

Influenza degli spostamenti sull'equilibrio

Le strutture ingegneristiche sono spesso sufficientemente rigide e vincolate da assicurare che gli spostamenti siano piccoli ed ininfluenti sull'equilibrio

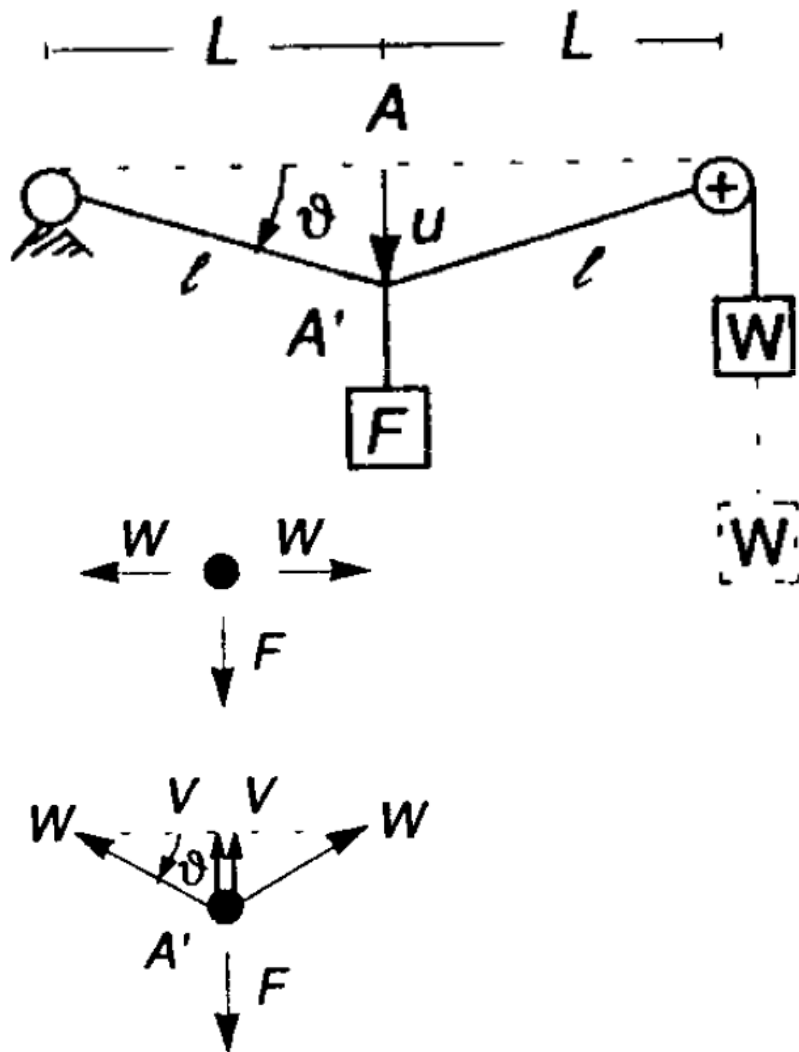
Le equazioni di equilibrio possono allora essere scritte in configurazione indeformata

Esistono tuttavia dei casi in cui non è lecito ignorare lo scostamento dalla configurazione indeformata ai fini della scrittura delle equazioni di equilibrio

Come nel caso delle funi, che si suppongono capaci di resistere solo a trazione ed infinitamente flessibili

Influenza degli spostamenti sull'equilibrio

Per esempio in strutture molto deformabili come le **funi**
 l'equilibrio è possibile solo in configurazione deformata



$$\frac{V}{W} = \frac{u}{l} \quad l = \sqrt{L^2 + u^2}$$

$$F = 2V = 2W \frac{u}{l} = \frac{2Wu}{\sqrt{L^2 + u^2}}$$

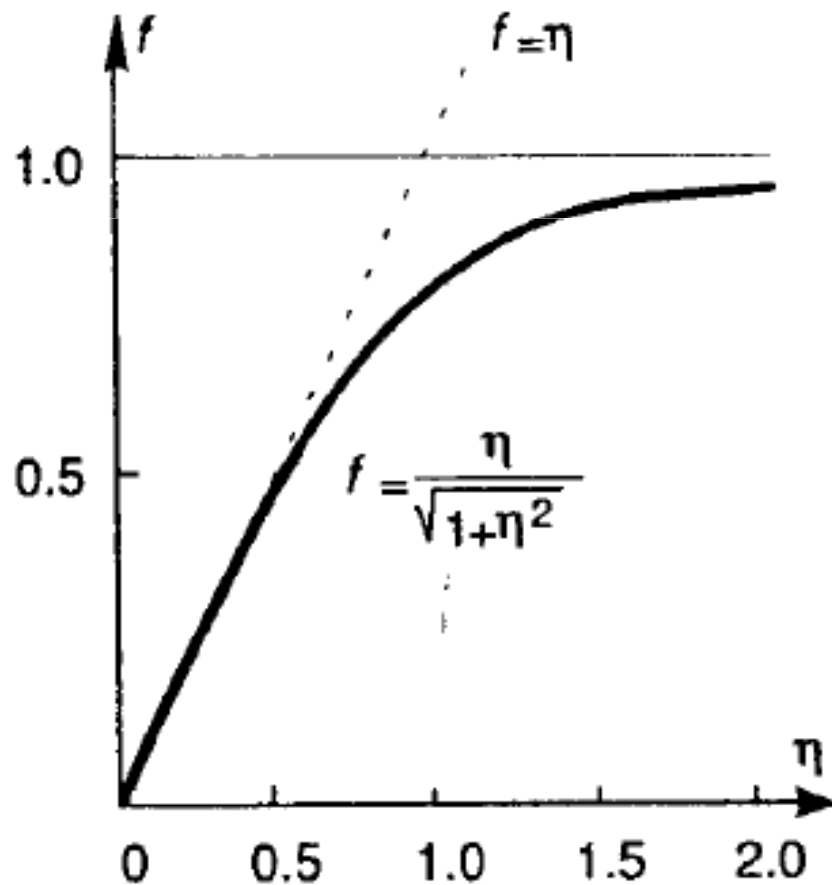
Influenza degli spostamenti sull'equilibrio

Introducendo le variabili adimensionali

$$f = \frac{F}{2W} \quad \eta = \frac{U}{L}$$

L'equazione di equilibrio

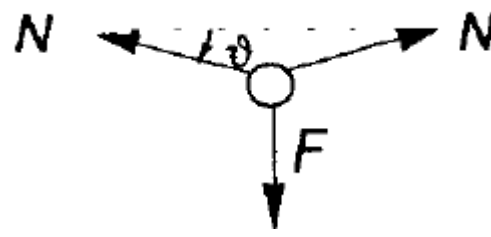
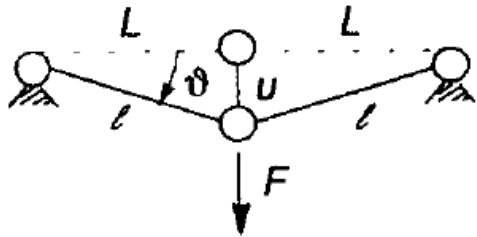
$$F = 2V = 2W \frac{U}{f} = \frac{2WU}{\sqrt{L^2 + U^2}}$$
$$f = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}}$$



- 1-Equilibrio possibile solo se $f \leq 1$
- 2-Per f piccoli relazione lineare
- 3- Per tiro crescente gli spostamenti calano (effetto Dischinger negli stralli)
- 4-Gli spostamenti sono indispensabili
- 5-Rigidezza funzione del carico e dello spostamento

Influenza degli spostamenti sull'equilibrio

3 cerniere allineate:



$$f = 2\eta \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \right]$$

Curva (A)

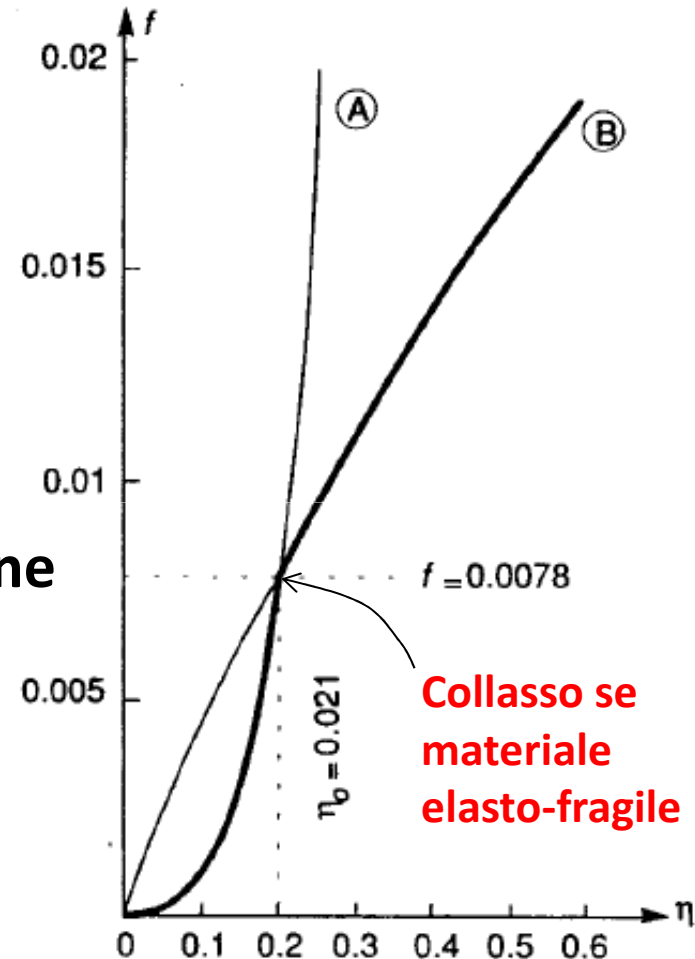
Posto N_0 lo sforzo di piena plasticizzazione

$$n_0 = \frac{N_0}{KL}$$

Per $N > N_0$ le aste possono plasticizzarsi a trazione costate

$$f = \frac{2n_0\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}}$$

Curva (B)



