

PROBLEMI NON-LINEARI NEL CALCOLO STRUTTURALE

**1/ Non-linearità geometrica:
spostamenti e deformazioni finiti**

**2/ Non-linearità materiale: legge
costitutiva non-lineare, plasticità,
meccanica del danno, ipoelasticità,...**

**RIF: M.Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*,
John Wiley & Sons, 1991—Cap 1 e Cap. 9**

Soluzione di problemi NON-LINEARI

1 attivazione di una procedura iterativo-incrementale basata sul Metodo di Newton-Raphson

2 scelta della procedure di controllo dell'evoluzione della curva strutturale

2.1 controllo di carico

2.2 controllo di spostamento

2.2 controllo misto carico/spostamento

SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE NON-LINEARE

Data la funzione

$$**a(x)=b**$$

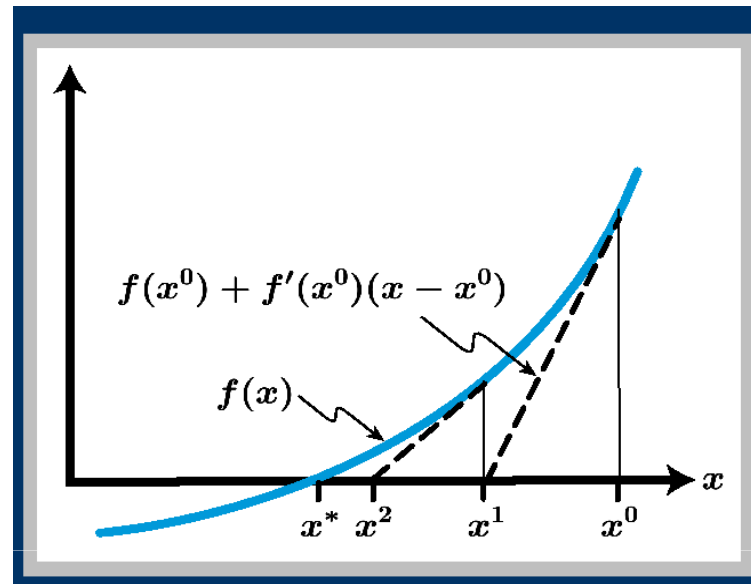
Essa puo' essere espressa come:

$$**h(x)=a(x)-b**$$

Risolvere $a(x)=b$ ~ risolvere $h(x)=0$

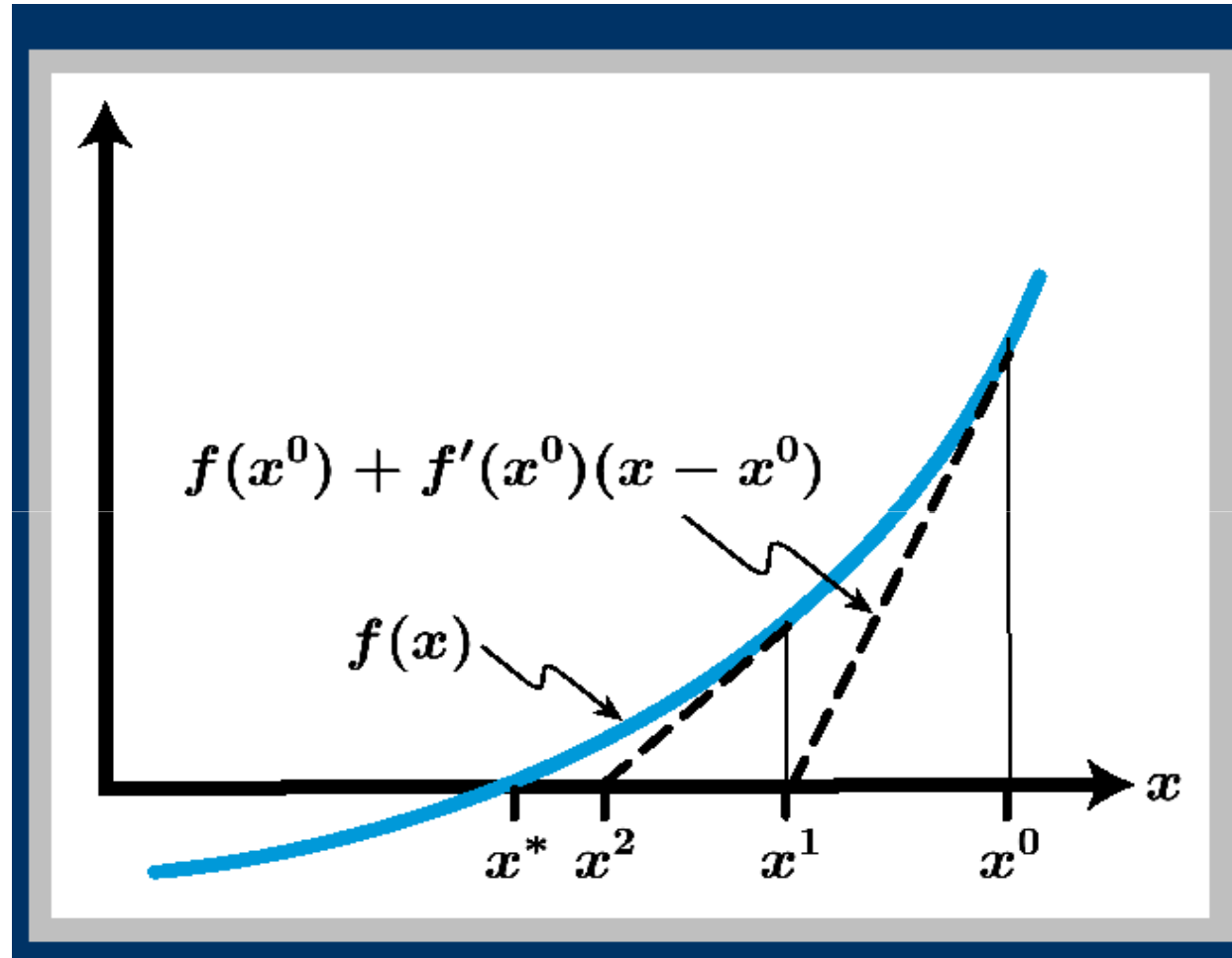
In campo nonlineare la risoluzione di $h(x)=0$ si affronta con una tecnica iterativa

SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE NON-LINEARE



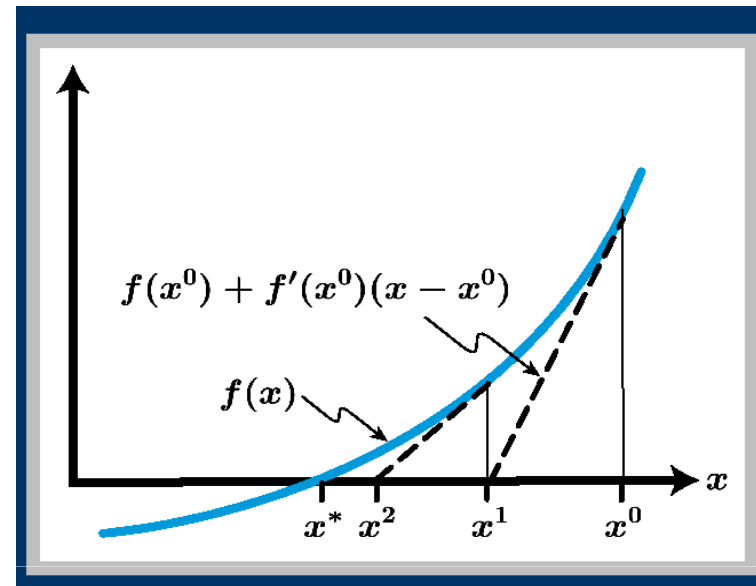
1. Si parte dal valore iniziale x^0
2. Si genera una sequenza di valori iterativi x^{n-1}, x^n, x^{n+1} convergenti alla soluzione x^*
3. Si itera secondo una procedura iterativa del tipo : $x^{n+1}=F(x^n)$

METODO DI NEWTON-RAPHSON



METODO DI NEWTON-RAPHSON

Si sostituisce $f(x)$ con la sua versione linearizzata



$$f(x) = f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}(x - x^*)$$

$$f(x^{k+1}) = f(x^k) + \frac{df(x^k)}{dx}(x^{k+1} - x^k)$$

$$\Rightarrow x^{k+1} = x^k - \left[\frac{df(x^k)}{dx} \right]^{-1} f(x^k)$$

Taylor Series

funzione iterativa

Nota: ad ogni step occorre valutare f and f'

METODO DI NEWTON-RAPHSON

Processo iterativo: ripeti da $k = 0$ a

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \left[\frac{df(\mathbf{x}^k)}{d\mathbf{x}} \right]^{-1} f(\mathbf{x}^k)$$

Fino a convergenza

DEF: una sequenza iterativa $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ converge con l'ordine q ad un valore \mathbf{x}^* se esiste un vettore norma tale che per ogni $k \geq N$:

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^k \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^q$$

METODO DI NEWTON-RAPHSON

Sappiamo che, se x^* e' la soluzione di $f(x)=0$, lo sviluppo in serie nell'intorno di x^k diventa

$$0 = f(x^*) = f(x^k) + \frac{df(x^k)}{dx}(x^* - x^k) + \frac{d^2f(\tilde{x})}{dx^2}(x^* - x^k)^2$$

Sappiamo inoltre che in base al Metodo di Newton Raphson

$$0 = f(x^k) + \frac{df(x^k)}{dx}(x^{k+1} - x^k)$$

METODO DI NEWTON-RAPHSON

Sottraendo

$$\frac{df(\mathbf{x}^k)}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*) = \frac{d^2f(\mathbf{x}^k)}{d\mathbf{x}^2}(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*)^2$$

Moltiplicando per l'inverso del gradiente

$$(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*) = \left[\frac{df(\mathbf{x}^k)}{d\mathbf{x}} \right]^{-1} \frac{d^2f(\mathbf{x}^k)}{d\mathbf{x}^2} (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*)^2$$

Sia $\left\| \left[\frac{df}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^k) \right]^{-1} \frac{d^2f}{d\mathbf{x}^2}(\mathbf{x}^k) \right\| = \mathbf{K}^k$

allora $\| \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^* \| = \mathbf{K}^k \| \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^* \|^2$

Convergenza
quadratica

METODO DI NEWTON-RAPHSON

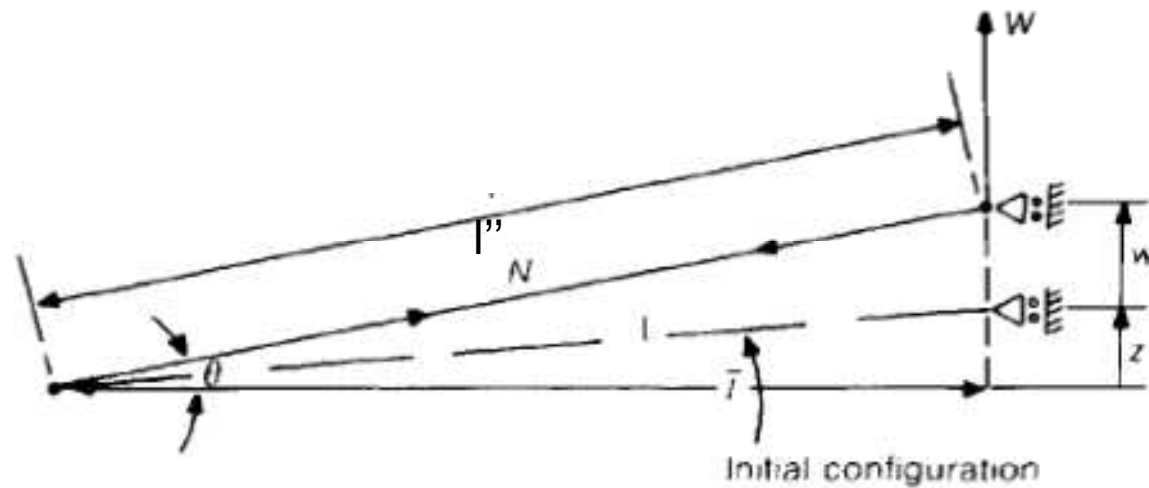
Vantaggi:

-Convergenza quadratica quando si hanno radici con molteplicita' semplice ed il gradiente esiste e si parte da una soluzione di tentativo sufficientemente vicina alla soluzione

Svantaggi:

-Occorre calcolare il gradiente, ma non sempre esso esiste
-Occorre partire da una soluzione di tentativo sufficientemente vicina alla soluzione

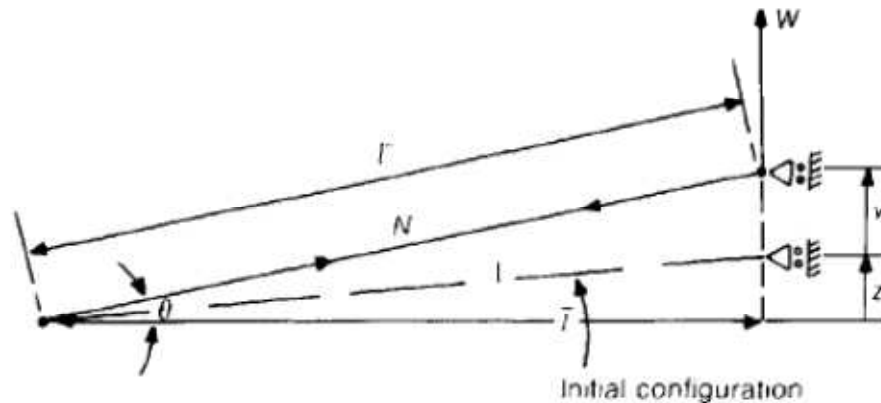
Esempio di non-linearità geometrica ad 1 grado di libertà



Equilibrio verticale

$$W = N \sin \theta = N \frac{w + z}{l''} \cong N \frac{w + z}{l}$$

Esempio di non-linearità geometrica ad 1 grado di libertà



$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(z+w)^2 + \bar{l}^2} - \sqrt{z^2 + \bar{l}^2}}{\sqrt{z^2 + \bar{l}^2}} \cong \left(\frac{z}{\bar{l}}\right)\left(\frac{w}{\bar{l}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{\bar{l}}\right)^2$$

Deformazione nell'asta
supponendo piccolo θ
ottenuta applicando il
Teorema di Pitagora

$$N = EA\varepsilon = EA \left[\left(\frac{z}{\bar{l}}\right)\left(\frac{w}{\bar{l}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{\bar{l}}\right)^2 \right]$$

