta)(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(-1+\xi-\eta)(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(-1+\xi+\eta)(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(-1-\xi+\eta)(1-\xi)(1+\eta)$$



$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \qquad N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$
$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \qquad N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

- Si possono definire elementi con qualunque numero di nodi.