Funi nella pratica applicativa

Cavi di trasmissione



ponti sospesi



Funi nella pratica applicativa

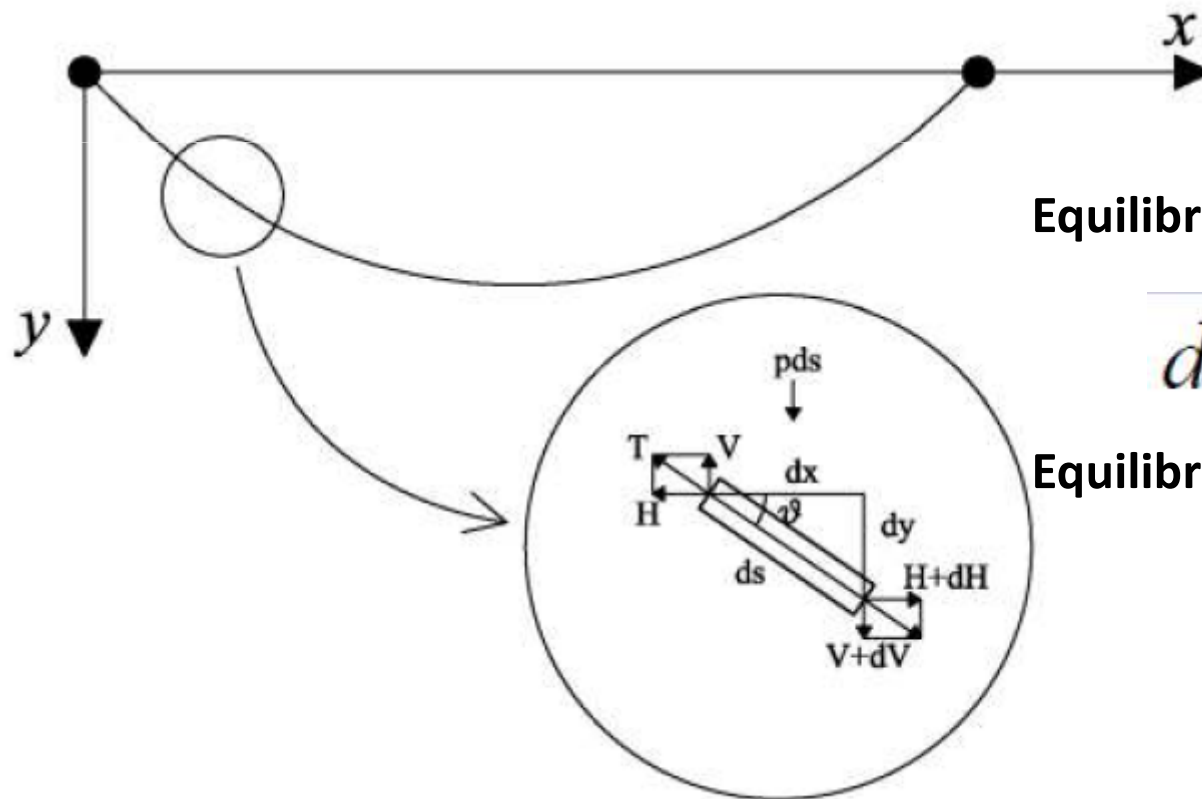
Ponti strallati



Equazione catenaria: fune in equilibrio sotto peso proprio

$$H = T \cos \theta = T \frac{dx}{ds}$$

$$V = T \sin \theta = T \frac{dy}{ds}$$



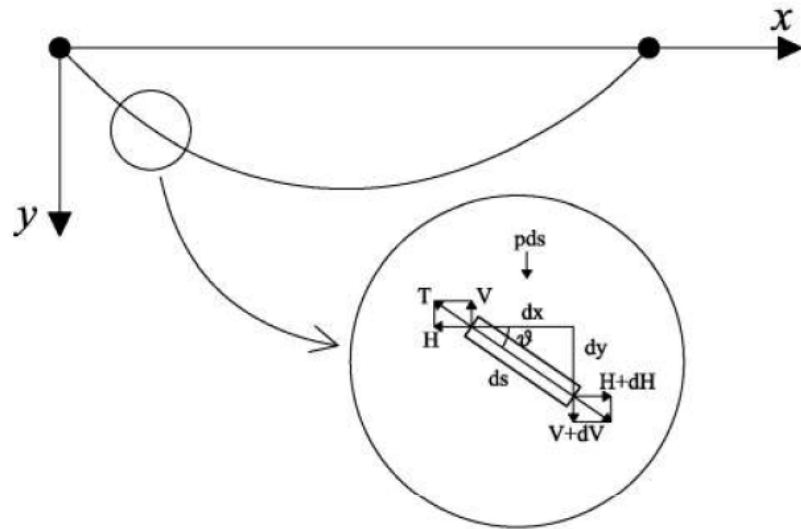
Equilibrio in direzione verticale

$$dV + pds = 0$$

Equilibrio in direzione orizzontale

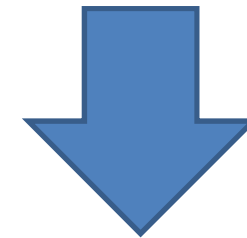
$$dH = 0$$

Equazione catenaria: fune in equilibrio sotto peso proprio



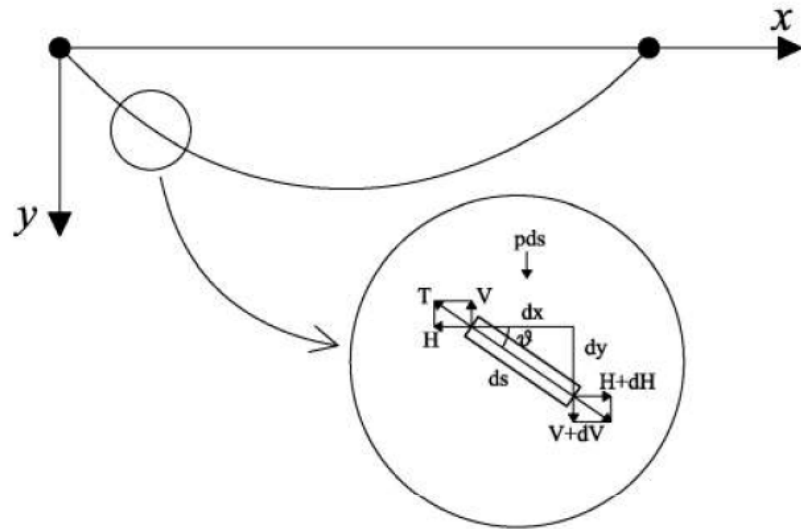
$$dV + p ds = 0$$

$$V = T \sin \theta = T \frac{dy}{ds}$$



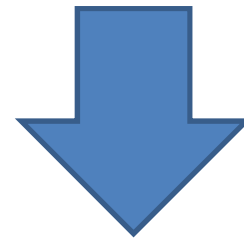
$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = -p$$

Equazione catenaria: fune in equilibrio sotto peso proprio



$$\underline{dH = 0}$$

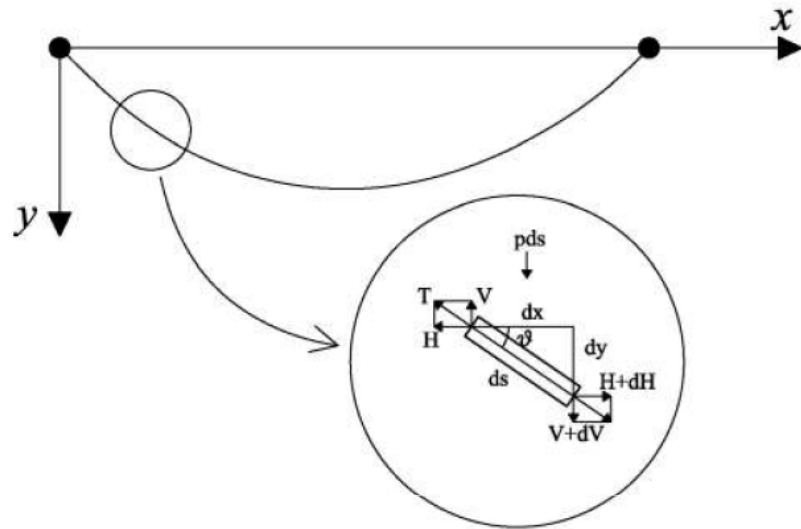
$$H = T \cos \theta = T \frac{dx}{ds}$$



$$\frac{dH}{ds} ds = \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) ds = 0$$

$$T \frac{dx}{ds} = H$$

Equazione catenaria: fune in equilibrio sotto peso proprio



$$T \frac{dx}{ds} = H$$

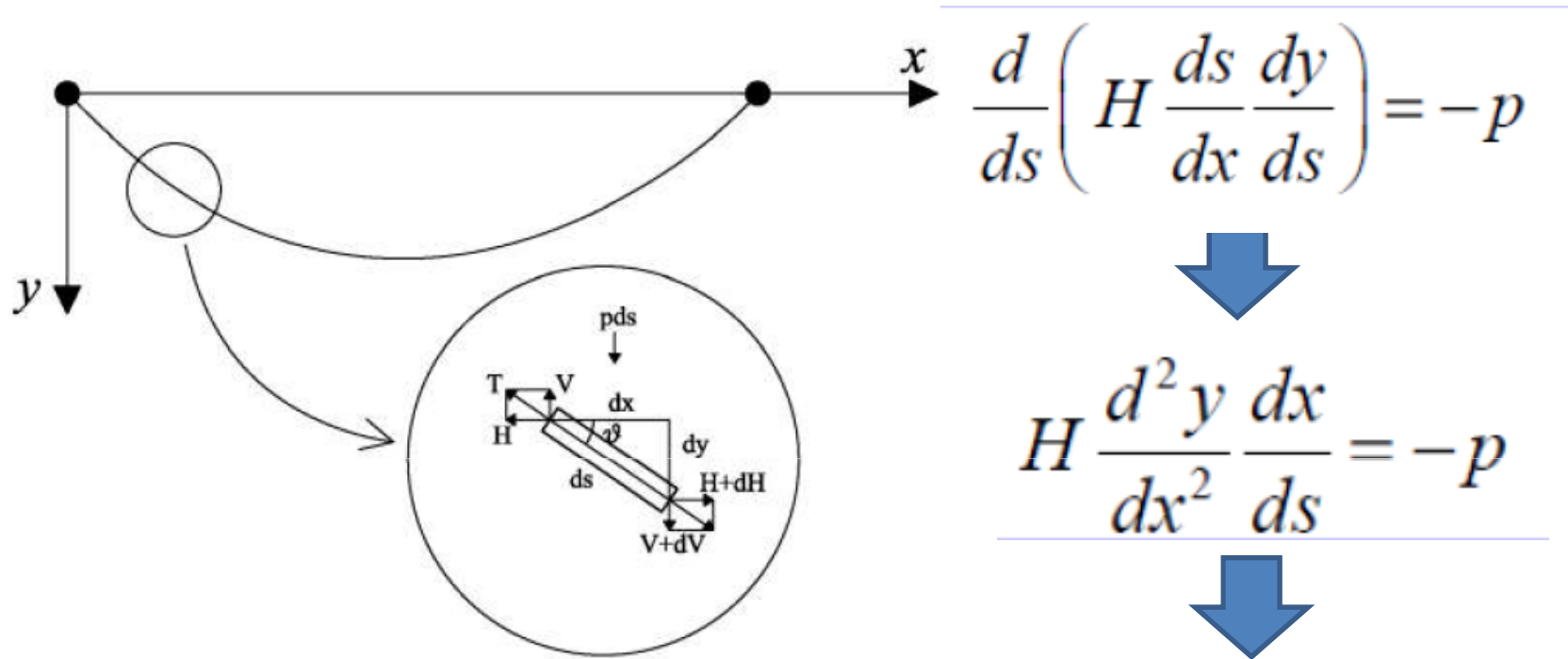


$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = -p$$



$$H \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{ds} = -p$$

Equazione catenaria: fune in equilibrio sotto peso proprio



$$\frac{d}{ds} \left(H \frac{ds}{dx} \frac{dy}{ds} \right) = -p$$

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{ds} = -p$$

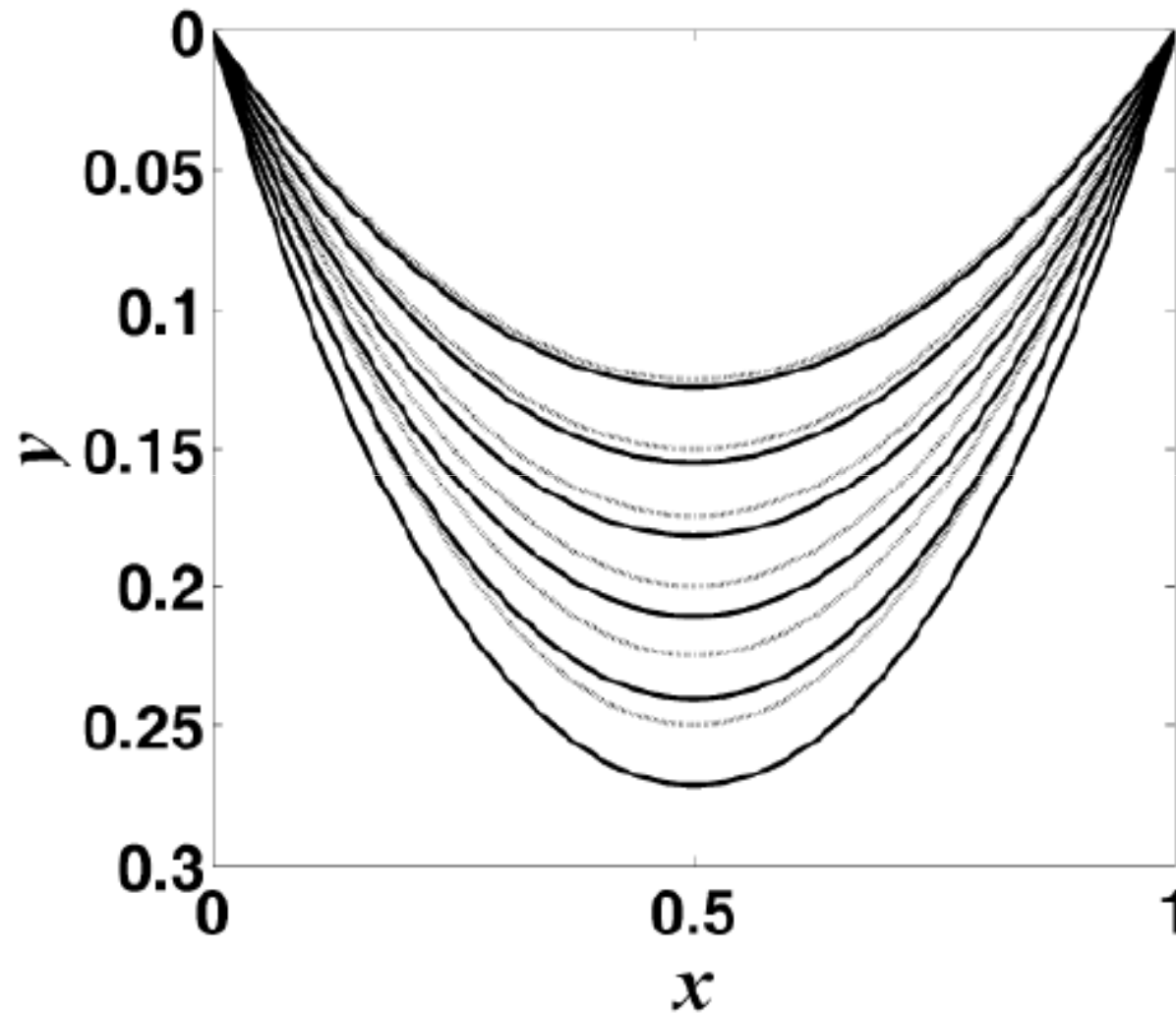
Equazione catenaria

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$



$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -p \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