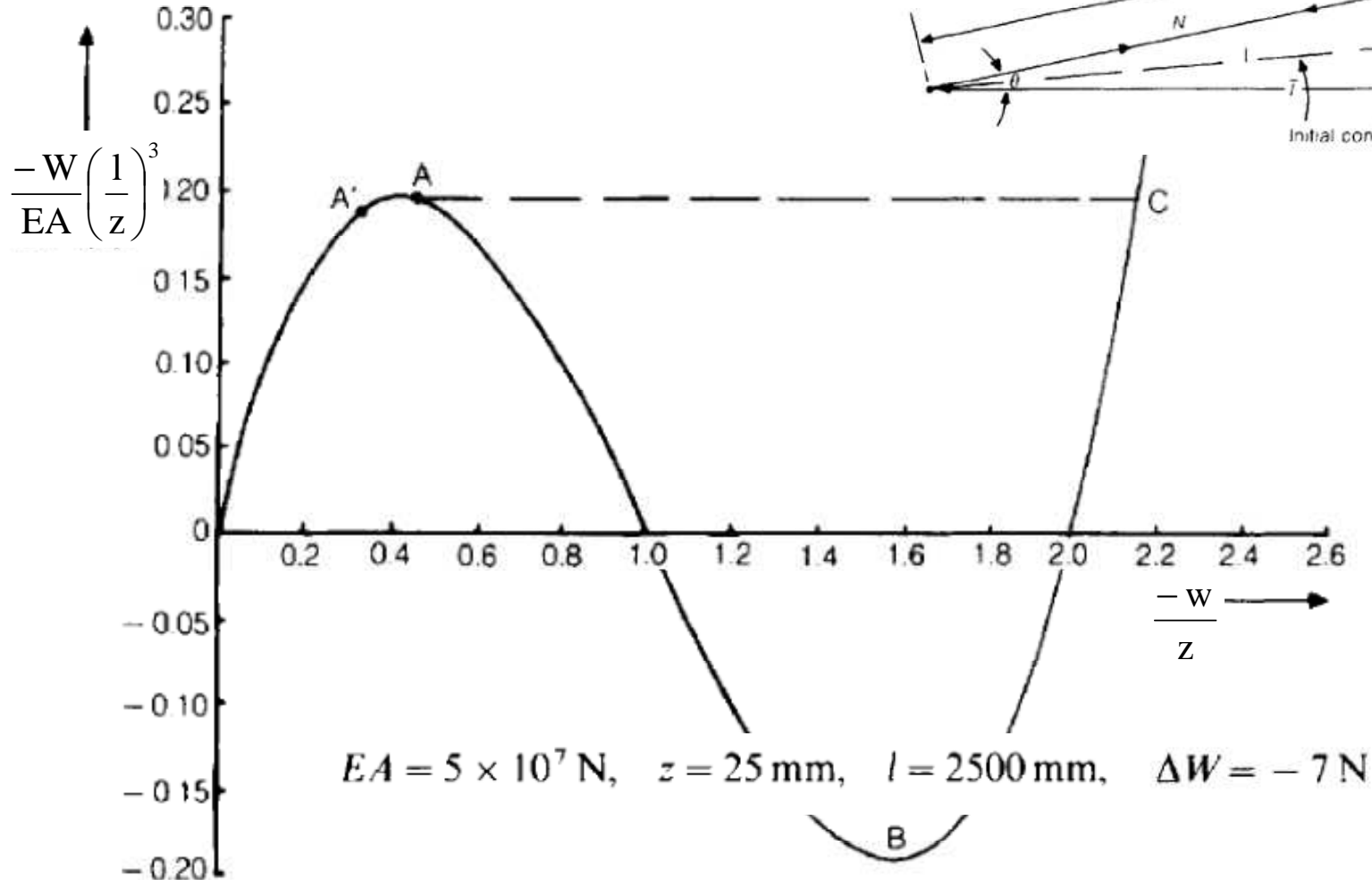
Sforzo nell'asta

$$W = N \frac{w+z}{\bar{l}} = \left[\left(\frac{z}{\bar{l}}\right)\left(\frac{w}{\bar{l}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{\bar{l}}\right)^2 \right] \frac{w+z}{\bar{l}}$$

Componente verticale

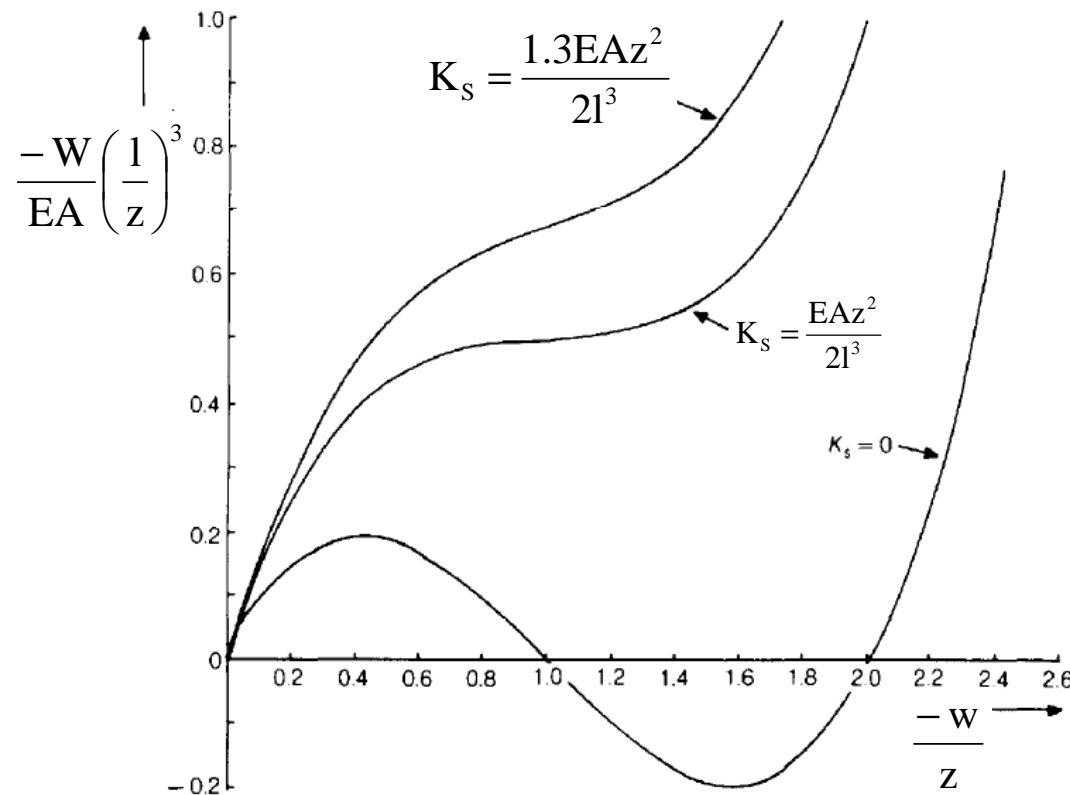
Esempio di non-linearità geometrica ad 1 grado di libertà

$$W = \frac{EA}{l^3} \left(z^2 w + \frac{3}{2} z w^2 + \frac{1}{2} w^3 \right)$$



Esempio di non-linearità geometrica ad 1 grado di libertà con molla

$$W = \frac{EA}{l^3} \left(z^2 w + \frac{3}{2} z w^2 + \frac{1}{2} w^3 \right) + K_s w$$



$EA = 5 \times 10^7 \text{ N}, \quad z = 25 \text{ mm}, \quad l = 2500 \text{ mm}, \quad K_s = 1.35 \text{ N/mm}, \quad \Delta W = -7 \text{ Nmm}$

Risoluzione del problema di non-linearità geometrica ad 1 grado di libertà mediante il METODO DI NEWTON-RAPHSON

Introduciamo la differenza (detta residuo) tra la **forza interna**, calcolata usando il legame costitutivo N-w, e la **forza esterna** reale applicata

$$g = \frac{EA}{I^3} \left(\underbrace{z^2 w + \frac{3}{2} z w^2 + \frac{1}{2} w^3}_{\text{forza interna}} \right) - \underbrace{W}_{\text{forza esterna}} = 0$$

Il nostro obiettivo è soddisfare esattamente l'equazione $g=0$, che, tuttavia, è non lineare in w

Se $g \neq 0$ l'equazione di equilibrio non risulta soddisfatta

Si supponga ora di adottare una procedura approssimata iterativa alla N-R per la soluzione dell'equazione $g=0$

Risoluzione del problema di non-linearità geometrica ad 1 grado di libertà mediante il METODO DI NEWTON-RAPHSON

Approssimiamo il residuo valutato nella posizione 'n' (**new**) come polinomio di Taylor nell'intorno della posizione precedente 'o' (**old**) troncato al I ordine

$$g_n \cong g_0 + \underbrace{\frac{dg_0}{dw}}_{\text{Tangente Calcolata nella posizione old 'o'}} \delta w + \frac{1}{2} \frac{d^2g_0}{dw^2} (\delta w)^2$$

=0
trascurabile

Tangente Calcolata nella posizione old 'o'

Risoluzione del problema di non-linearità geometrica ad 1 grado di libertà mediante il METODO DI NEWTON-RAPHSON

Passo 3/ Si pone il residuo valutato nella posizione 'n' uguale a 0

$$\mathbf{g}_n = 0$$

Passo 4/ Si risolve l'equazione ottenuta nell'incremento δw

$$\delta \mathbf{w}_0 = - \left(\frac{d\mathbf{g}_0}{d\mathbf{w}} \right)^{-1} \mathbf{g}_0(\mathbf{w}_0)$$

Passo 5/ si ottiene una nuova stima per lo spostamento w

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0 + \delta \mathbf{w}_0$$

Risoluzione del problema di non-linearità geometrica ad 1 grado di libertà mediante il METODO DI NEWTON-RAPHSON

Si riparte quindi dall'inizio con una nuova valutazione:

$$\delta \mathbf{w}_1 = - \left(\frac{d\mathbf{g}_1}{d\mathbf{w}} \right)^{-1} \mathbf{g}_1(\mathbf{w}_1)$$

Fino a convergenza ovvero fino a quando $\|g\| \leq tol$

Si osservi che nel nostro caso $g = \frac{N(z+w)}{1} - W$

Pertanto $\frac{dg}{dw} = \frac{(z+w)}{1} \frac{dN}{dw} + \frac{N}{1} = K_t$ **RIGIDEZZA**
TANGENTE

METODO DI NEWTON-RAPHSON

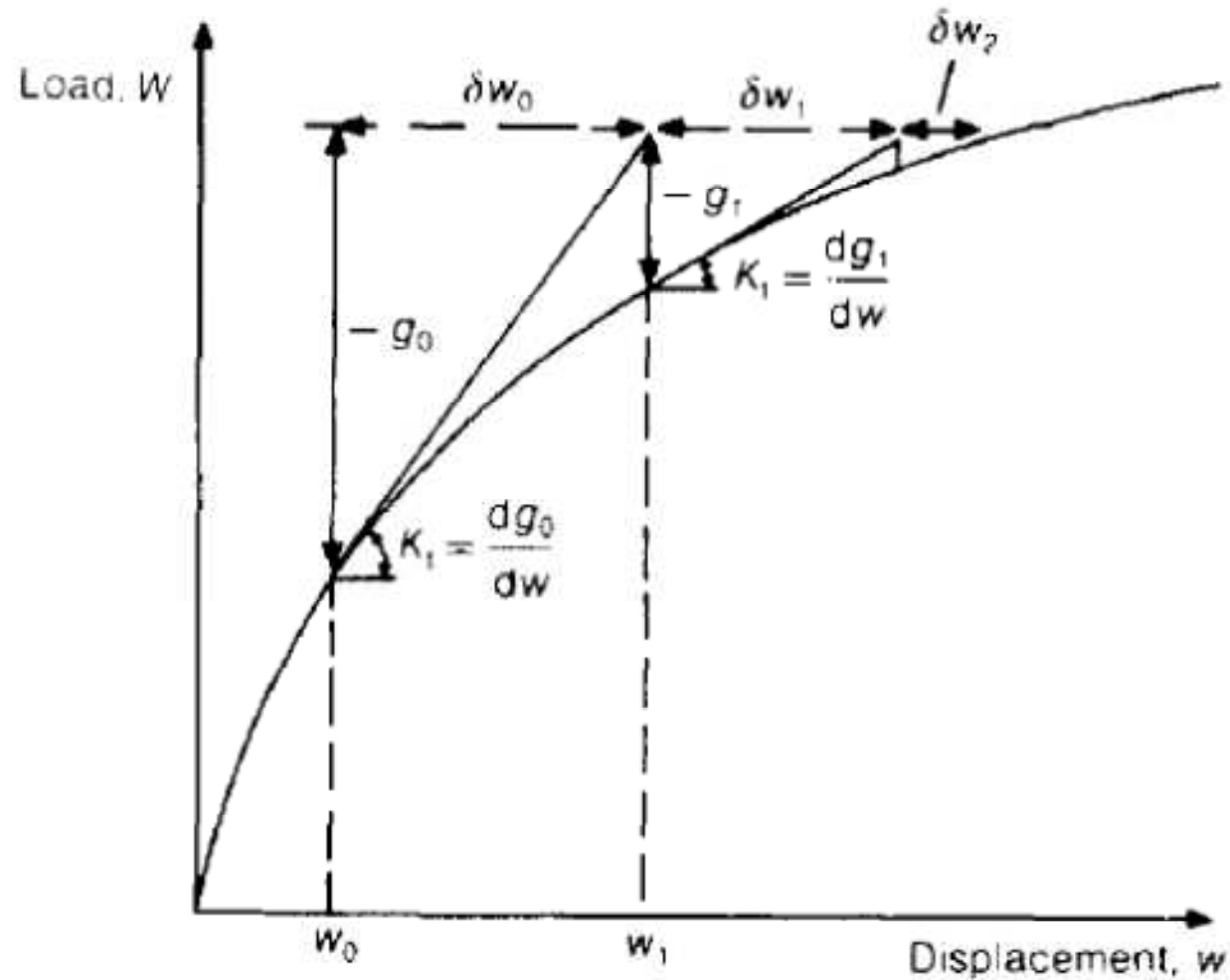


Figure 1.5 The Newton-Raphson method.

METODO DI NEWTON-RAPHSON: problemi connessi al calcolo della rigidezza tangente K_t

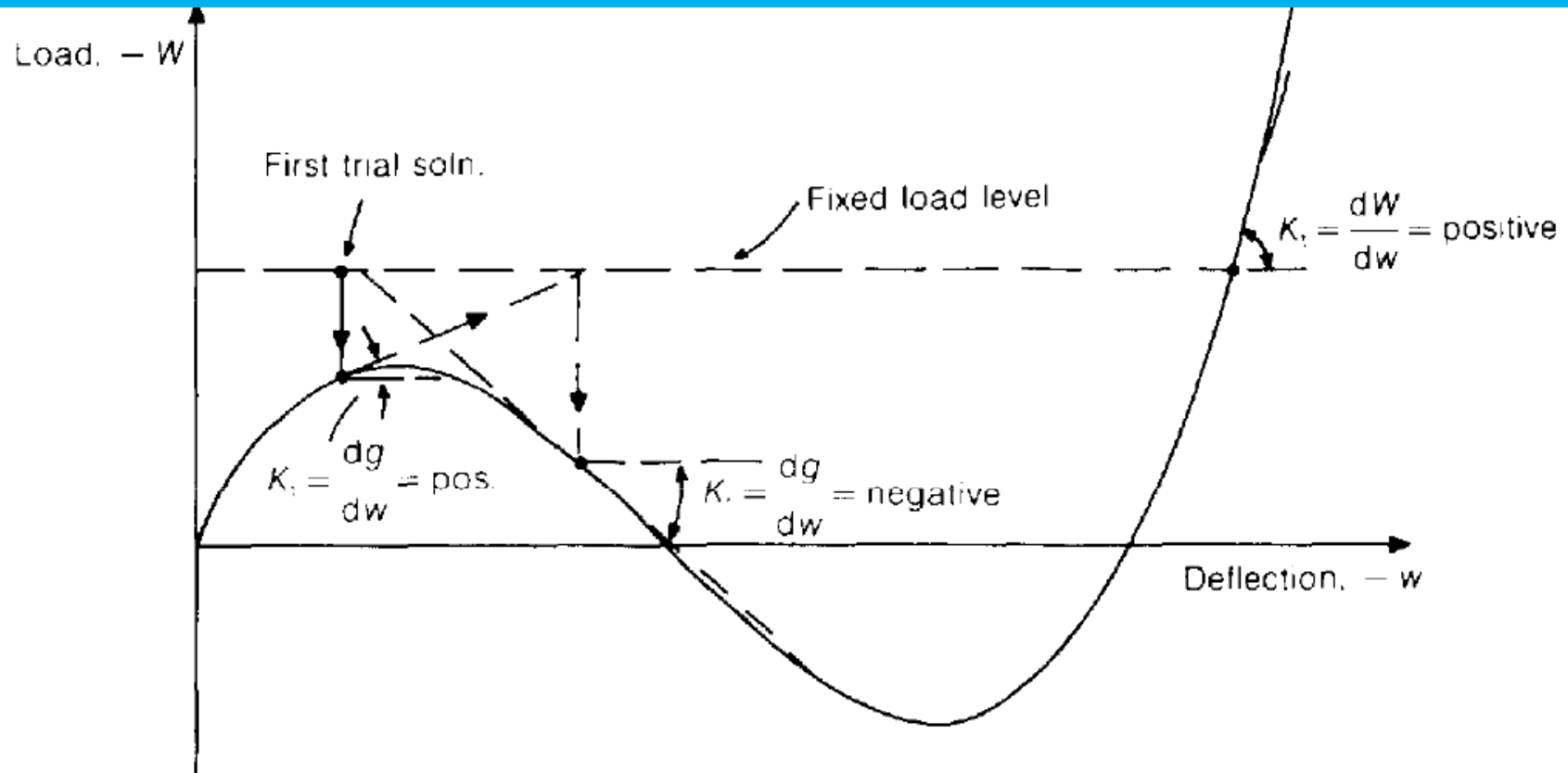


Figure 1.6 Positive and negative tangent stiffnesses.

In generale K_t può essere >0 , $=0$, <0 oppure può non esistere

Si preferiscono quindi metodi basati non sulla rigidezza tangente ma su approssimazioni della derivata dg/dw

METODO DI NEWTON-RAPHSON modificato secondo la rigidezza di inizio passo

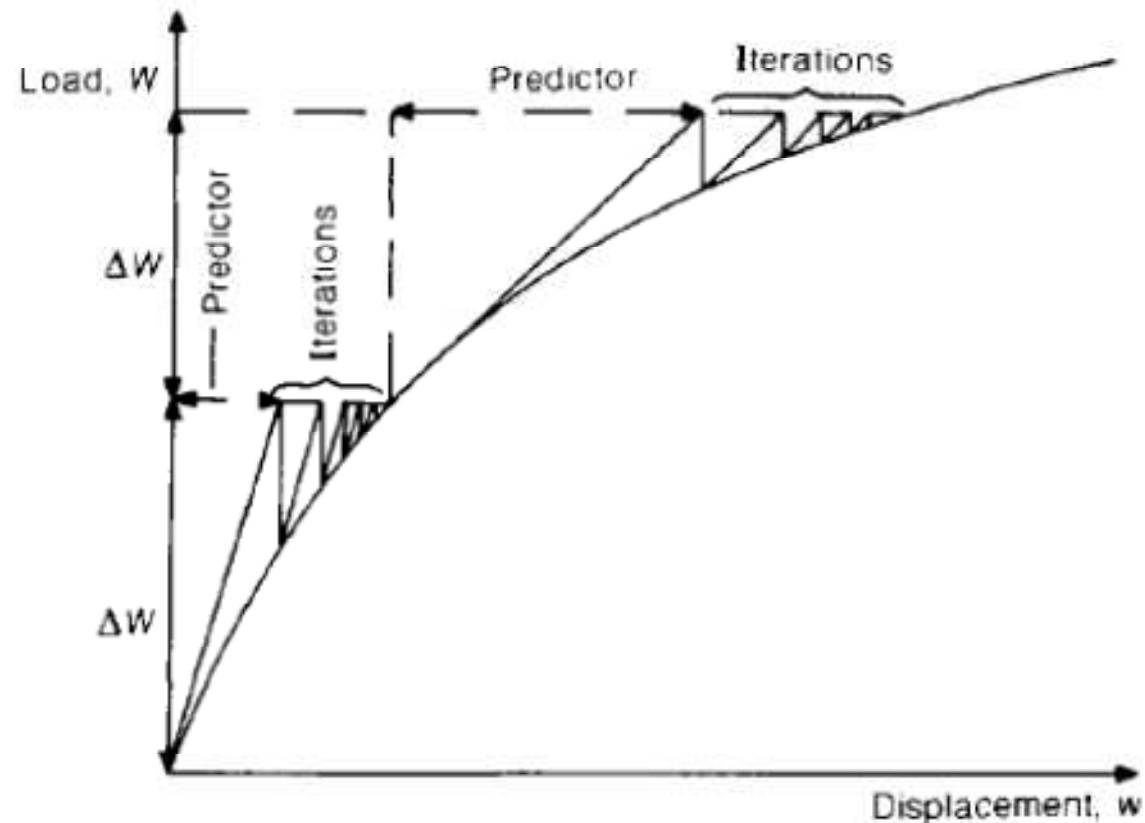


Figure 1.8 A combination of incremental predictors with modified Newton–Raphson iterations.

METODO DI NEWTON-RAPHSON modificato secondo la rigidezza elastica iniziale

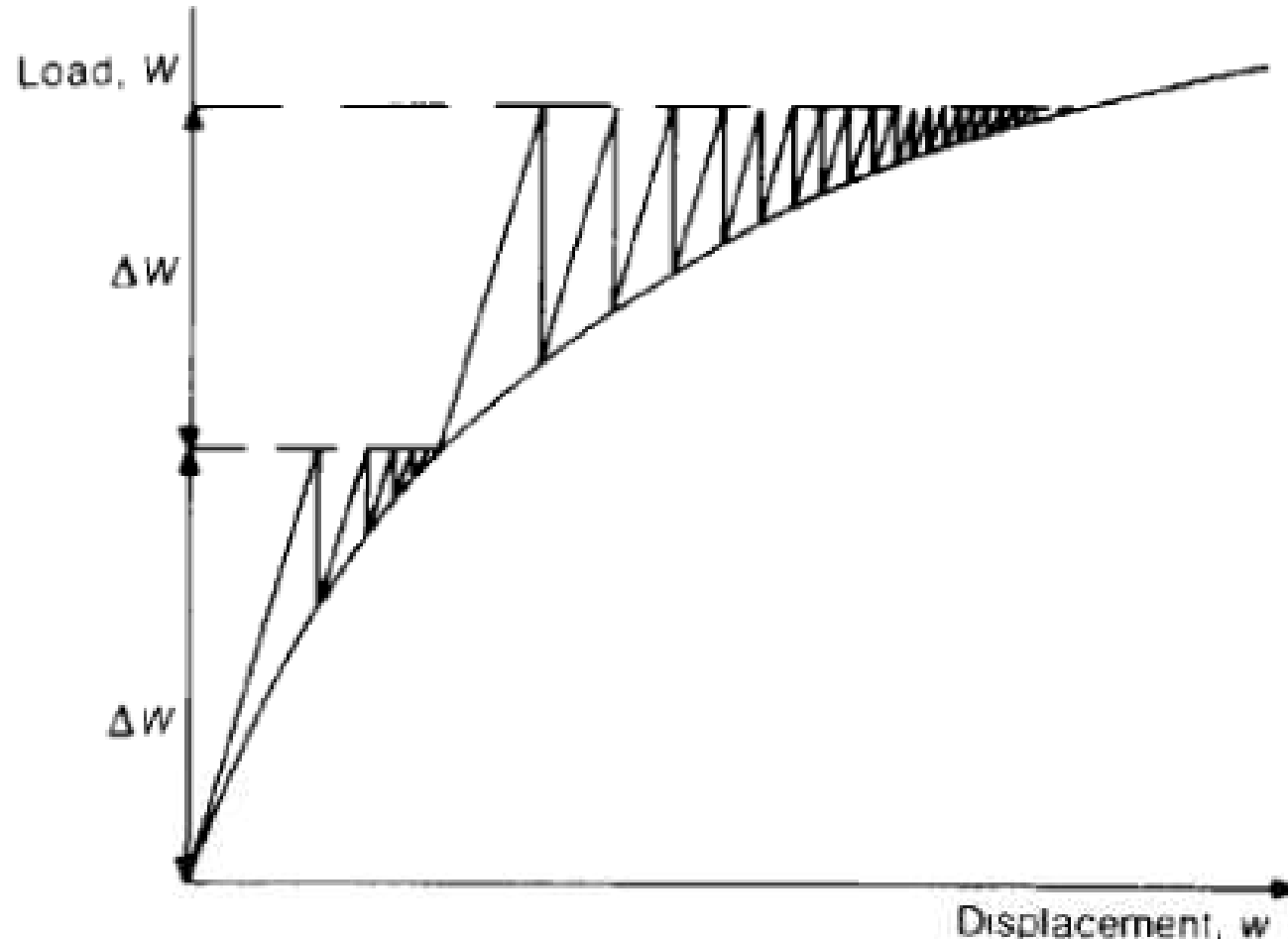


Figure 1.9 The 'initial stress method' combined with an incremental solution.

NB: errore numerico tra il percorso calcolato e quello reale

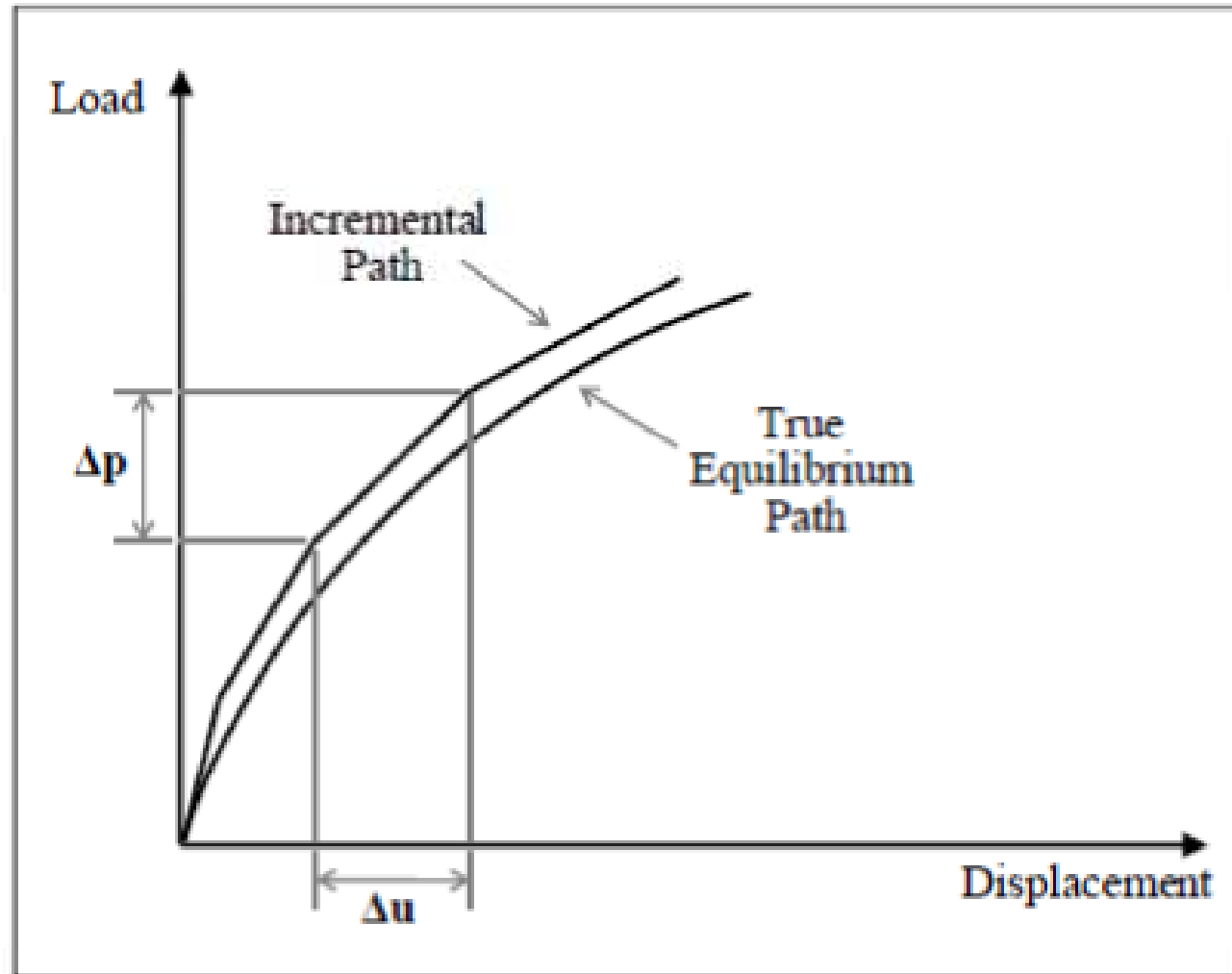


Figure 1.3: Purely incremental procedure

Tipologie di controllo della risposta strutturale carico-spostamento

a) Controllo di carico :