Equazione catenaria: fune in equilibrio sotto peso proprio

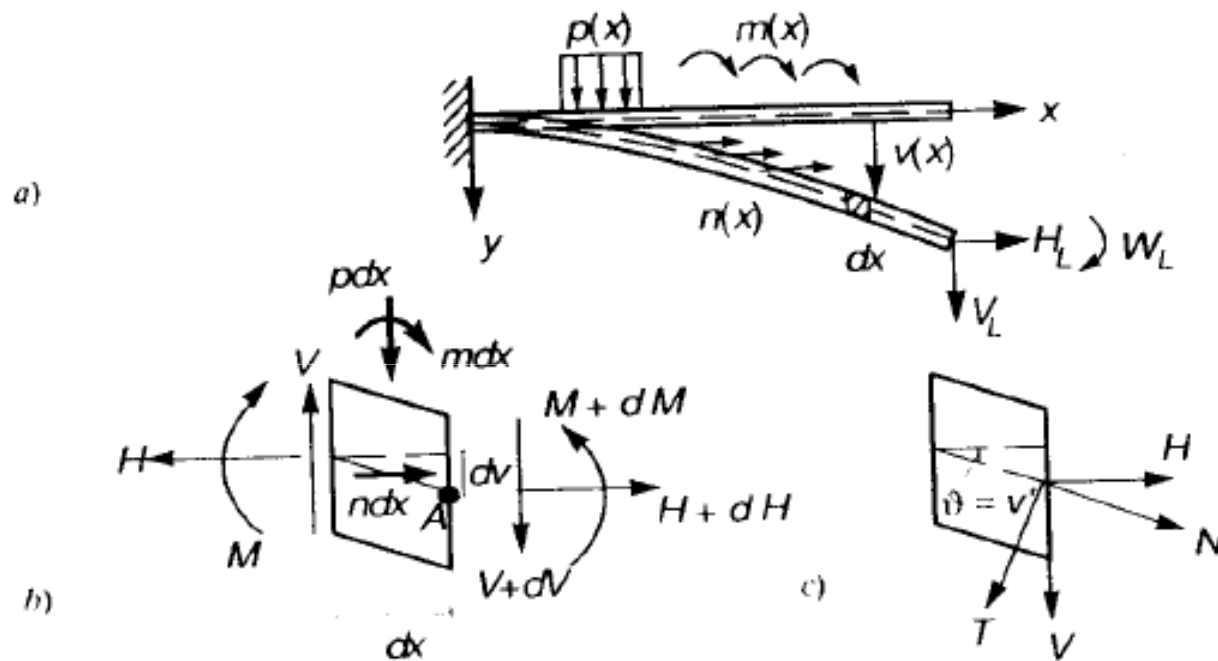


$$\alpha = \frac{pL}{2H}$$

Fig. 2. Catenary (continuous line) and parabolic approximation (dashed) for $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$.

Instabilità: equazione della linea elastica in presenza di spostamenti finiti

Equilibrio trave configurazione deformata

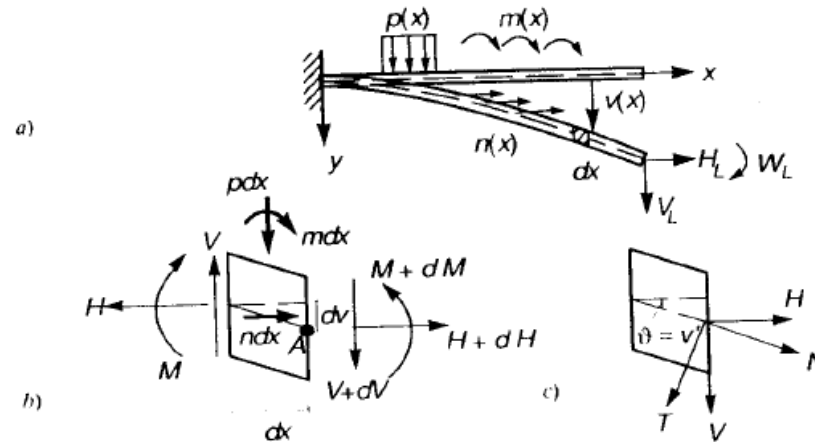


Equazione equilibrio

$$\mathbf{EI} \mathbf{v}^{\text{iv}} - \mathbf{H} \mathbf{v}^{\text{ii}} = \mathbf{p}$$

+condizioni al contorno

Instabilità



~~$$EIv^{iv} - Hv^{ii} = p$$~~

$EI=0$

Equazione equilibrio fune

$$EIv^{iv} + Pv^{ii} = p$$

$H=-P$ compressione

Equazione equilibrio trave
instabile pressoinflessa

Instabilità dell'equilibrio come problema dinamico

L.Corradi III cap 17 p 426

Alla fine del XIX secolo (1892) Poincaré e Liapunov formalizzarono lo studio della stabilità del moto di sistemi meccanici a numero finito di gradi di libertà e più in generale della stabilità della soluzione di problemi descritti da sistemi di equazioni differenziali

Instabilità dell'equilibrio come problema dinamico

Definizione di stabilità secondo Liapunov

Sia $u(t)$ la traiettoria di un corpo o più in generale la soluzione di un problema di equilibrio dinamico

La soluzione $u(t)$ si dice stabile secondo Liapunov se ad ogni arbitrario numero $\varepsilon > 0$ è possibile associare un altro numero $m_\varepsilon > 0$ tale per cui, ad ogni variazione δu della soluzione rispettosa delle condizioni iniziali per $t=0$ per cui risulti

$$\|\delta u(0)\| < m_\varepsilon \quad (*)$$

Consegue una variazione della risposta che soddisfa la diseguaglianza

$$\|\delta u(t)\| < \varepsilon \quad \forall \quad t > 0 \quad (**)$$

Instabilità dell'equilibrio come problema dinamico

Definizione di stabilità secondo Liapunov

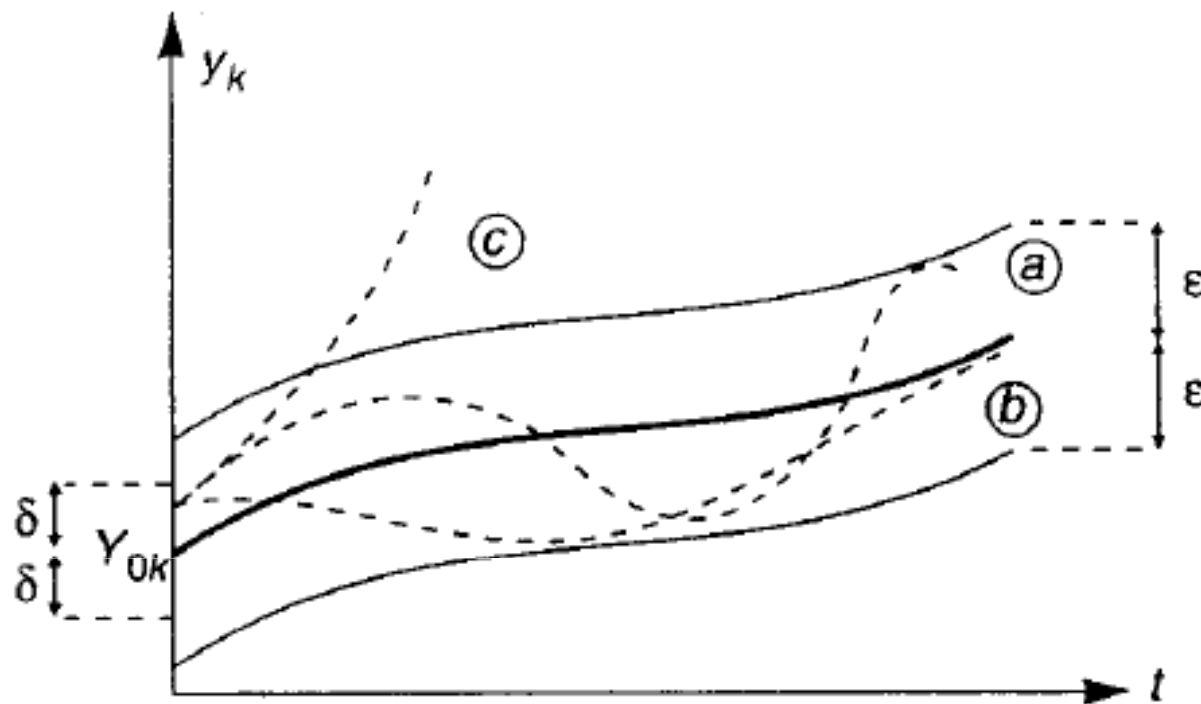
La soluzione si dice poi asintoticamente stabile se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta u_k(t) = 0 \quad \forall k$$

Dove δu_k rappresenta la k-esima componente del vettore δu

Se invece non è possibile associare ad un qualunque ε alcun $m_\varepsilon > 0$ comunque piccolo tale che valgano le (*) e (**) \rightarrow la soluzione si dice instabile

Instabilità dell'equilibrio come problema dinamico



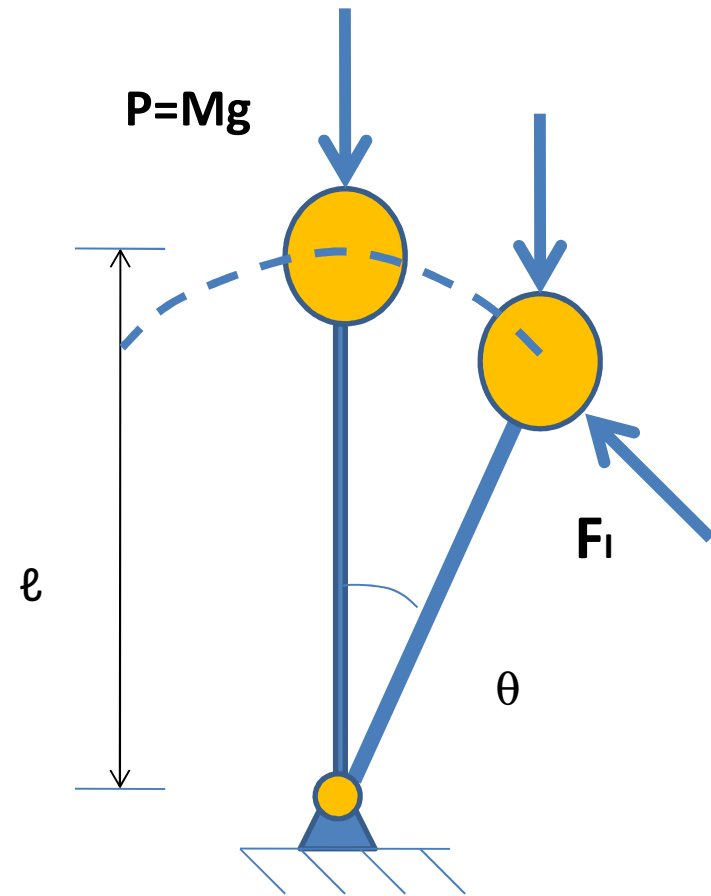
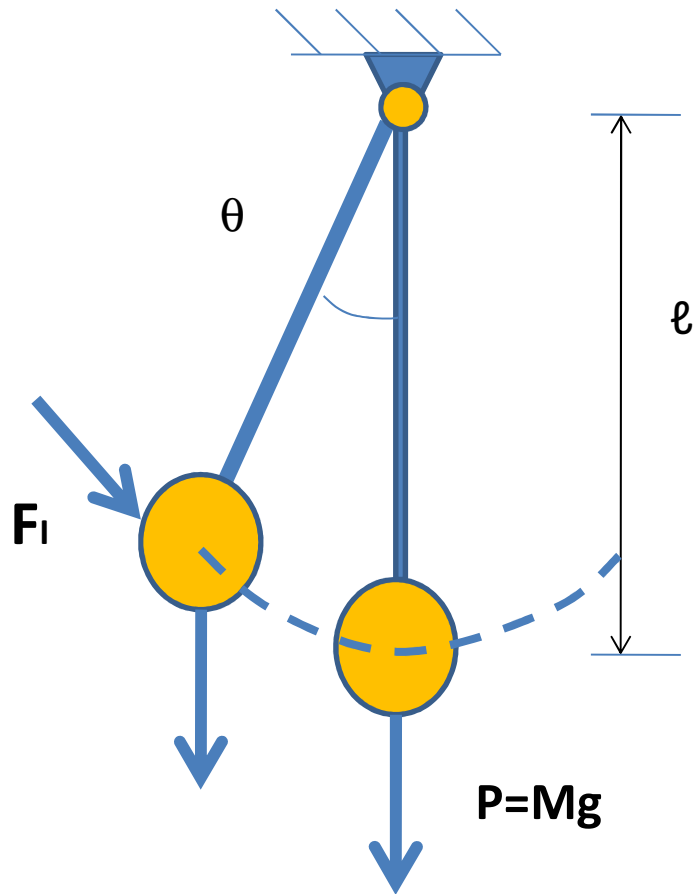
Sia Y_{0k} la soluzione del problema del moto

Se per una variazione delle condizioni iniziali $t=0$ tutte le curve del moto sono come la curva (a) allora il moto è stabile

Se sono tutte come la curva (b) allora è asintoticamente stabile

Se almeno una delle curve fuoriesce dalla striscia ampia 2ϵ allora il moto è instabile

Esempio: stabilità dell'equilibrio per un sistema ad 1 grado di libertà



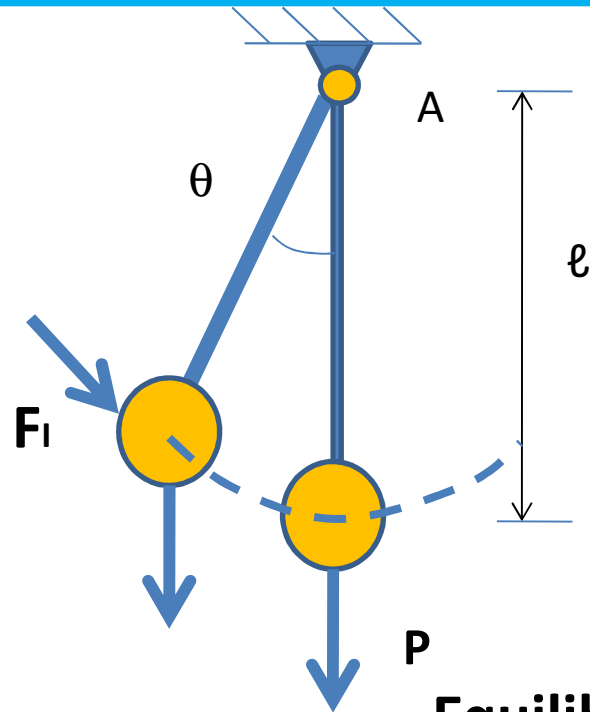
$$F_i = -M\ddot{u} = -M\ell\ddot{\theta}$$

Forza d'inerzia

$$P = Mg$$

Forza conservativa

Esempio di un sistema ad 1 grado di libertà



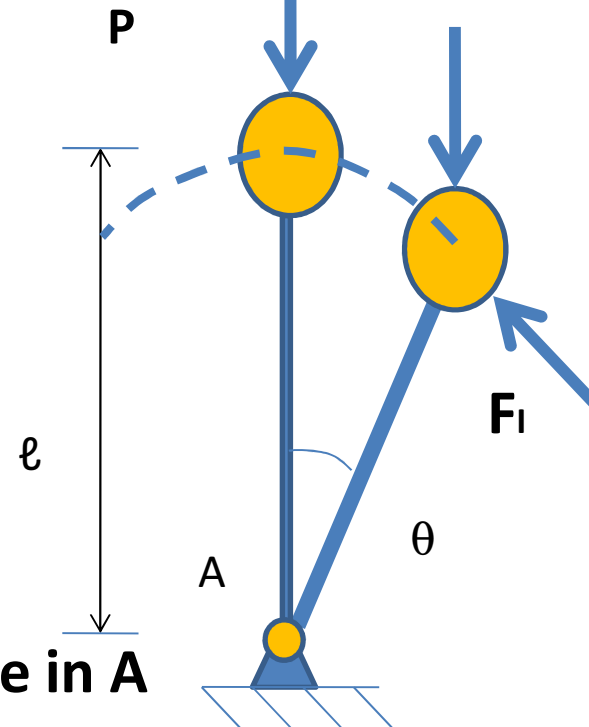
Equilibrio alla rotazione in A

$$Mgl \sin \theta(t) + Ml^2 \ddot{\theta}(t) = 0$$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0$$

Equazione caratteristica

$$\omega^2 + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \omega = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}}$$

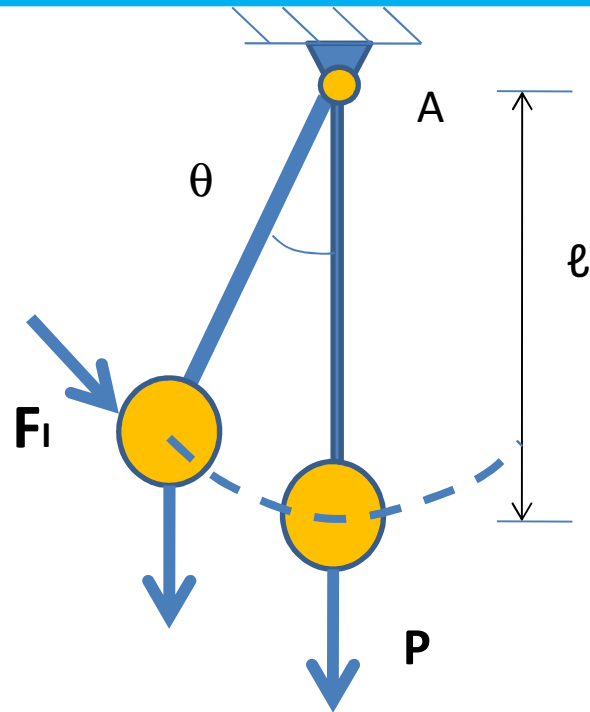


$$-Mgl \sin \theta(t) + Ml^2 \ddot{\theta}(t) = 0$$

$$\ddot{\theta}(t) - \frac{g}{l} \theta(t) = 0$$

$$\omega^2 - \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Esempio di un sistema ad 1 grado di libertà

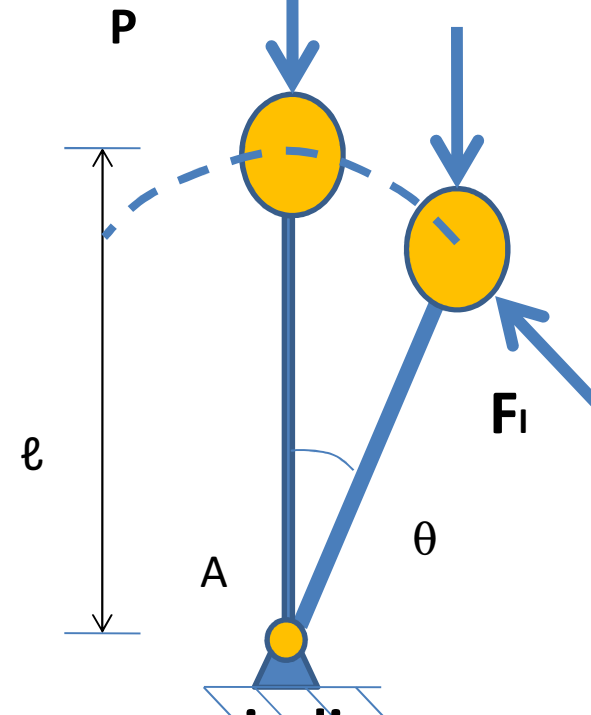


**Moto periodico limitato
STABILE**

$$\theta(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

$$\theta(0) = 0; \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

$$\rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos \omega t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \sin \omega t$$



**Moto non periodico
INSTABILE (diverge per $t \rightarrow \infty$)**

$$\theta(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$$

$$\theta(0) = 0; \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

$$\rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\alpha} \right) e^{\omega t} + \frac{1}{2} \left(\theta_0 - \frac{\dot{\theta}_0}{\alpha} \right) e^{-\omega t}$$

Sistemi conservativi

Un sistema di forze si definisce conservativo se il lavoro compiuto non dipende dal percorso ma solo dal punto di partenza ed arrivo

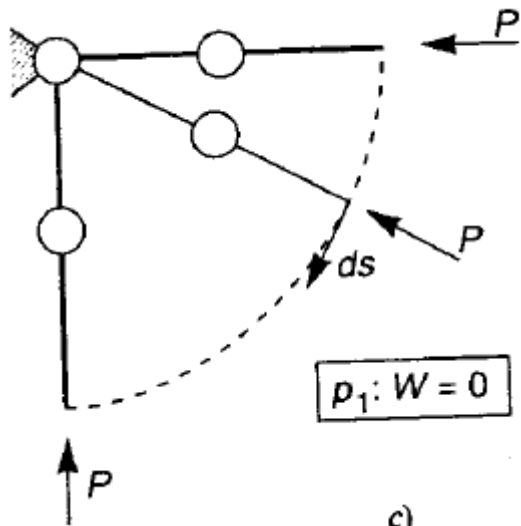
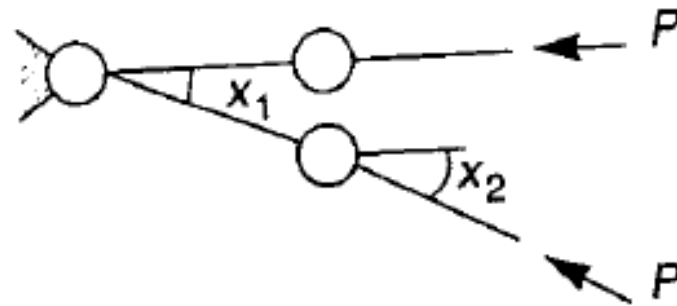
In tal caso esso deriva da un potenziale

Le forze a retta d'azione costante (forza peso) sono conservative

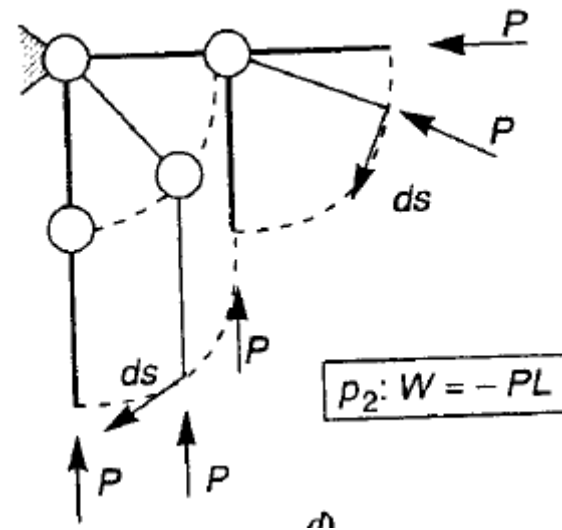
Forze la cui retta d'azione cambia al variare delle deformate possono essere non conservative → forze follower (esempio spinta di un jet)

Sistemi conservativi

Forza follower (LC III p 180)



Lavoro > 0



Lavoro < 0

Criteri di stabilità per sistemi a nr finito di gradi di libertà

Sia la configurazione del sistema determinata dal vettore X delle coordinate Lagrangiane

Si applichi un sistema di forze conservative, allora la Energia Potenziale Totale (EPT) si scrive

$$\Pi(X) = \Phi(X) - L_e(X)$$

Dove Φ è il potenziale elastico ed L_e il lavoro dei carichi esterni

La configurazione iniziale X_0 è di equilibrio stabile se piccole perturbazioni dalla configurazione iniziale provocano solo piccole oscillazioni attorno a X_0

Criteri di stabilità per sistemi a nr finito di gradi di libertà

Sia \mathbf{x}_0 una configurazione di equilibrio stabile, allora una qualunque variazione $\delta\mathbf{x}$ da \mathbf{x}_0 dovrà comportare un aumento della Energia Potenziale Totale

$$\Delta\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \quad \delta\mathbf{x}, \quad |\delta\mathbf{x}| \rightarrow 0$$

Possiamo sviluppare in serie di Taylor

$$\Delta\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) = \underbrace{\delta\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x})}_{\text{Variazione prima}} + \frac{1}{2} \underbrace{\delta^2\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x})}_{\text{Variazione seconda}} + \dots$$

Criteri di stabilità per sistemi a nr finito di gradi di libertà

$$\Delta\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) = \delta\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \delta^2\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) + \dots$$

Dove:

$$\delta\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{x}_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x}_i$$

$$\delta^2\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{x}_i \partial\mathbf{x}_j} \right)_{\mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x}_i \delta\mathbf{x}_j$$

Condizione necessaria affinché \mathbf{x}_0 sia di equilibrio stabile è che

$$\delta\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{x}_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x}_i = 0 \quad \forall \quad \delta\mathbf{x}_i$$

Criteri di stabilità per sistemi a nr finito di gradi di libertà

**Tale condizione è verificata se risulta che
(condizione sufficiente)**

$$\delta^2 \Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \right)_{\mathbf{x}_0} \delta \mathbf{x}_i \delta \mathbf{x}_j > 0 \quad \forall \delta \mathbf{x}_i, \delta \mathbf{x}_j$$

Criteri di stabilità per sistemi a nr finito di gradi di libertà

Mentre l'imposizione dell'annullamento della variazione prima equivale a scrivere le equazioni di equilibrio, la positività della variazione seconda implica che l'equilibrio è stabile

La variazione seconda si può anche scrivere in forma matriciale come

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K}_0 \delta \mathbf{x}$$

Dove la matrice \mathbf{K}_0 ha componenti

$$\mathbf{K}_{ij0} = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \right|_{\mathbf{x}_0}$$