Si procede incrementando il carico

Finora abbiamo adottato questa procedura di incremento di carico

b) Controllo di spostamento :

Si procede incrementando lo spostamento

quando non e' possibile incrementare il carico

Controllo di carico

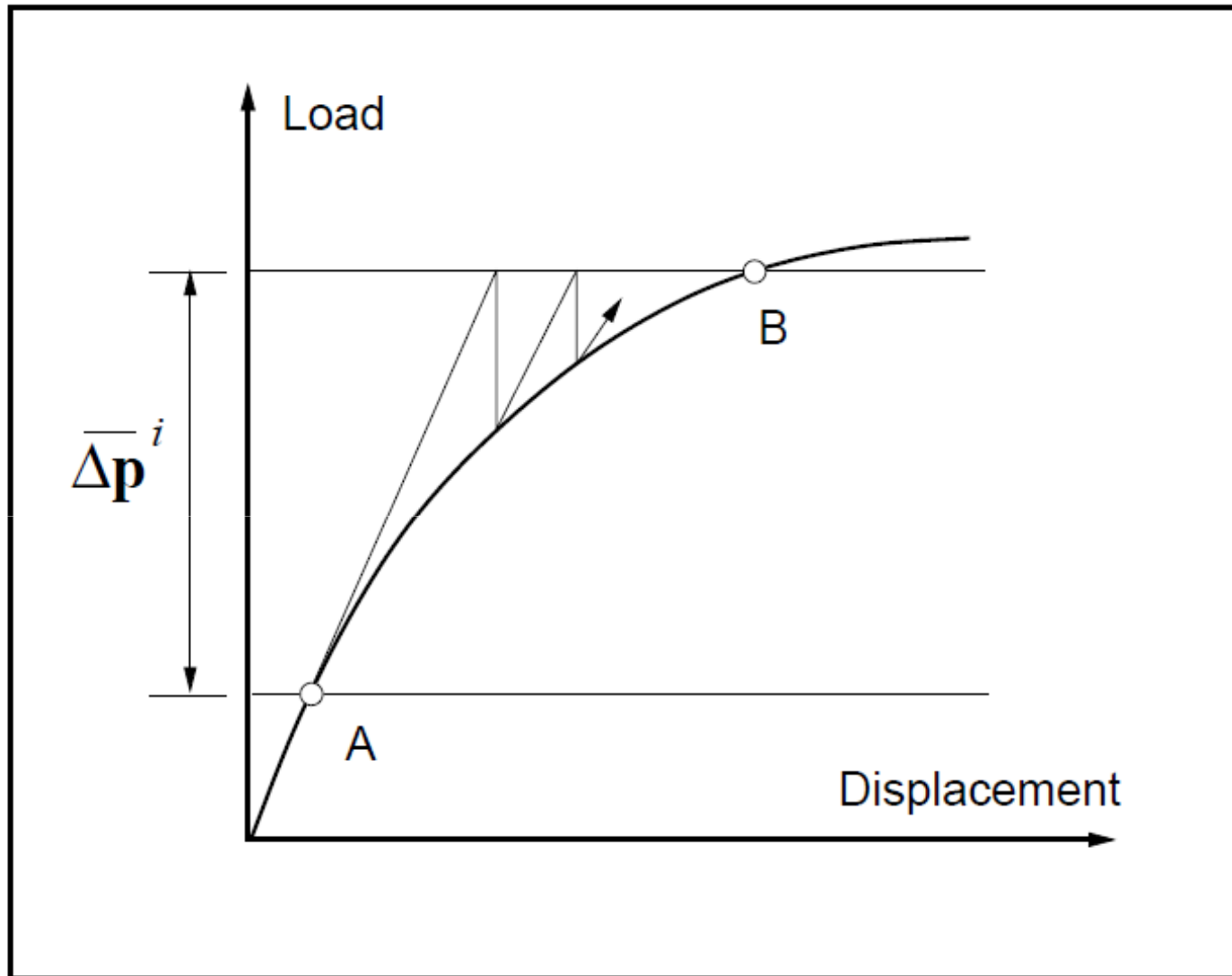
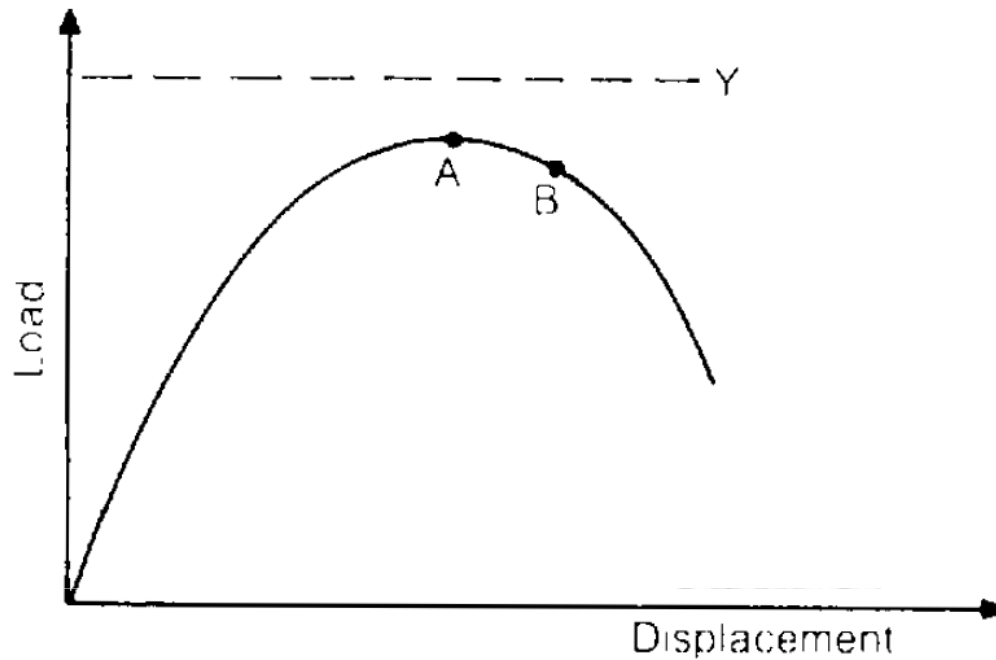


Figure 2.2: Load control method

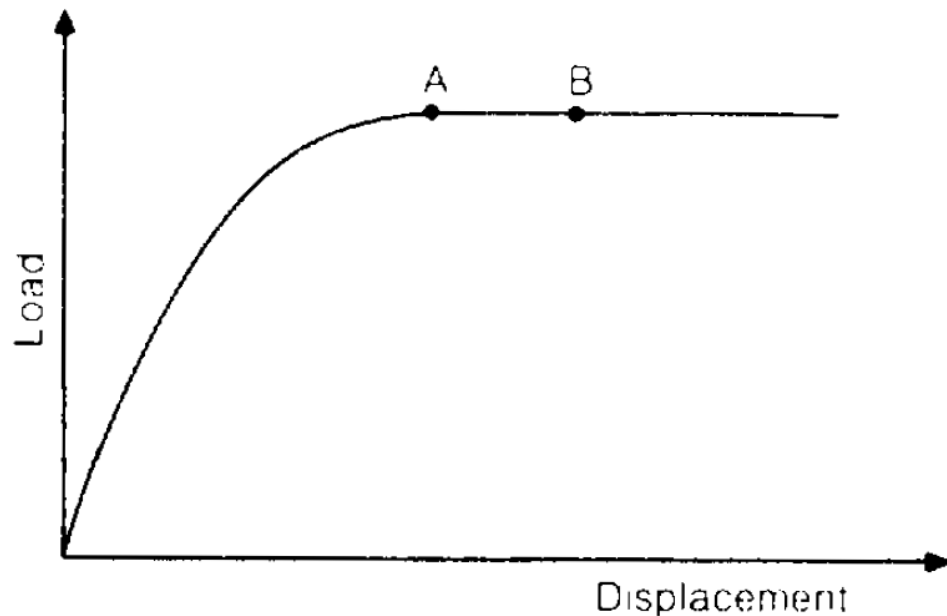
Controllo di spostamento



(c)

Si procede incrementando lo spostamento

→ Se si controllasse l'incremento di carico si perderebbe convergenza



(d)

Controllo di spostamento

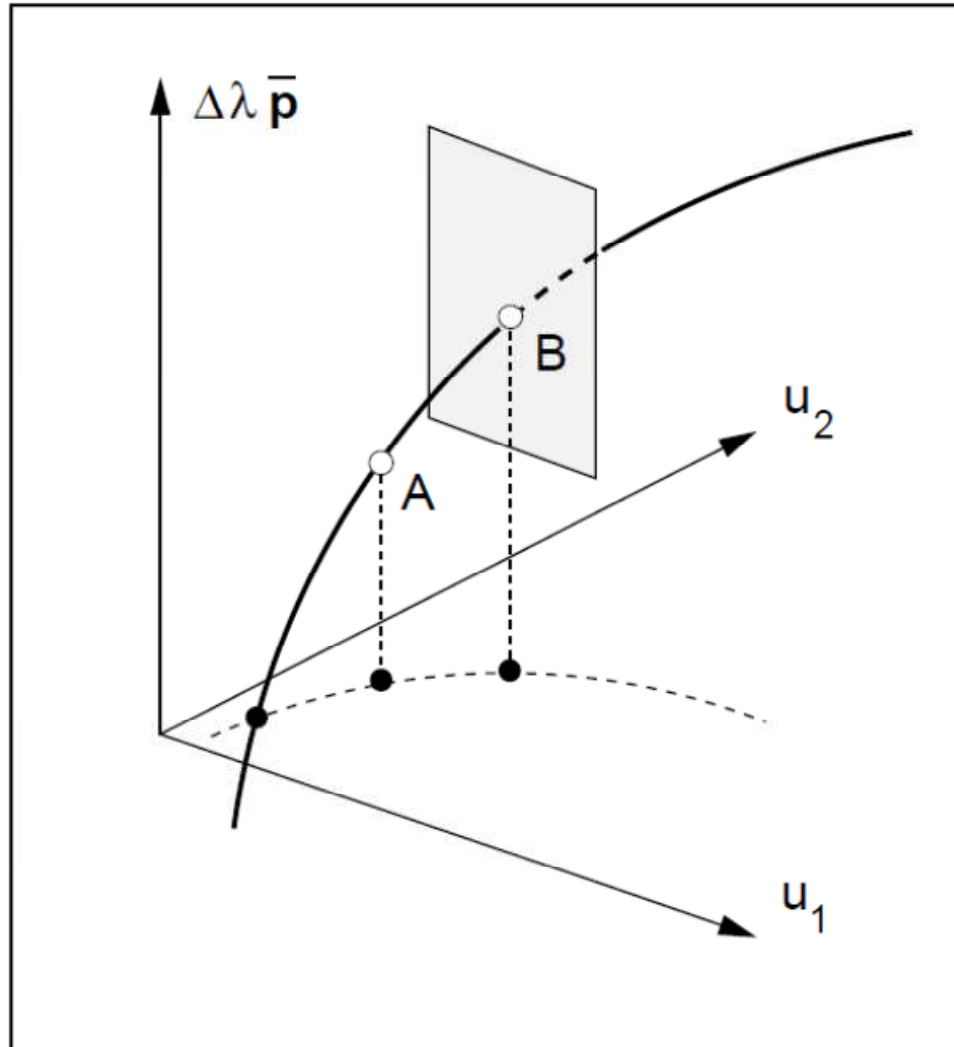


Figure 2.3: Displacement control method

Necessità di tecniche avanzate: presenza di snap back e snap through

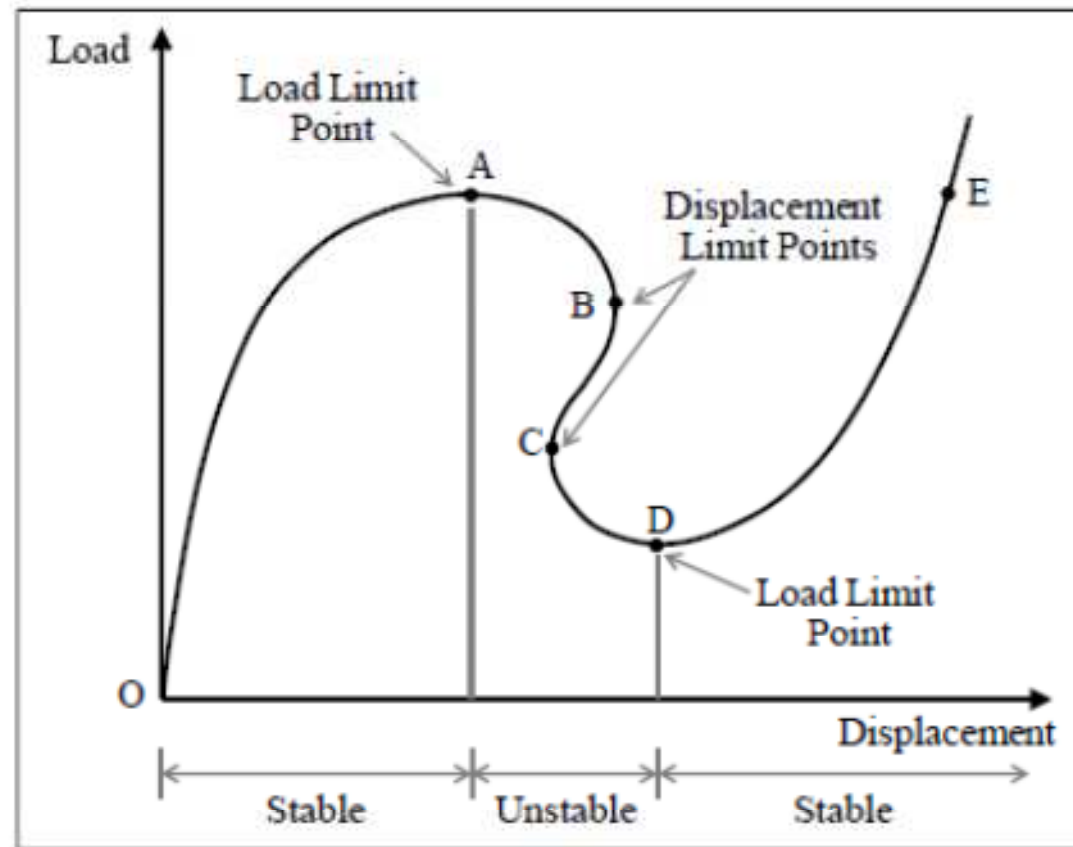
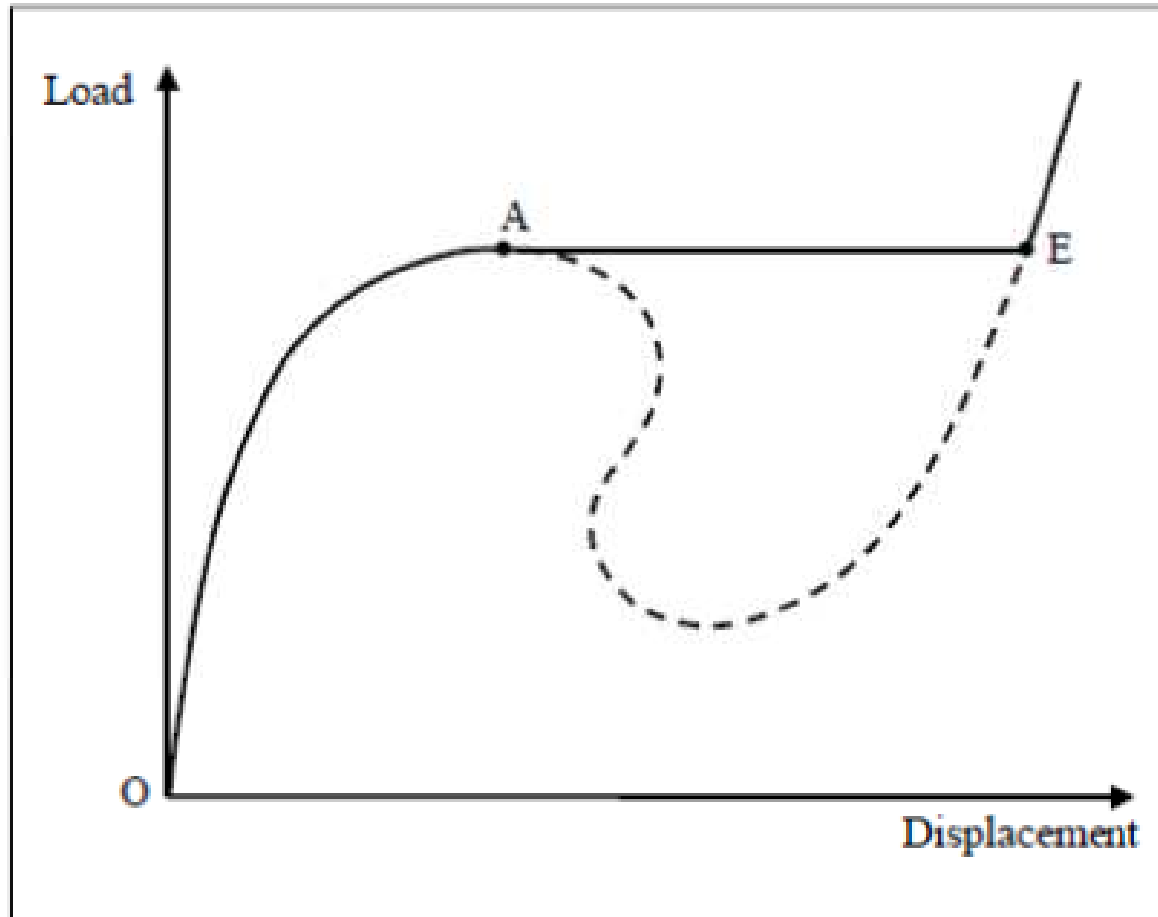


Figure 1.1: Limit points in nonlinear equilibrium paths

Controllo di spostamento e di carico falliscono:

→ Arc length

Necessità di tecniche avanzate: presenza di snap back e snap through



Controllo di spostamento e di carico falliscono:

Figure 1.2: Snap through behavior

→ Arc length

Necessita' di tecniche avanzate: presenza di snap back e snap through

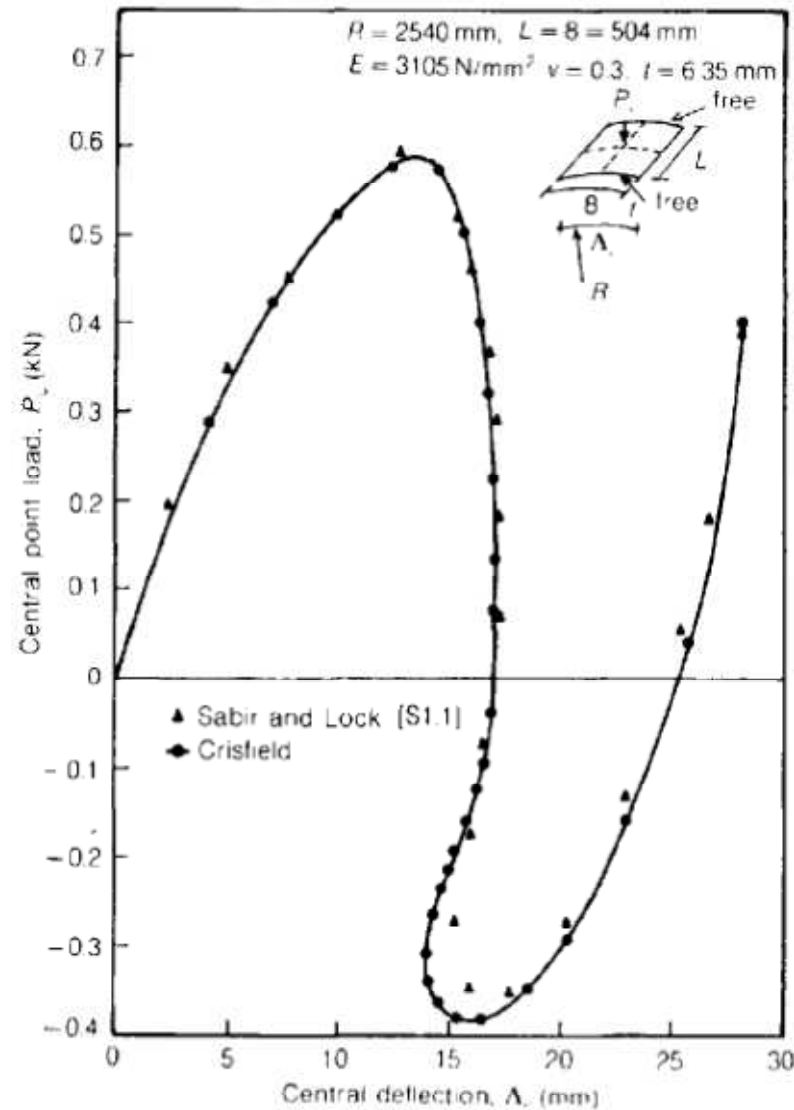


Figure 9.7 Computed responses for thin simply supported shell.

Necessita' di tecniche avanzate: presenza di snap back e snap through

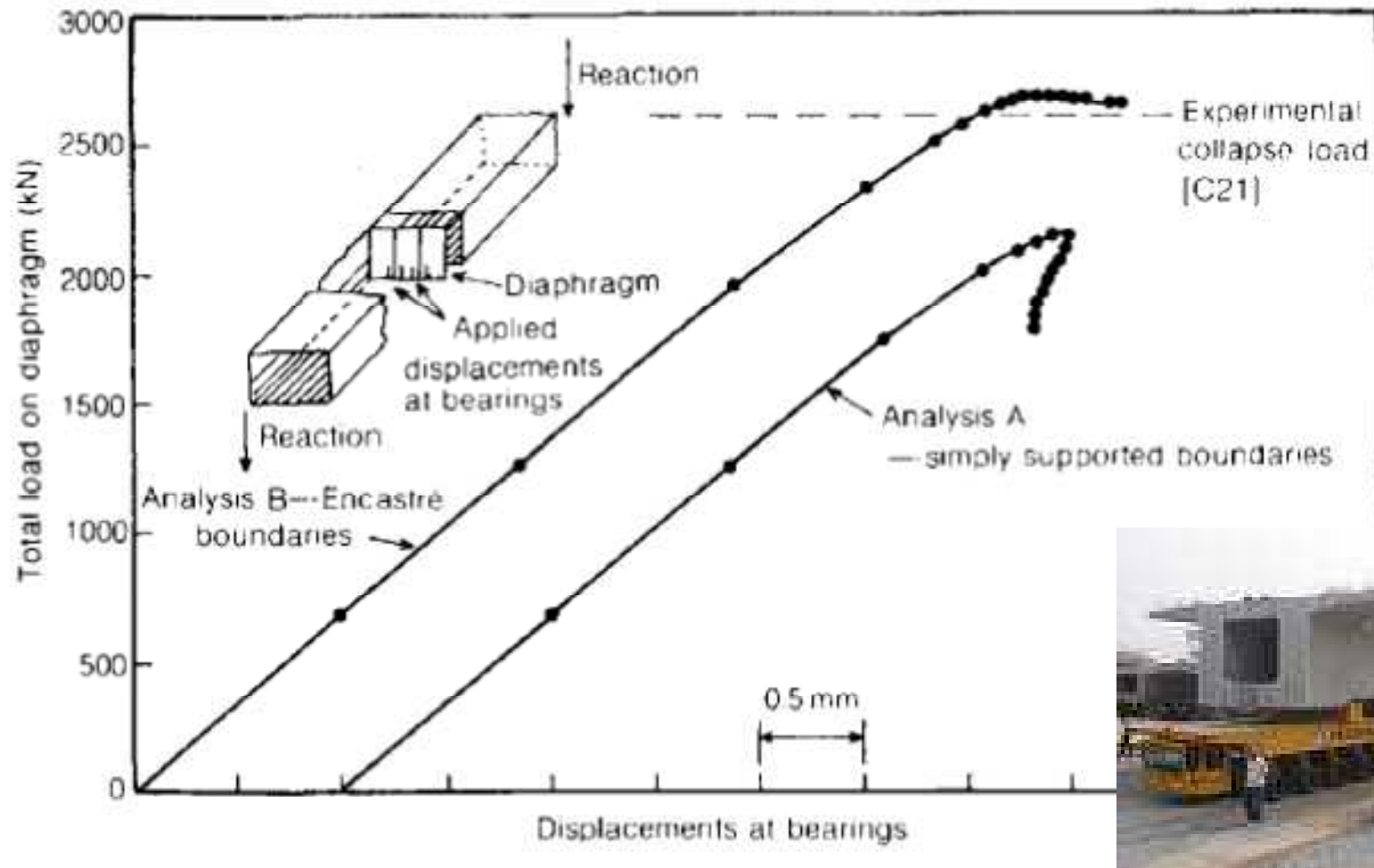


Figure 9.8 Idealisation and computed responses for steel box-girder diaphragm (with experimental collapse load).

Necessita' di tecniche avanzate: presenza di snap back e snap through

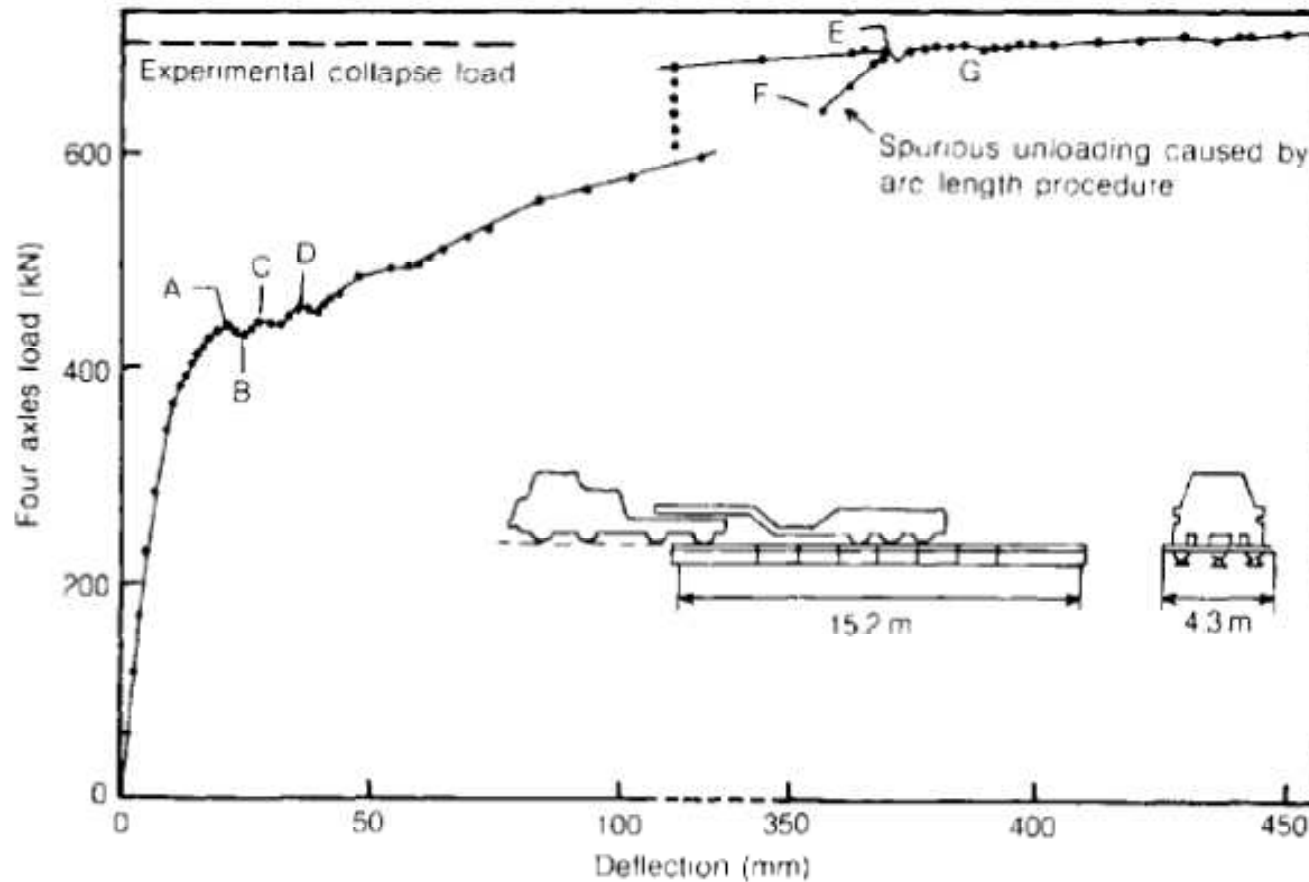


Figure 9.9 Computed response for prestressed concrete bridge (with experimental collapse load).