Criteri di stabilità per sistemi a nr finito di gradi di libertà

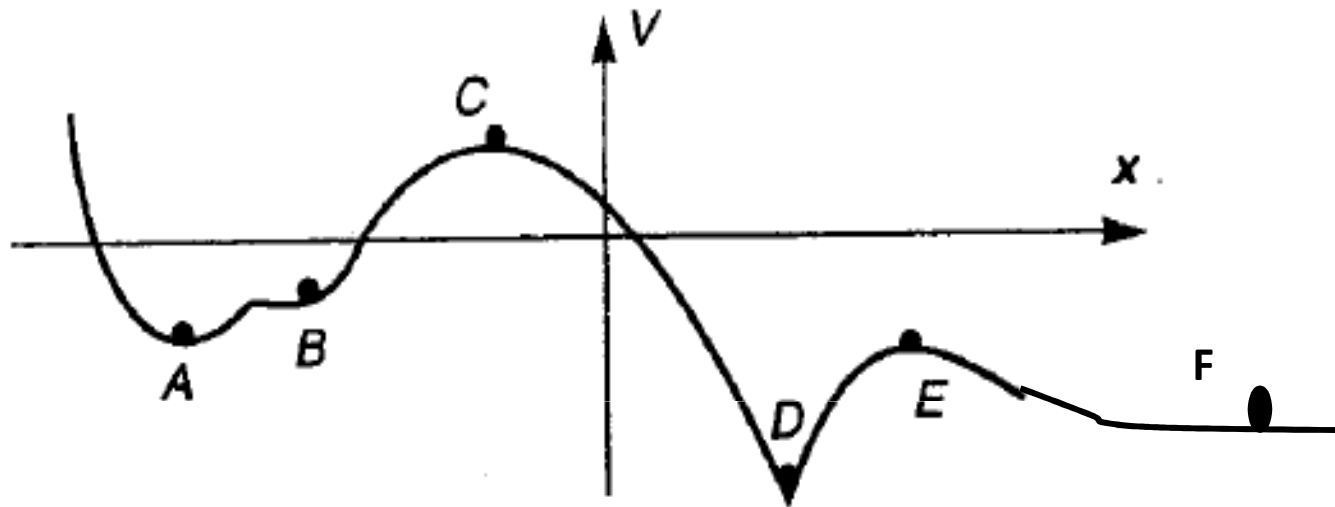
Allora l'equilibrio è stabile se la forma quadratica

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K}_0 \delta \mathbf{x}$$

è definita positiva

\mathbf{K}_0 è detta matrice Hessiana della forma quadratica associata con l'energia

Criteri di stabilità per sistemi a nr. finito di gradi di libertà



Pensiamo ad una sfera su una superficie rigida e consideriamo la sua Energia Potenziale Totale

A,B,D configurazione equilibrio stabile

E,F configurazione equilibrio instabile

Osservazioni

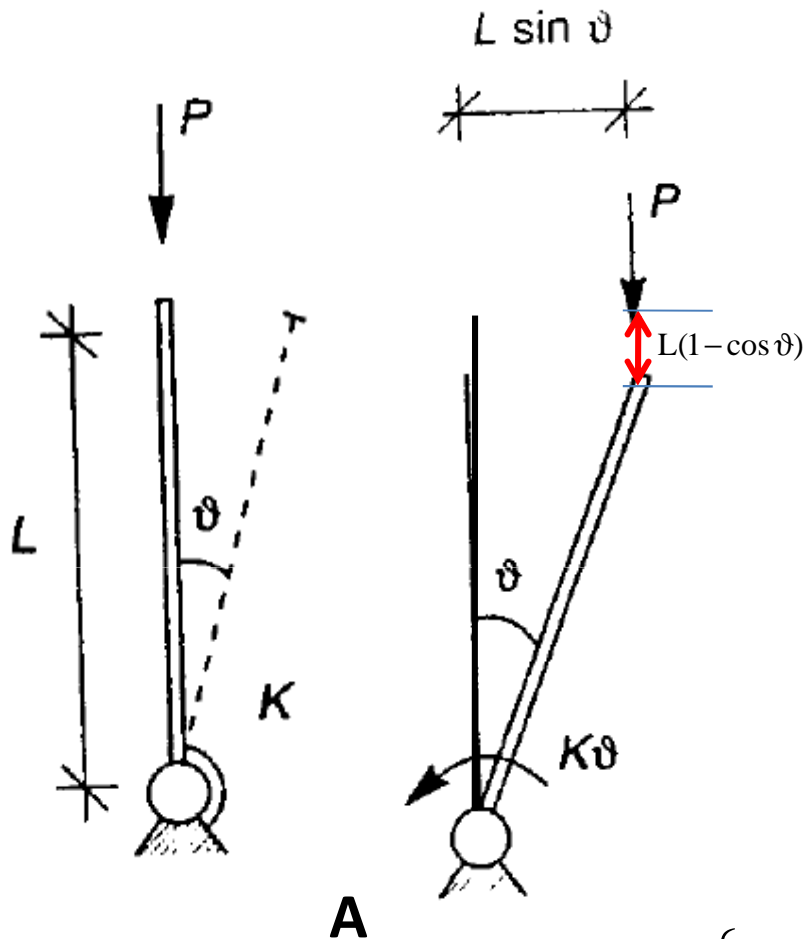
- Scrittura del P.L.V è equivalente all'imposizione della condizione $\delta\Pi=0$
- La condizione $\delta\Pi=0$ si traduce nella scrittura di n equazioni di equilibrio del tipo

$$g_i = \frac{\partial\Pi}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

dove i indica il grado di libertà i-esimo.

- La K_0 è la matrice di rigidezza del mio sistema: essa è simmetrica (teorema di Schwartz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione)
- Se i carichi non sono conservativi non derivano da un potenziale e dunque non è più garantita la simmetria

Esempio: sistema elastico ad 1 grado di libert 



$$\delta = L(1 - \cos \vartheta)$$

$$\Pi(\vartheta) = \frac{1}{2} K \vartheta^2 - PL(1 - \cos \vartheta)$$

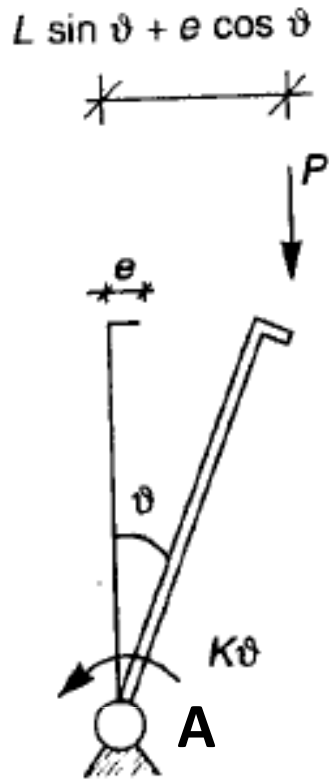
L'imposizione della condizione di stazionariet 

$$g = \frac{\partial \Pi(\vartheta)}{\partial \vartheta} = K\vartheta - PL \sin \vartheta = 0$$

  equivalente alla scrittura dell'equilibrio alla rotazione attorno ad A

$$\frac{\partial^2 \Pi(\vartheta)}{\partial \vartheta^2} = K - PL \cos \vartheta \begin{cases} > 0, & P < \frac{K}{L \cos \vartheta} & \text{stabile} \\ \leq 0, & P \geq \frac{K}{L \cos \vartheta} & \text{instabile} \end{cases}$$

Sistema elastico ad 1 grado di libertà con imperfezione



$$\delta = L(1 - \cos \vartheta) + e \sin \vartheta$$

$$\Pi(\vartheta) = \frac{1}{2} K \vartheta^2 - PL(1 - \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta) \quad \eta := \frac{e}{L}$$

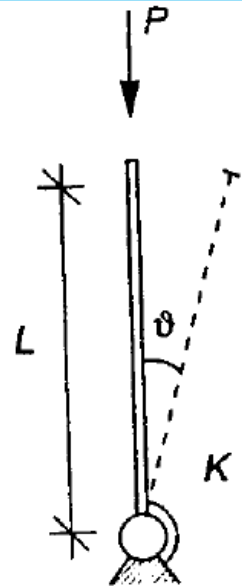
Ipotesi piccole imperfezioni, $\eta \ll 1$

$$g = \frac{\partial \Pi(\vartheta)}{\partial \vartheta} = K \vartheta - PL(\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta) = 0 \Rightarrow P = \frac{K \vartheta}{L(\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta)} \quad \forall \vartheta$$

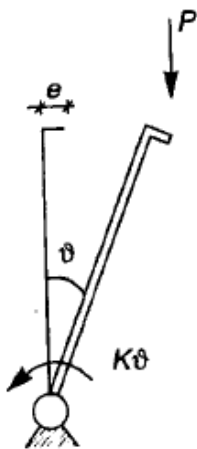
L'equilibrio è stabile e non si hanno biforcazioni se

$$\frac{\partial^2 \Pi(\vartheta)}{\partial \vartheta^2} = K \left[1 - \frac{PL}{K} (\cos \vartheta - \eta \sin \vartheta) \right] > 0$$

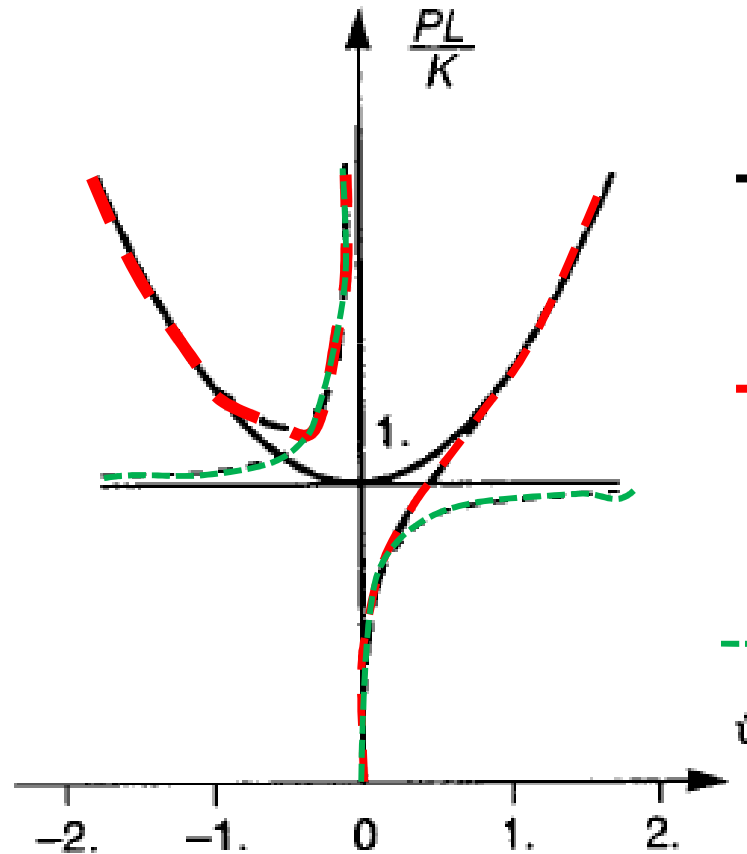
Sistema elastico ad 1 grado di libertà



$$L \sin \vartheta + e \cos \vartheta$$



c)



— Sistema perfetto,

- - - Sistema imperfetto,
 $\eta = 0.05$

- - - Hp piccoli
spostamenti,
approx II ordine
 $\sin \theta = \theta$

$$\cos \theta = 1 - \theta^2/2$$

EPT di un sistema 1 gr. Libertà con imperfezione

$$\frac{\partial \Pi(\vartheta)}{\partial \vartheta} = K\vartheta - PL(\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta) = 0 \Rightarrow$$

$$\vartheta - \frac{P}{K} L(\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta) = 0$$

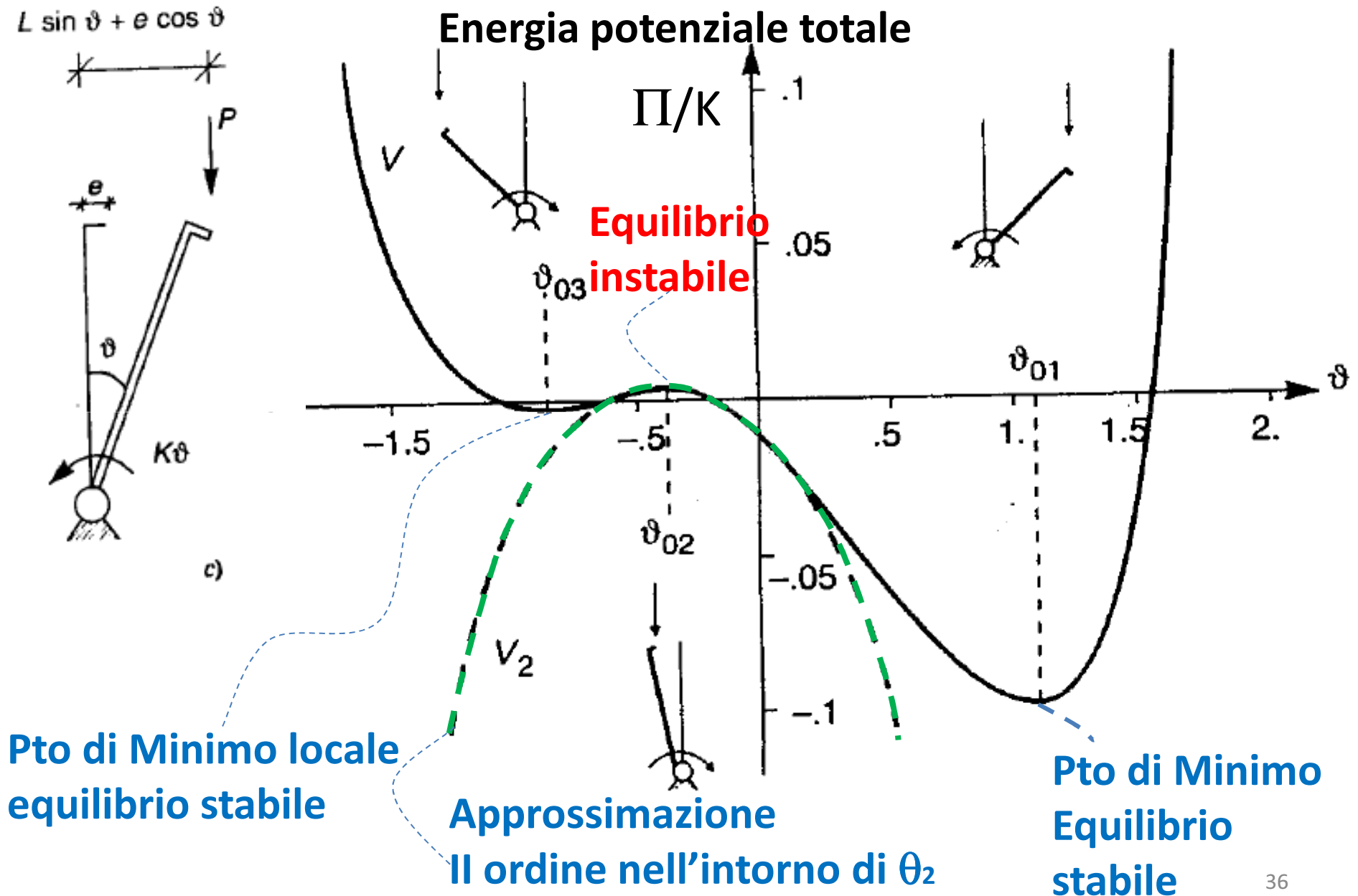
Troviamo le radici dell'equazione di equilibrio per $P=1.2 K/L$ ed $\eta=0.05$