METODO ARC-LENGTH

Si consideri l'equazione di equilibrio seguente

$$g(p, \lambda) = q_i(p) - \lambda q_{ef} = 0$$

dove:

$q_i(p)$: forze interne funzioni del vettore spostamenti p

q_{ef} : vettore delle forze nodali esterne fissate

λ : parametro di carico che moltiplica q_{ef}

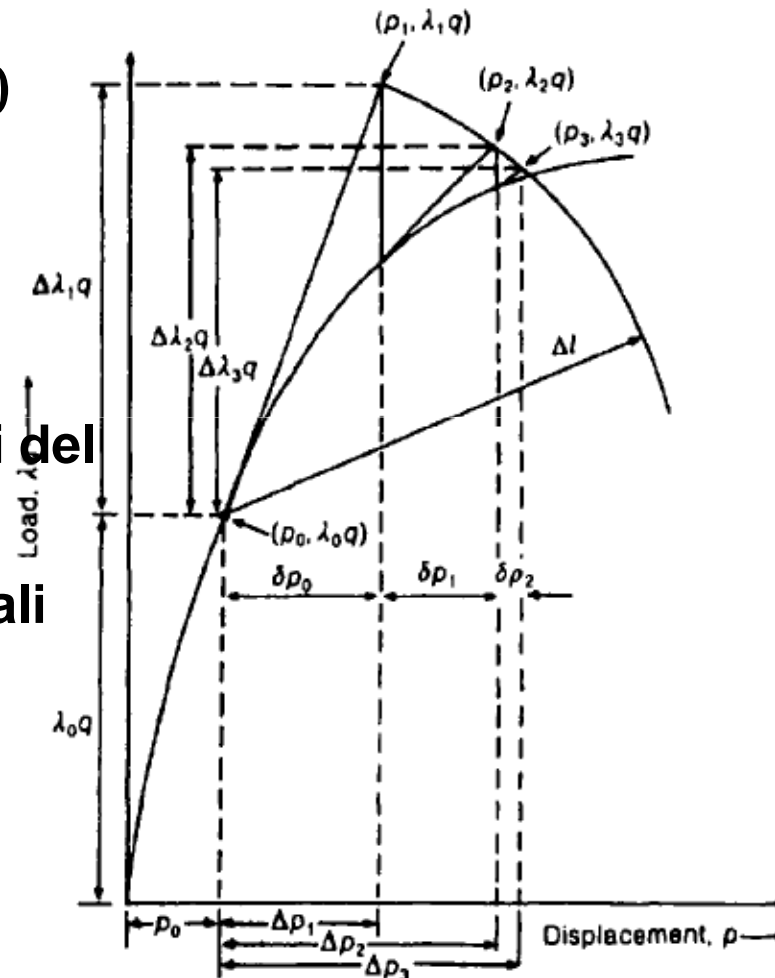


Figure 9.10 Spherical arc-length procedure and notation for one degree of freedom system ($\psi = 1$).

METODO ARC-LENGTH

Si consideri l'equazione di equilibrio

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}, \lambda) = \mathbf{q}_i - \lambda \mathbf{q}_{ef} = 0$$

Il metodo arc-length (Riks 1972- Wempner 1971) si basa sulla ricerca dell'intersezione tra la curva del percorso strutturale e l'arco di circonferenza centrato nel punto iniziale del passo di equazione

$$s = \int ds$$

$$ds = \sqrt{d\mathbf{p}^t d\mathbf{p} + d\lambda^2 \psi^2 \mathbf{q}_{ef}^t \mathbf{q}_{ef}}$$

Dove ψ e' un parametro dimensionale necessario per poter calcolare ds

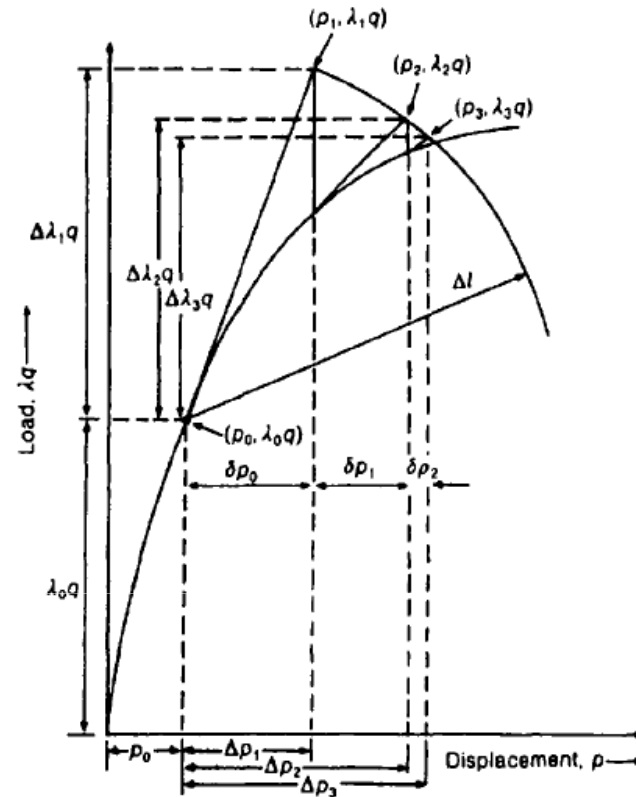


Figure 9.10 Spherical arc-length procedure and notation for one degree of freedom system (with $\psi = 1$).

METODO ARC-LENGTH

Dato l'arco di raggio costante Δl , si studia la curva di equazione

$$\mathbf{a} = \Delta \mathbf{p}^T \Delta \mathbf{p} + \Delta \lambda^2 \psi^2 \mathbf{q}_{\text{ef}}^T \mathbf{q}_{\text{ef}} - \Delta l^2 = 0$$

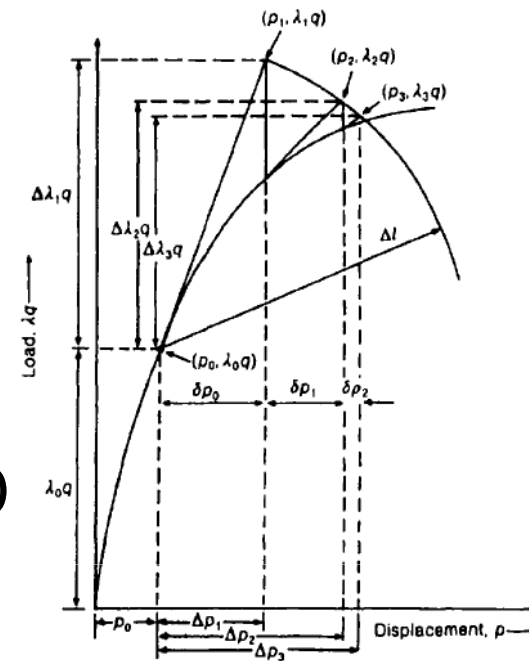


Figure 9.10 Spherical arc-length procedure and notation for one degree of freedom system (with ψ).

Si tratta di un'equazione non lineare, pertanto la si risolve con il metodo di N-R facendo sistema con l'equazione di equilibrio

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_0 + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} \delta \lambda = \mathbf{g}_0 + \mathbf{K}_1 \delta \mathbf{p} - \mathbf{q}_{\text{ef}} \delta \lambda = 0$$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_0 + 2\Delta \mathbf{p}^t \delta \mathbf{p} + 2\Delta \lambda \delta \lambda \psi^2 \mathbf{q}_{\text{ef}}^t \mathbf{q}_{\text{ef}} = 0$$

METODO ARC-LENGTH

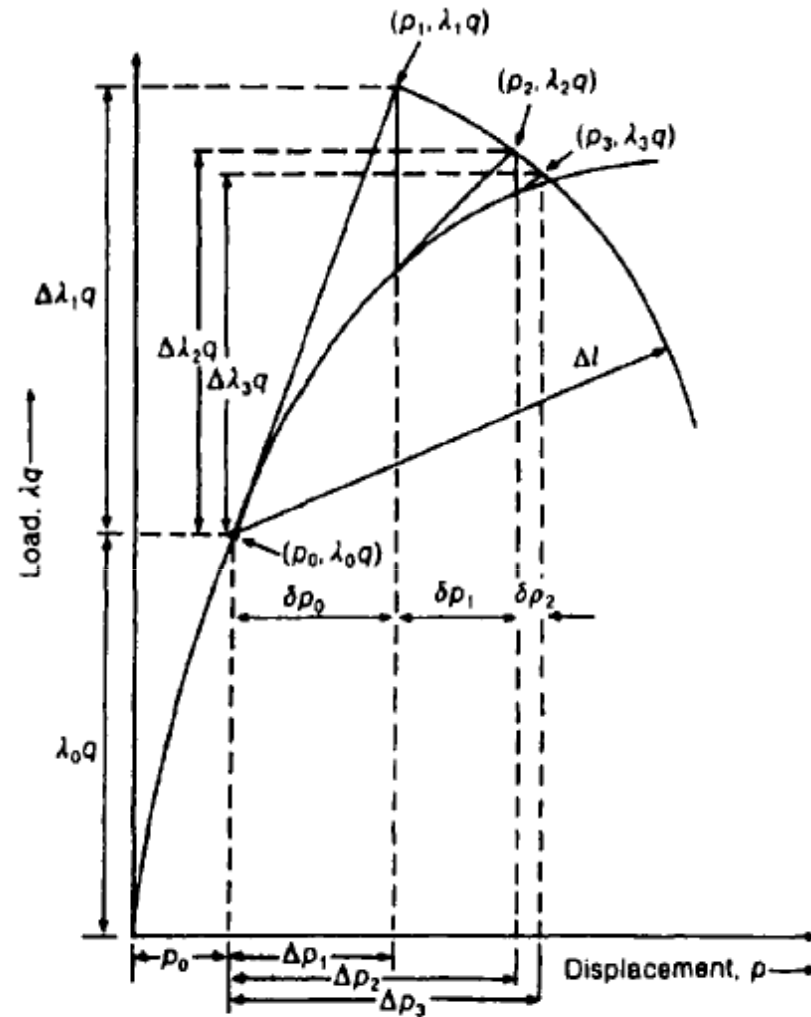


Figure 9.10 Spherical arc-length procedure and notation for one degree of freedom system (with $\psi = 1$).

ARC-LENGTH sferico

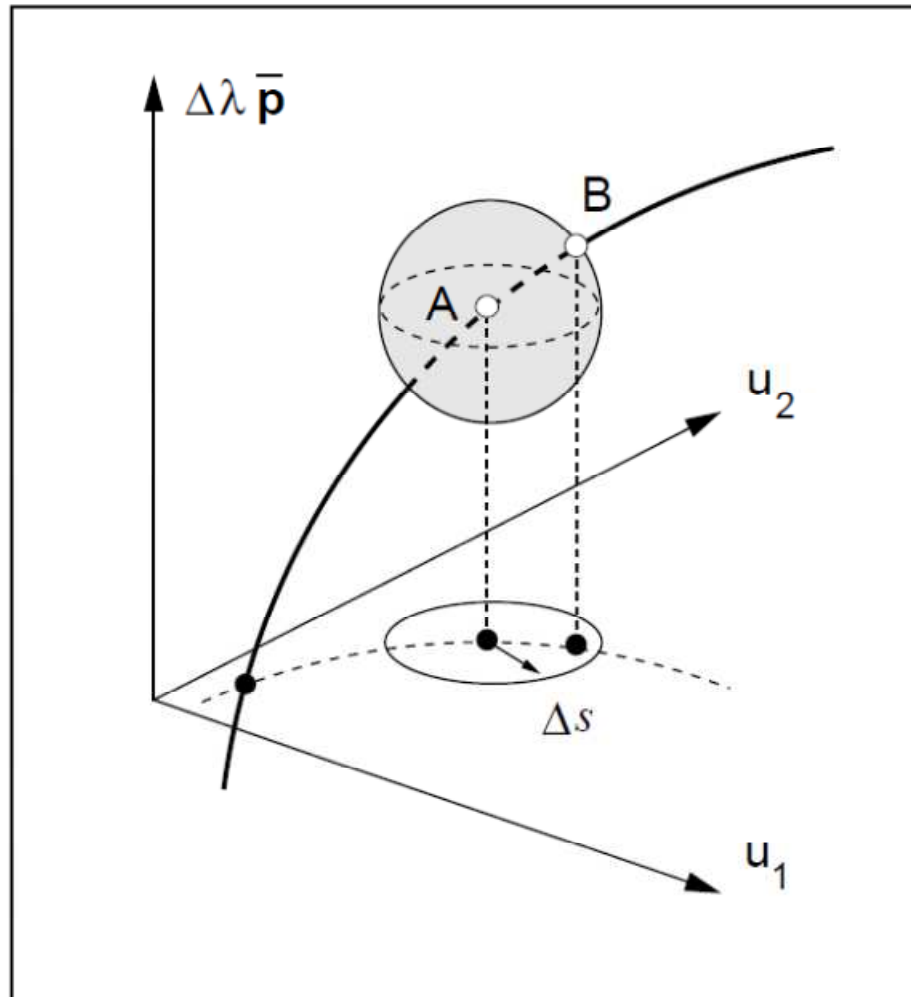


Figure 2.5: Spherical arc-length method

ARC-LENGTH cilindrico

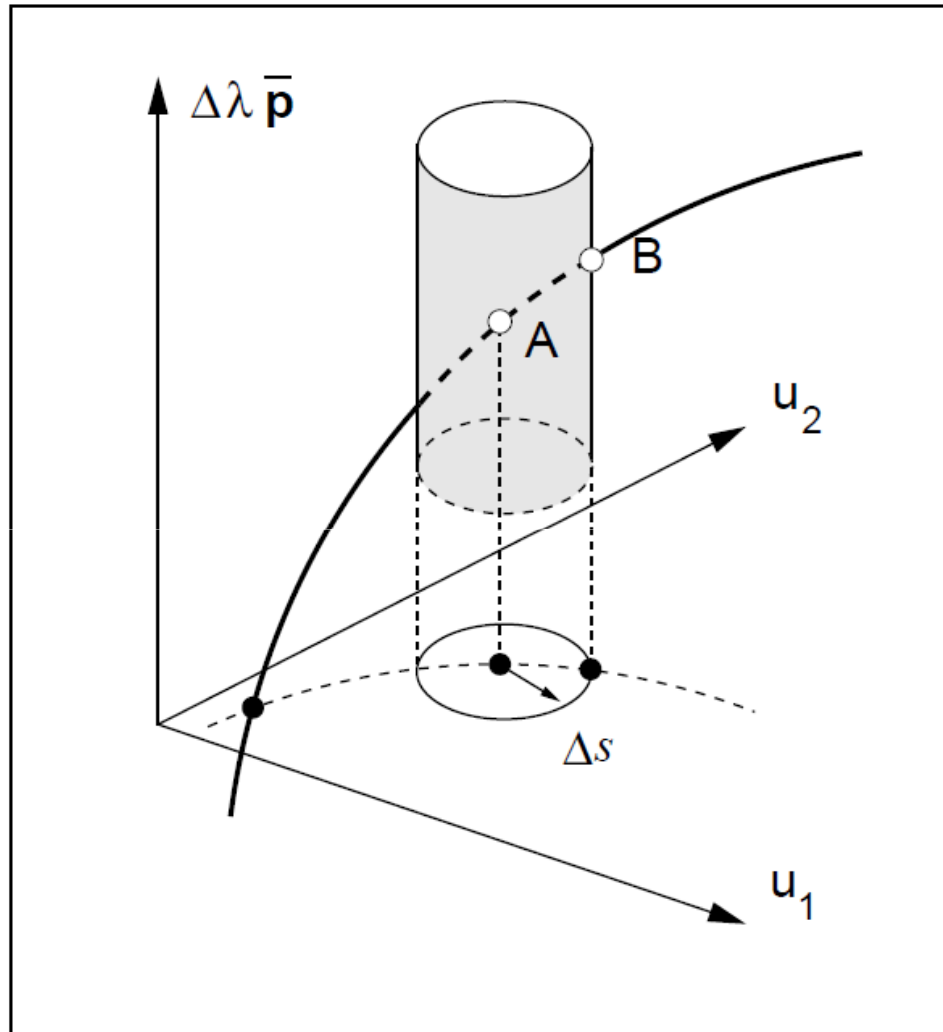


Figure 2.6: Cylindrical arc-length method

ARC-LENGTH ellittico

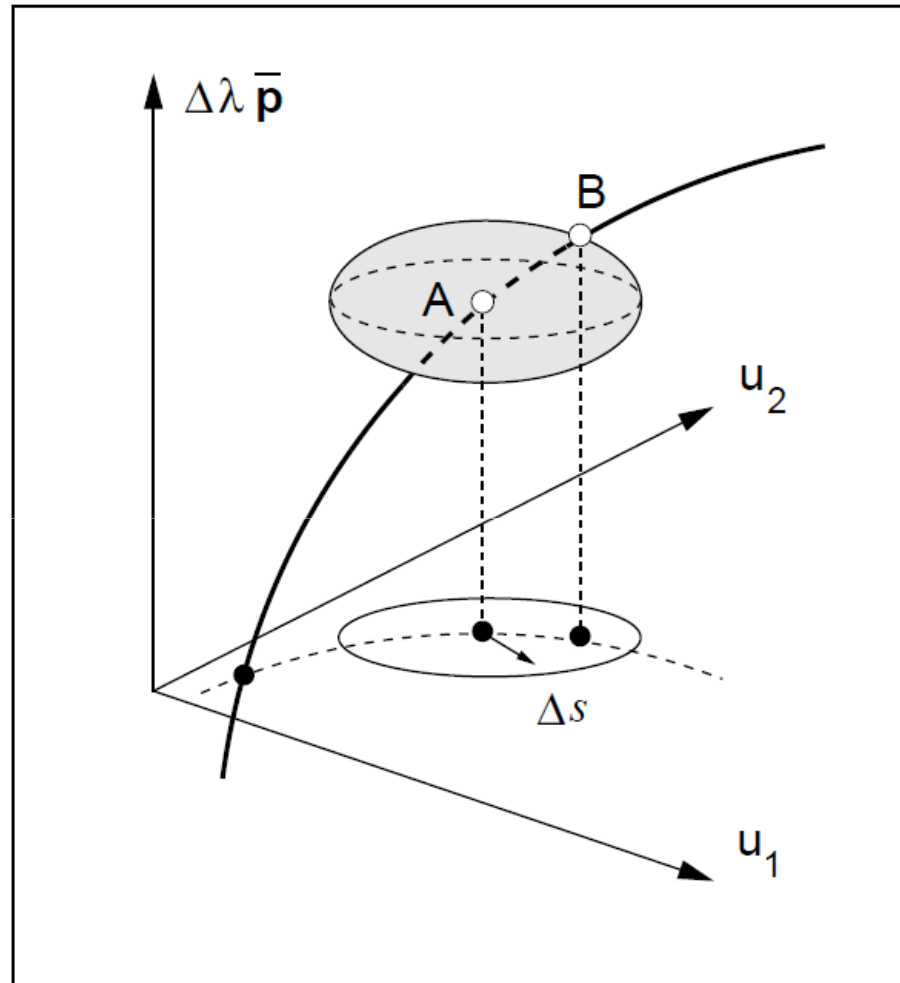


Figure 2.7: Elliptical arc-length method

ARC-LENGTH linearizzato

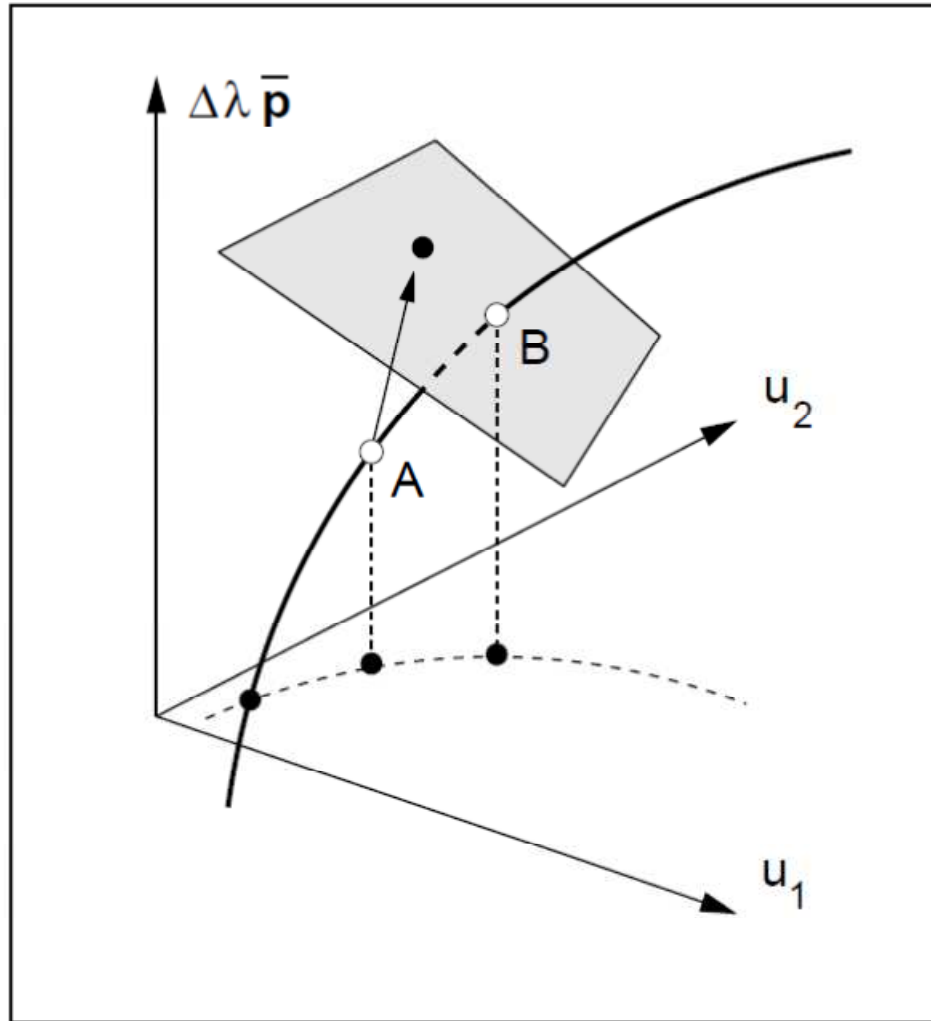


Figure 2.8: Linearized arc-length method

Tecniche per aumentare la velocità di convergenza

$$\Delta\hat{\lambda}_n = \Delta\hat{\lambda}_0 \left(\frac{I_d}{I_0} \right)^n$$

Valore di tentativo iniziale

where $\Delta\hat{\lambda}_0$ is the old increment factor for which I_0 iterations were required and I_d is the input, desired, number of iterations ($I_d \simeq 3$). The parameter n was set to unity.

ANALISI ITERATIVA-INCREMENTALE

1/ Si applica un incremento di carico/spostamento e si risolve il problema nel passo finito

2/ Anche il problema incrementale nel passo finito e' non lineare e pertanto viene risolto con una procedura non-lineare alla N-R

ANALISI ITERATIVA-INCREMENTALE

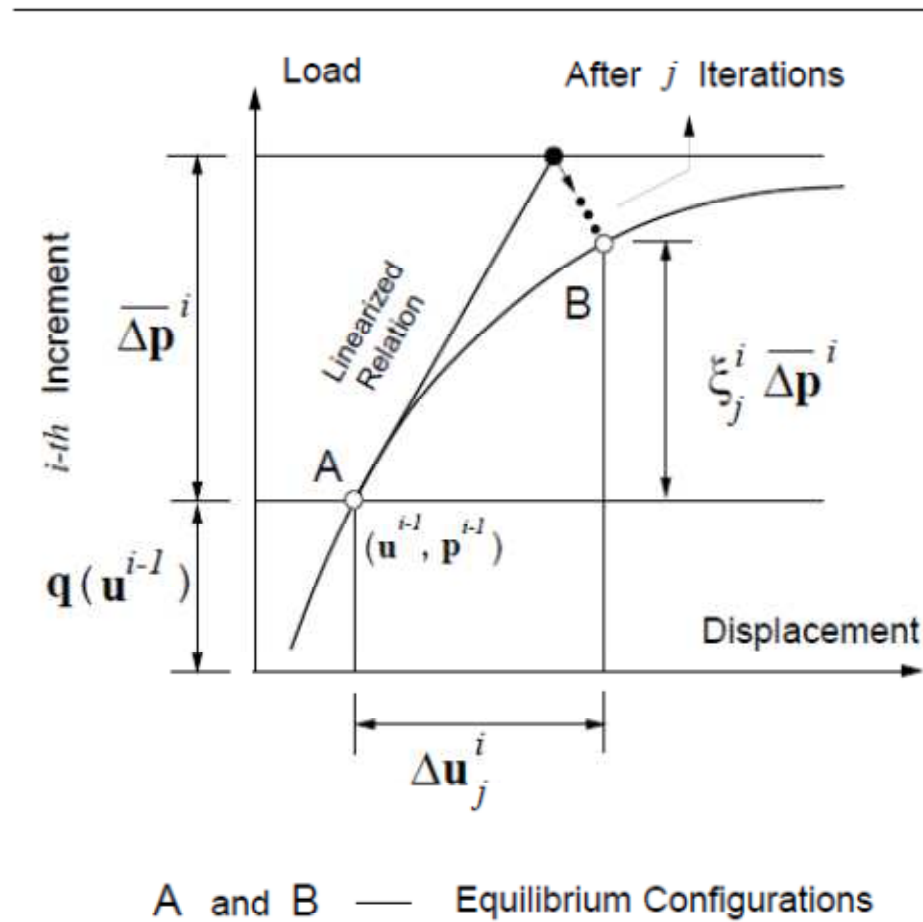


Figure 2.1: Incremental-iterative scheme for solving nonlinear problems

ANALISI ITERATIVA-INCREMENTALE: ciclo

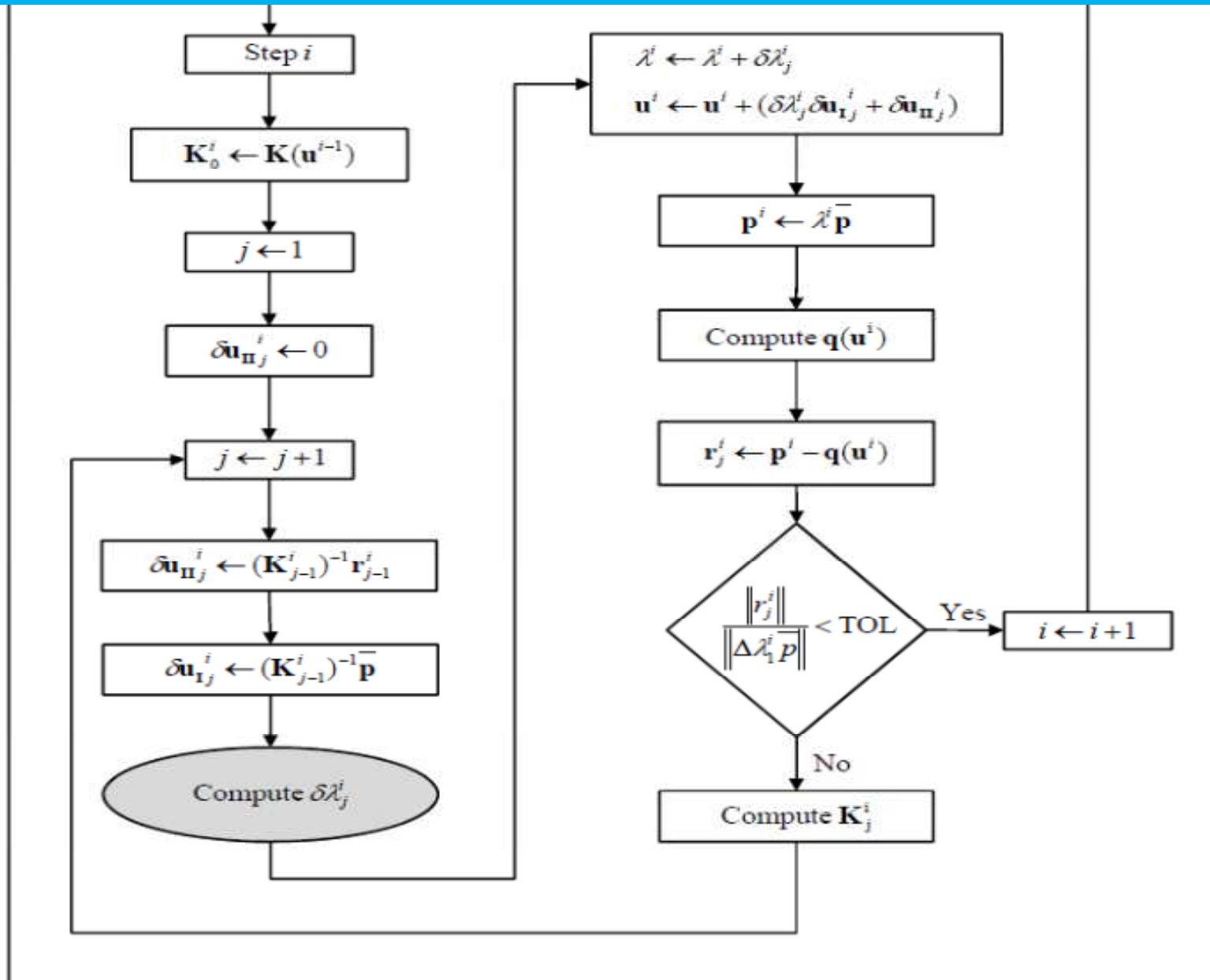
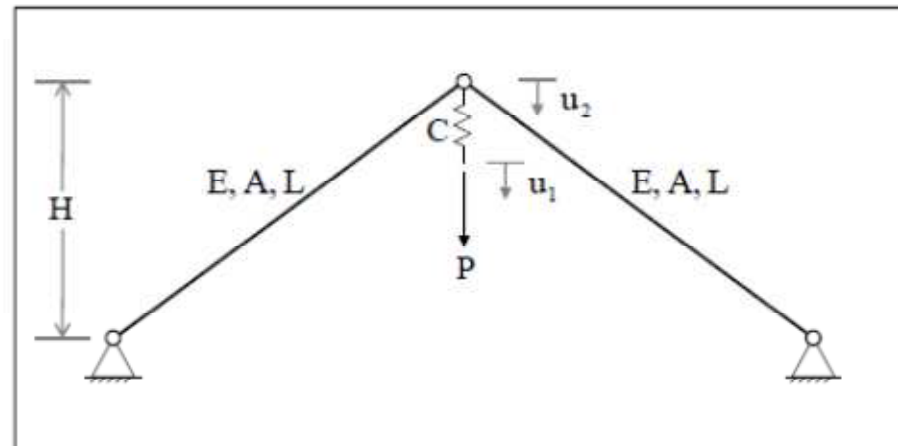