$$\vartheta_1 = 1.093, \quad \vartheta_2 = -0.317, \quad \vartheta_3 = -0.915$$

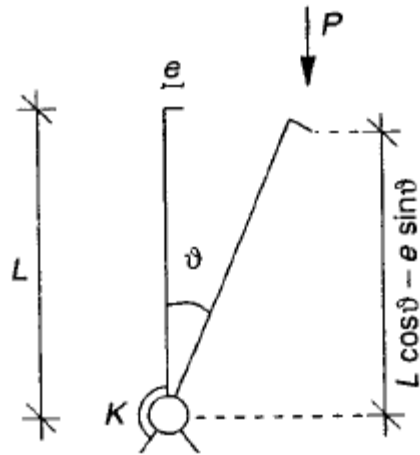
Analizzando la derivata seconda si ha una valutazione della qualità dell'equilibrio

$$\frac{\partial^2 \Pi(\vartheta)}{\partial \vartheta^2} = K \left[1 - \frac{PL}{K} (\cos \vartheta - \eta \sin \vartheta) \right]$$

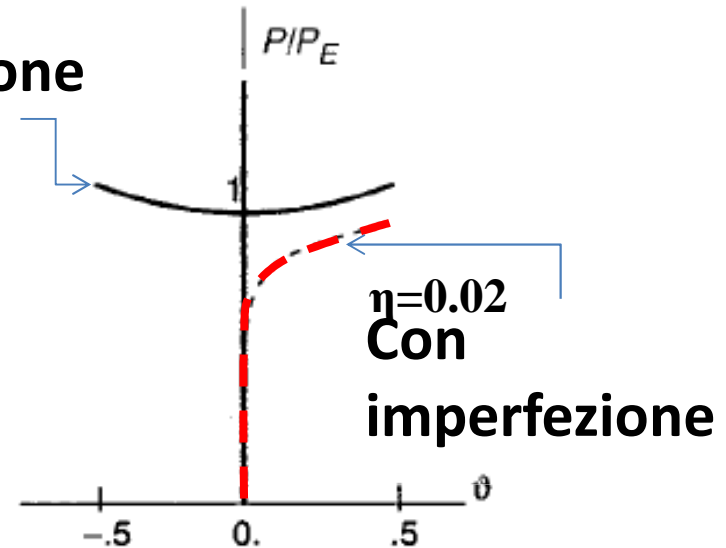
E.P.T. di un sistema ad 1 grado di libertà con imperfezione



Comportamento post-critico



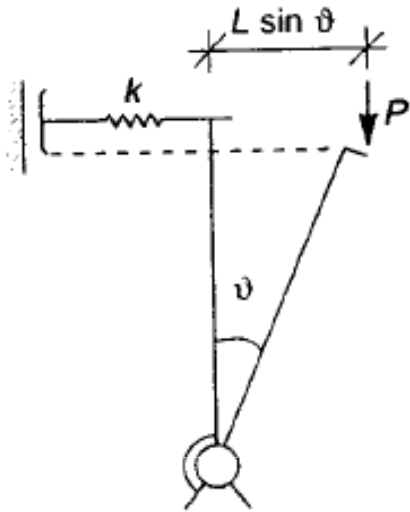
senza
imperfezione



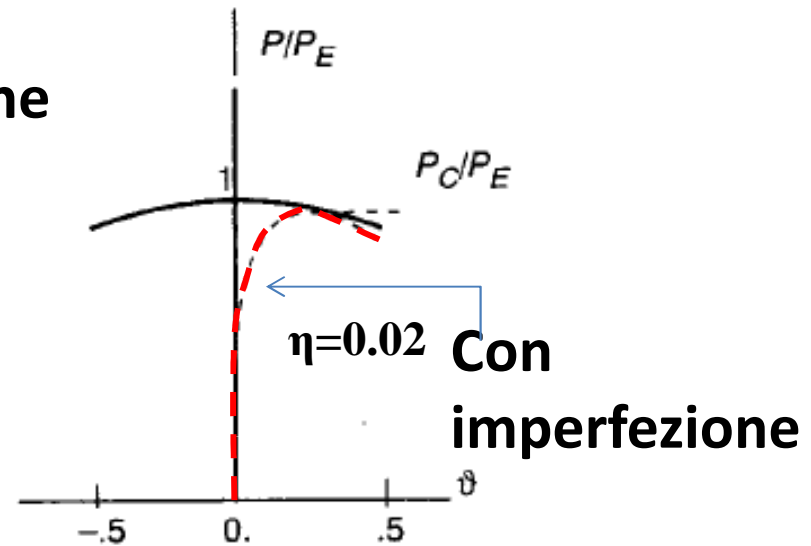
$$\frac{P}{P_E} = \frac{PL}{K} = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta}$$

Il sistema perfetto con carico critico Euleriano P_E presenta un comportamento post-critico **simmetrico stabile**; l'imperfezione elimina la biforcazione del carico, sospinge l'asta lungo un solo percorso deformativo

Comportamento post-critico



senza
imperfezione

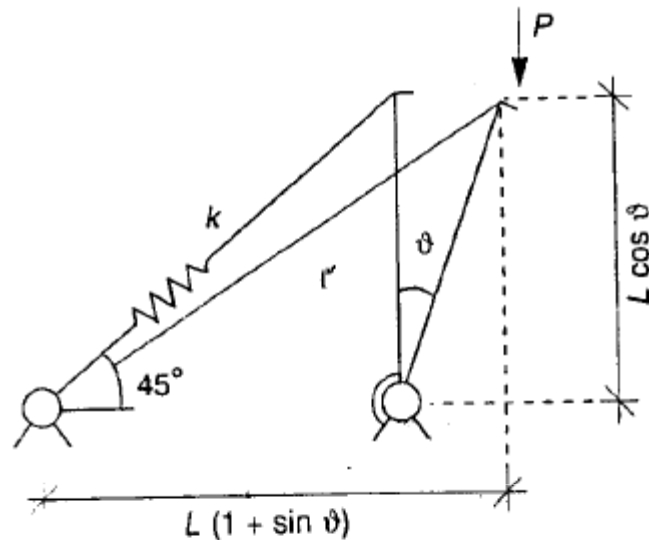


$$\frac{P}{P_E} = \frac{P}{KL} = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta}$$

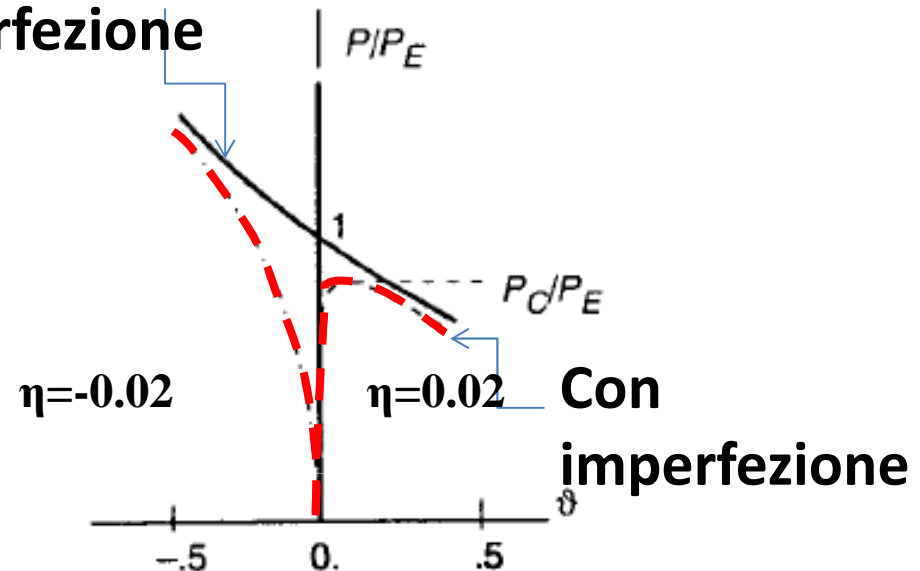
Il sistema perfetto presenta un comportamento post-critico **simmetrico instabile**

Si dice sensibile alle imperfezioni

Comportamento post-critico



senza
imperfezione



$$\frac{P}{P_E} = \frac{2P}{KL} = 2 \frac{\cos \vartheta - \sqrt{1 - \sin \vartheta}}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta}$$

Il sistema perfetto presenta un comportamento post-critico **asimmetrico instabile**

fortemente sensibile alle imperfezioni

La risposta dipende dal segno delle imperfezioni

Teoria del II ordine

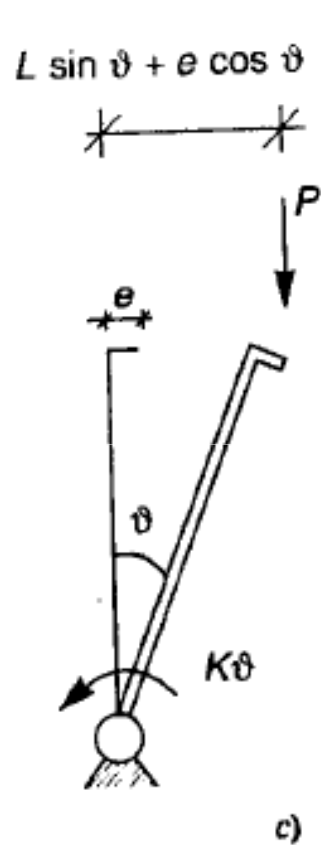
Risulta pertanto importante conoscere la natura discendente od ascendente dei percorsi di equilibrio post-biforcazione

Per semplificare la trattazione si suppone che gli spostamenti e le rotazioni in atto, pur se abbastanza grandi da influenzare la stabilità del sistema, siano abbastanza piccoli da poter sviluppare la EPT in un intorno della configurazione di riferimento ($\theta=0$) ed arrestare lo sviluppo al II ordine

Tale pratica è equivalente ad effettuare le approssimazioni al II ordine sulle grandezze trigonometriche

Teoria del II ordine

Esempio



$$\Pi(\vartheta) = \frac{1}{2} K \vartheta^2 - PL(1 - \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta) \quad \eta := \frac{e}{L}$$

Sviluppriamo in serie di Taylor attorno all'origine fino al II ordine

$$\Pi(\vartheta) \cong \Pi(0) + \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0} \vartheta + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vartheta^2} \right|_{\vartheta=0} \vartheta^2$$

$$\Pi(\vartheta) \cong -PL\eta\vartheta + \frac{1}{2} (K - PL)\vartheta^2$$

Lo stesso risultato si ottiene ponendo $\sin \vartheta \cong \vartheta$, $\cos \vartheta \cong 1 - \frac{\vartheta^2}{2}$ e sostituendo nella EPT

Teoria del II ordine: caso nr qualunque di gradi di libertà

Nel caso di un numero finito di gradi di libertà si ha

$$\Pi(\mathbf{x}) \cong \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right|_{x_i=0} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right|_{x_i=0} \left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_j} \right|_{x_j=0} x_i x_j$$

Poniamo

$$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}^T \quad \mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}^T \quad \mathbf{K}_{ij} = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \frac{\partial \Pi}{\partial x_j} \right|_0$$
$$p_i = - \left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right|_0$$

Dunque l'EPT si scrive

$$\Pi(\mathbf{x}) \cong -\mathbf{P}^T \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}$$

Equivalenza metodo energetico del II ordine e metodo statico

Il Metodo Energetico basato sulla teoria del II ordine porta agli stessi risultati del metodo statico (detto anche dell'equilibrio indifferente o di Eulero)

Solo che nel caso del metodo statico nell'equazione di equilibrio occorre arrestare lo sviluppo dei termini al I ordine

Problemi di tipo Euleriano

Sono caratterizzati da una configurazione di equilibrio fondamentale o banale quale quella rettilinea nelle aste compresse ove il comportamento pre-critico è lineare

In tal caso l'analisi del II ordine o linearizzata consiste nella determinazione del carico critico mediante un'analisi agli autovalori

I problemi non Euleriani presentano un comportamento non-lineare in fase pre-critica

Problemi di tipo Euleriano

**Si consideri un problema a nr finito di gradi di libertà
Il problema sia caratterizzato da una configurazione di
equilibrio banale pre-critico in cui la struttura si
comporta in modo lineare**

**→ Detto X_0 il vettore relativo ai carichi, la soluzione x_0
sarà proporzionale ad esso attraverso il moltiplicatore
dei carichi p**

$$\mathbf{x}_0 = p\mathbf{X}_0$$

Problemi di tipo Euleriano

Anche la variazione II dell' EPT deve essere lineare in p

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{x} = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K}^E \delta \mathbf{x} - p \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K}^G \delta \mathbf{x} = \Phi - W$$

Dove

$$\Phi = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K}^E \delta \mathbf{x} > 0 \quad \forall \delta \mathbf{x} \neq 0$$

Variazione II energia di deformazione

$$W = p \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K}^G \delta \mathbf{x}$$

Lavoro II ordine carichi esterni

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^E - p \mathbf{K}^G$$

K semi-definita >0

Problemi di tipo Euleriano

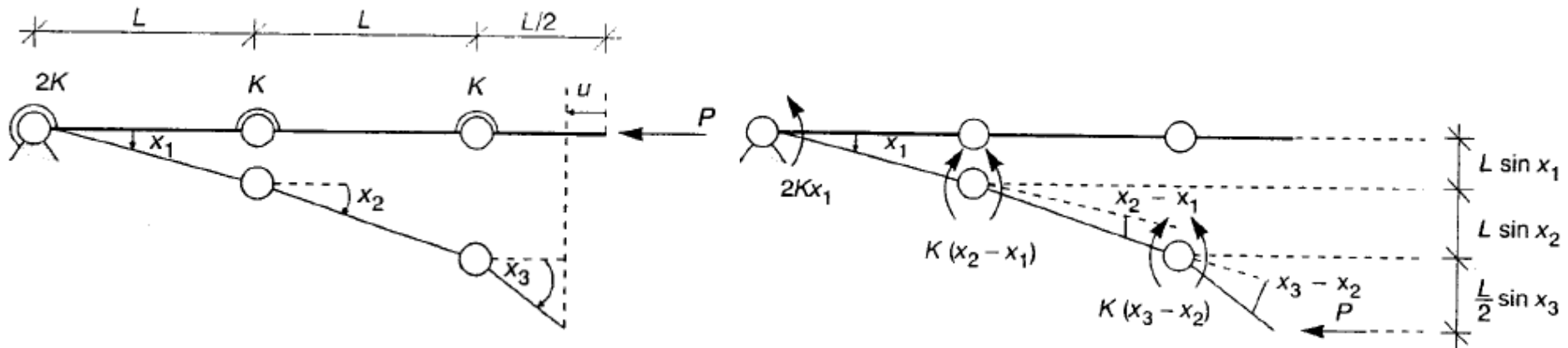
La configurazione banale cessa di essere di equilibrio stabile quando $\det K=0 \rightarrow$ si ottiene un'equazione da risolvere ponendo il polinomio caratteristico $=0$

Il carico critico P^E è la minore radice ovvero il più piccolo autovalore

Tale autovalore risulta ≥ 0 e reale per la semidefinizione positiva di $K = K^E - pK^G$

Esempio di problema Euleriano a 3 gr di libertà

L.Corradi III p 196



Avendo assunto come incognite le rotazioni x_1, x_2, x_3 , l'energia potenziale totale V si scrive

$$V(x) = \frac{1}{2} K(3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - PL \left(\frac{5}{2} - \cos x_1 - \cos x_2 - \frac{1}{2} \cos x_3 \right)$$

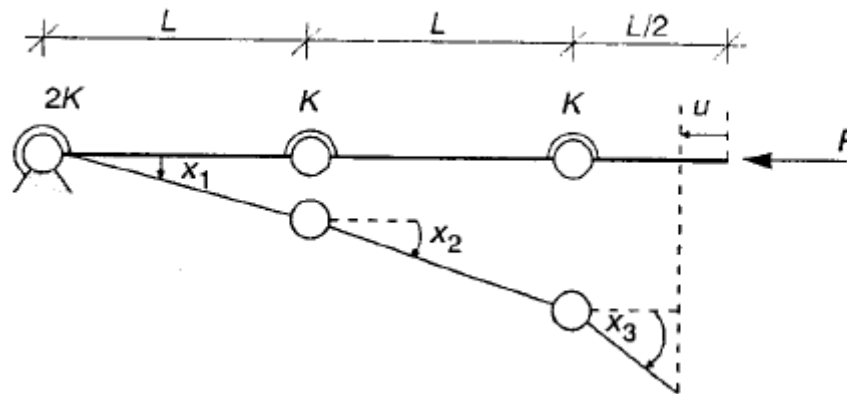
Poniamo $\rho = P \frac{L}{K}$ (\rightarrow carico base $P_0 = K/L$)

L'EPT a meno del fattore $K > 0$ diventa

$$V(x) = \frac{1}{2} (3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - \rho \left(\frac{5}{2} - \cos x_1 - \cos x_2 - \frac{1}{2} \cos x_3 \right)$$

Esempio di problema Euleriano a 3 gr di libertà

L.Corradi III p 196



Una configurazione banale è quella rettilinea

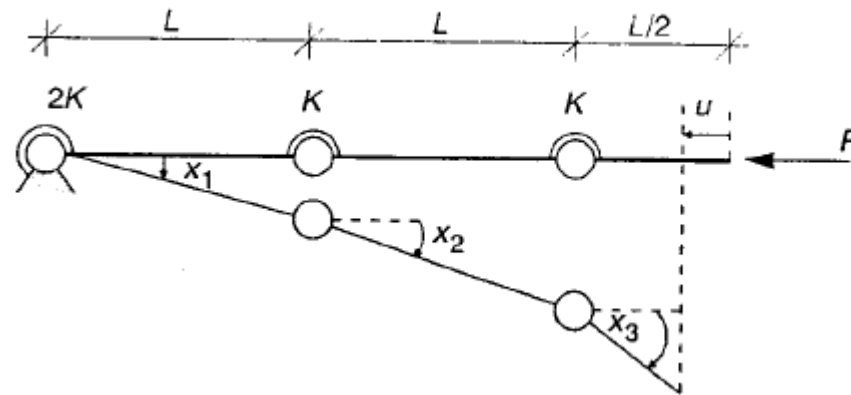
La variazione II dell'EPT in un intorno della configurazione di equilibrio rettilinea

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} [(3 - \rho)x_1^2 - 2x_1x_2 + (2 - \rho)x_2^2 - 2x_2x_3 + (1 - .5\rho)x_3^2]$$

$$K = \begin{bmatrix} 3 - \rho & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \rho & -1 \\ 0 & -1 & 1 - .5\rho \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{K^E} - \rho \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix}}_{K^G}$$

Esempio di problema Euleriano a 3 gr di libertà

L.Corradi III p 196



Il problema agli autovalori porta a trovare le radici del polinomio caratteristico

$$\det(K) = 2 - (6.5)p + (3.5)p^2 - (.5)p^3 = \frac{1}{2} (4 - p)(1 - 3p + p^2) = 0$$

ovvero

$$p_E = p_1 = .382$$

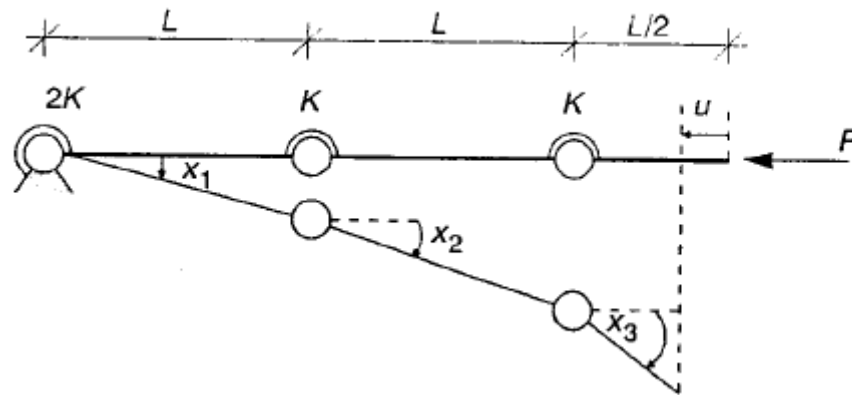
$$p_2 = 2.618$$

$$p_3 = 4.0$$

Carico critico
Euleriano

Esempio di problema Euleriano a 3 gr di libertà

L.Corradi III p 196



Gli autovettori associati sono (detto α un parametro che definisce l'ampiezza della configurazione)

$$\rho = \rho_1 = .382 : \begin{bmatrix} 0 & -1 & .809 \\ -1 & .618 & -.191 \\ 1.618 & -.382 & -.191 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_1 = \alpha \begin{Bmatrix} .309 \\ .809 \\ 1. \end{Bmatrix}$$

$$\rho = \rho_2 = 2.618 : \begin{bmatrix} 0 & -1 & -.309 \\ -1 & 1.618 & -1.309 \\ -.618 & -2.618 & -1.309 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_2 = \alpha \begin{Bmatrix} .809 \\ .309 \\ -1. \end{Bmatrix}$$

$$\rho = \rho_3 = 4.0 : \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_3 = \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Rapporto di Rayleigh

L.Corradi III p265

Si definisce Rapporto di Rayleigh

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\Phi(\mathbf{x})}{W(\mathbf{x})} = \frac{\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K}^E \mathbf{x}}{\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K}^G \mathbf{x}}$$

Si dimostra che:

A) Il carico critico di un sistema Euleriano rende minimo $R(\mathbf{x})$ $p_c = \min R(\mathbf{x})$

B) Se \mathbf{x}' rende stazionario $R(\mathbf{x}) \rightarrow$ si ha che $\delta R(\mathbf{x}', \mathbf{x}' + \delta \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{x}$

\mathbf{x}' rappresenta una configurazione di equilibrio non banale della struttura sotto il carico $p' = R(\mathbf{x}') = \frac{\frac{1}{2} \mathbf{x}'^T \mathbf{K}^E \mathbf{x}'}{\frac{1}{2} \mathbf{x}'^T \mathbf{K}^G \mathbf{x}'}$

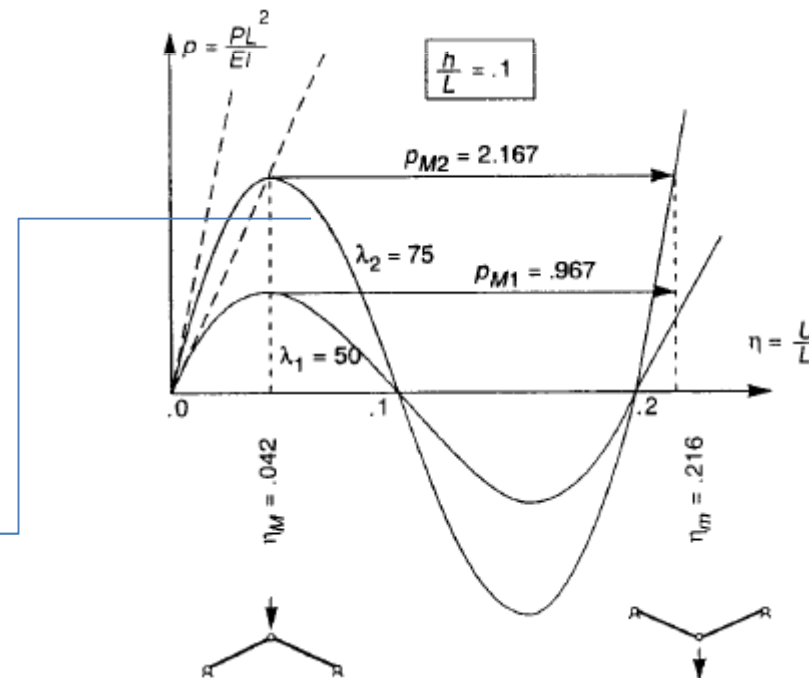
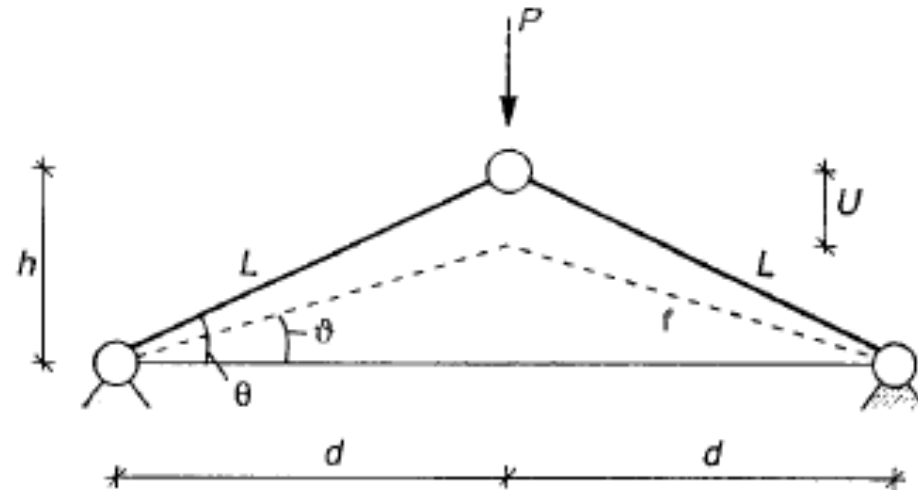
Esempio di problema non Euleriano

L.Corradi III p 384

**Sistema
conservativo non
lineare in fase
pre-critica**

**Le aste sono
deformabili
assialmente**

Snap through ←



Esempio di problema non Euleriano: influenza della deformabilità assiale

L.Corradi III p 202

Nei problemi Euleriani il comportamento pre-critico è lineare, ovvero è possibile confondere la configurazione attuale con quella iniziale

Nelle travi ciò è possibile se è possibile trascurare le deformazioni assiali nei confronti di quelle flessionali, cosa vera per travi normalmente dimensionate

Consideriamo un caso in cui non è possibile trascurare la deformabilità assiale

Esempio di problema non Euleriano: influenza della deformabilità assiale

L.Corradi III p 202

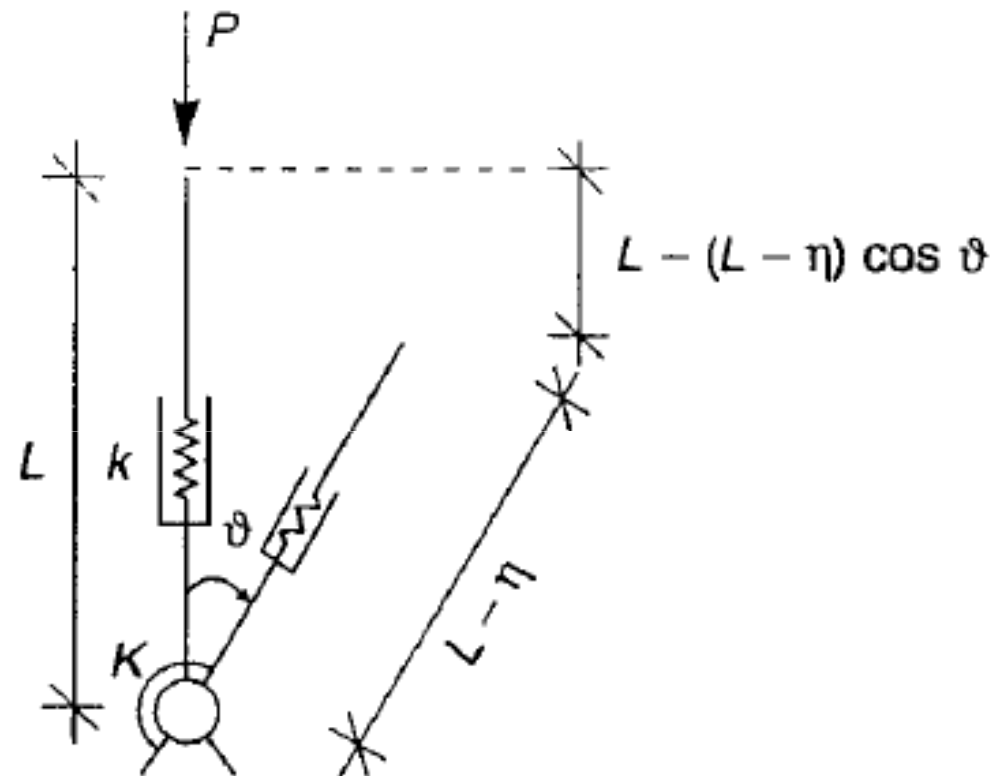
Sia k la rigidezza assiale dell'asta

K la rigidezza rotazionale della molla alla base

Coordinate Lagrangiane:

ϑ rotazione asta

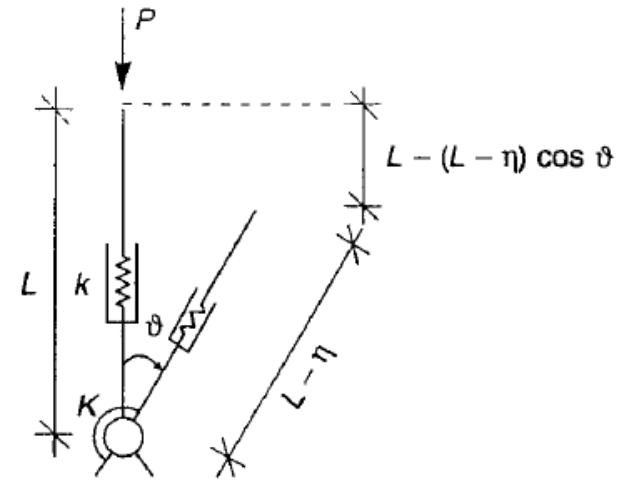
η accorciamento asta



Esempio di problema non Euleriano: influenza della deformabilità assiale

EPT

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} K \vartheta^2 + \frac{1}{2} k \eta^2 - P[L - (L - \eta) \cos \vartheta]$$



Le equazioni di Equilibrio

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = k\eta - P \cos \vartheta = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = K\vartheta - P(L - \eta) \sin \vartheta = 0$$

ammettono la soluzione (config. banale)
rettilenea ma deformata assialmente:

$$x_{01} = \eta_0 = \frac{P}{k} \quad x_{02} = \vartheta_0 = 0$$

Esempio di problema non Euleriano: influenza della deformabilità assiale

Per verificare se la configurazione di equilibrio banale è stabile occorre calcolare la variazione II dell'EPT

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \delta^2 V(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \right)_{\mathbf{x}_0} \delta \eta^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \vartheta} \right)_{\mathbf{x}_0} \delta \eta \delta \vartheta + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} \right)_{\mathbf{x}_0} \delta \vartheta^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[k \delta \eta^2 + \left(K - PL + \frac{P^2}{k} \right) \delta \vartheta^2 \right]\end{aligned}$$

Tale variazione II risulta una funzione quadratica (non-lineare) del carico P

Quindi se si considera la deformabilità assiale di un'asta il problema non è Euleriano

Esempio di problema non Euleriano: influenza della deformabilità assiale

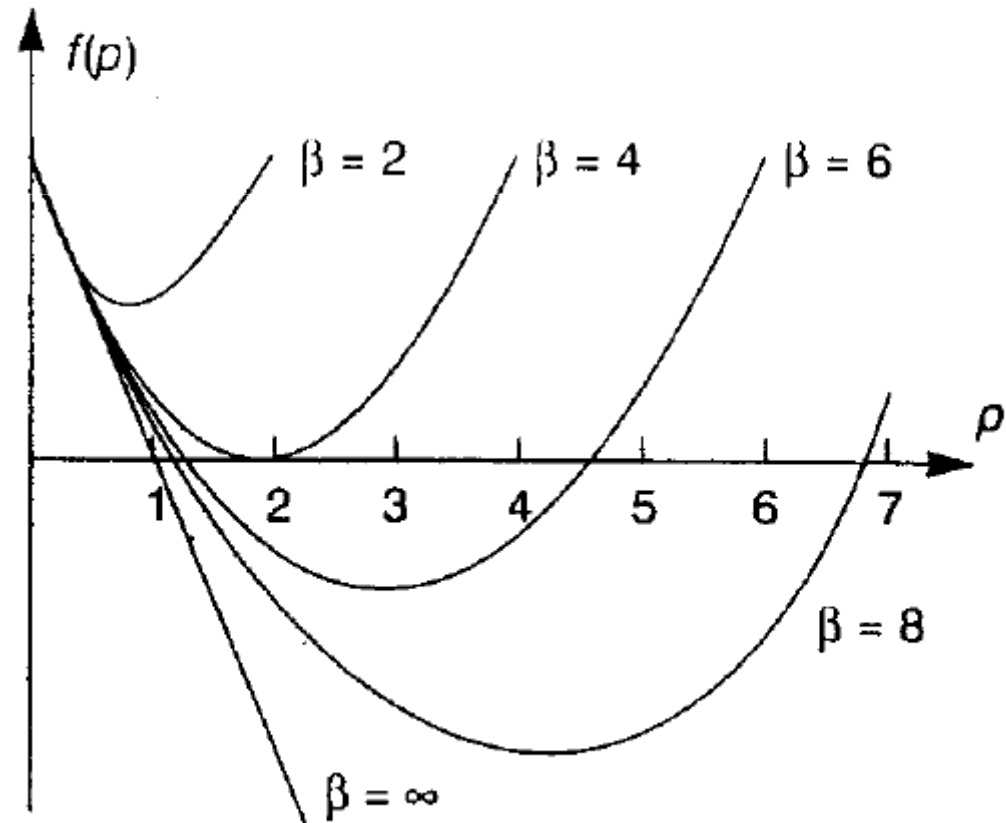
Tuttavia la soluzione può essere comunque di equilibrio stabile se la variazione II di EPT è > 0

La condizione di stabilità si riconduce a scrivere

$$f(p) = 1 - p + \frac{p^2}{\beta} > 0$$

Dove si è posto

$$p = P \frac{L}{K} \quad \beta = \frac{kL^2}{K}$$



Esempio di problema non Euleriano: influenza della deformabilità assiale

$$f(p) = 1 - p + \frac{p^2}{\beta} > 0$$

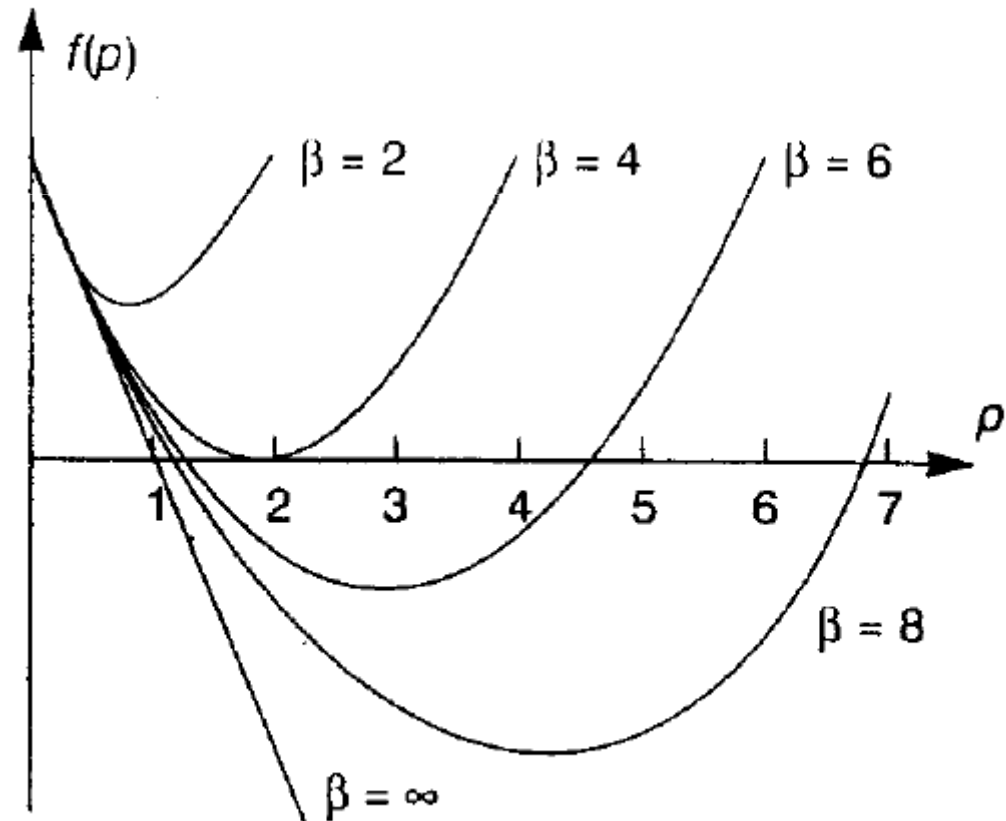
$$p = P \frac{L}{K}$$

$$\beta = \frac{kL^2}{K}$$

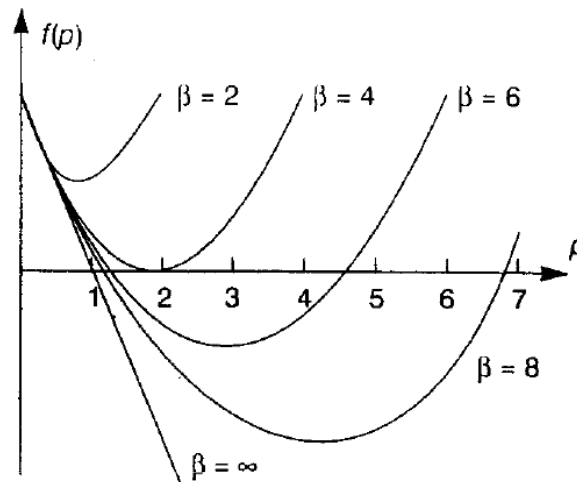
Al crescere di β il termine $p^2/\beta \rightarrow 0$
 \rightarrow Asta rigida assialmente

$f(p)$ tende alla retta ed il risultato è quello noto

Per aste reali $\beta \sim 1000$



Esempio di problema non Euleriano: influenza della deformabilità assiale



La configurazione di equilibrio diviene instabile solo per carichi poco superiori a quelli valutati nell'ipotesi di indeformabilità assiale e torna stabile solo per valori elevati poco realistici

Ai fini tecnici è lecito trascurare la deformabilità assiale