Figure 4.4: Incremental-iterative procedure of the unified scheme

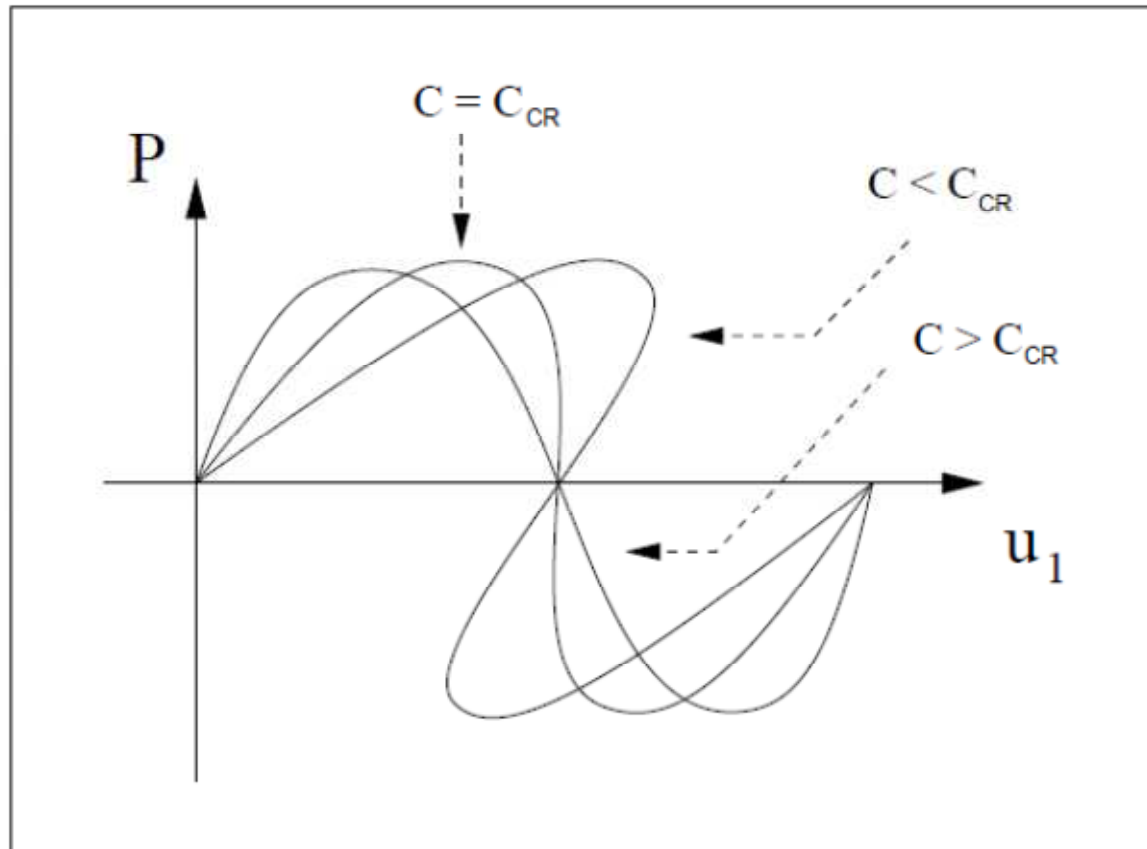
Esempio: von Mises truss

The Von Mises Truss is a two-degree of freedom system consisting of two bar (truss) elements loaded indirectly through a spring of stiffness C , as shown in Figure 5.12. It has been studied by several authors, including Bergan [15], Bazant and Cedolin [12], and Yang and Sheih [97], among others. Although very simple, this example can be used to demonstrate the ability of the nonlinear solution algorithms to capture both load and displacement limit points, as well as sudden changes of direction in the equilibrium paths.



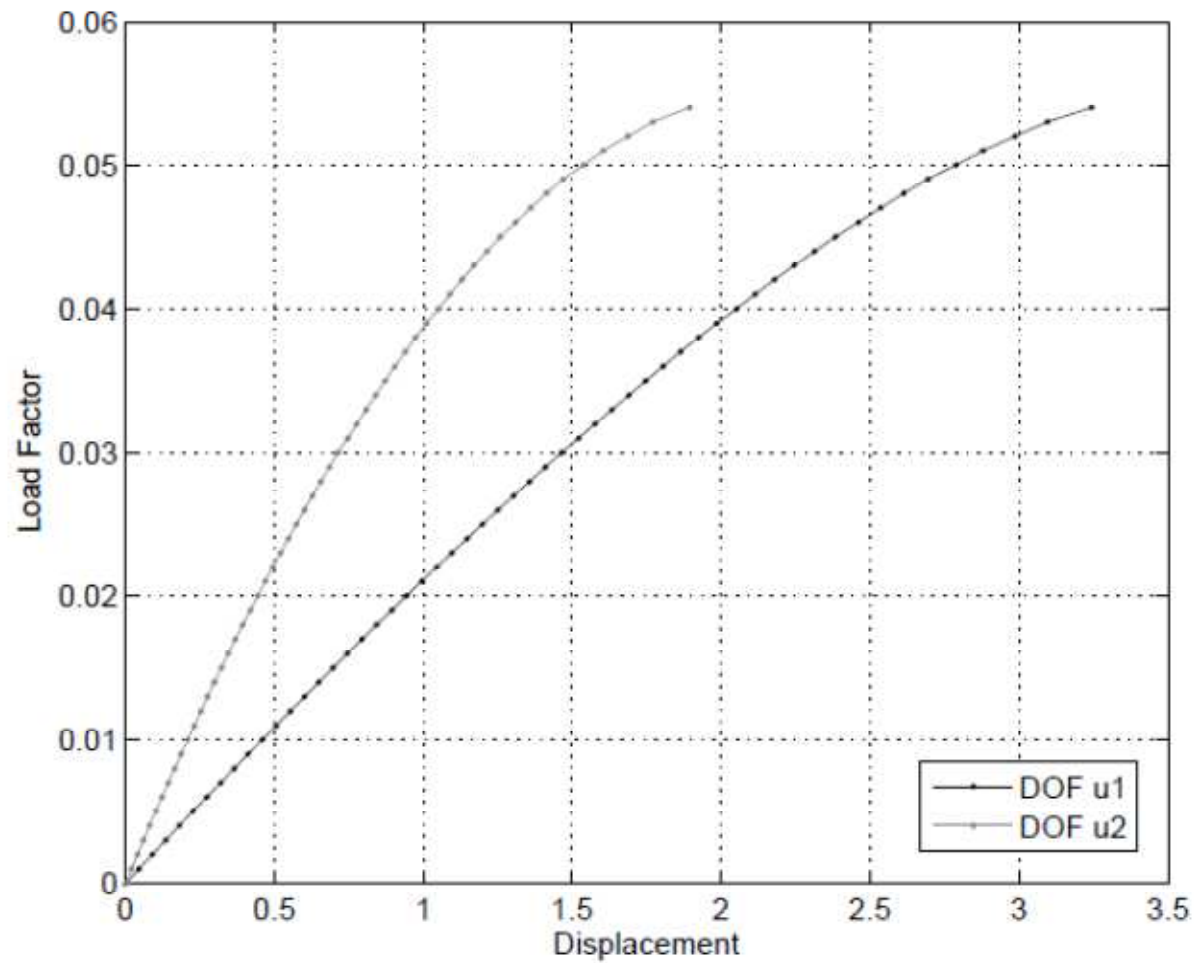
- Reference Load Vector: $\{1.0, 0.0\}^T$
- $EA = 1.0$
- $H = 5.0$
- $L = 10.0$

Esempio: von Mises truss



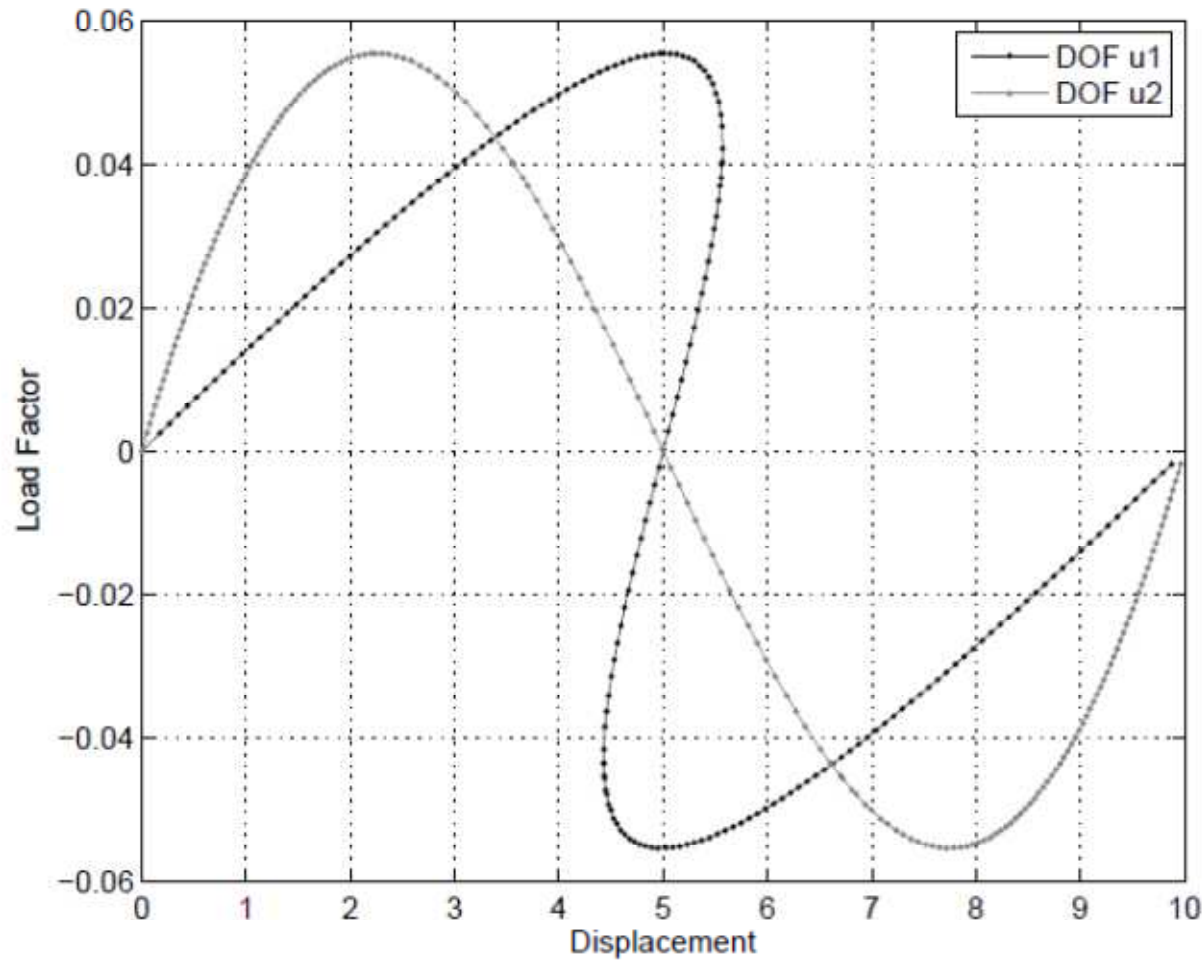
$$C_{cr} = 0.030940$$

Esempio: von Mises truss



Controllo di carico fallisce

Esempio: von Mises truss



arc length robusto ed efficiente

Esempio: von Mises truss

Table 5.4: Summary of the Von Mises truss example

Algorithm	C	Max. steps	Control factor	Scale factor	Converged/diverged
LCM	0.02	100	0.001	n/a	Diverged at step 56
DCM ^{s,1}	0.02	100	0.1	n/a	Snaps through
DCM ^{s,2}	0.02	100	0.1	n/a	Fully converged
DCM ^{v,1}	0.02	100	0.3	n/a	Fully converged
DCM ^{v,2}	0.02	80	0.1	n/a	Fully converged
ALCM	0.02	100	0.17	n/a	Fully converged
WCM	0.02	100	0.0002	n/a	Diverged at step 41
WCM	0.04	50	0.0001	n/a	Fully converged
GDCM	0.02	100	0.0025	n/a	Fully converged
ORP	0.02	65	0.005	1	Fully converged
ORP	0.04	190	0.0025	0.5	Fully converged

^s Standard

^v Variable

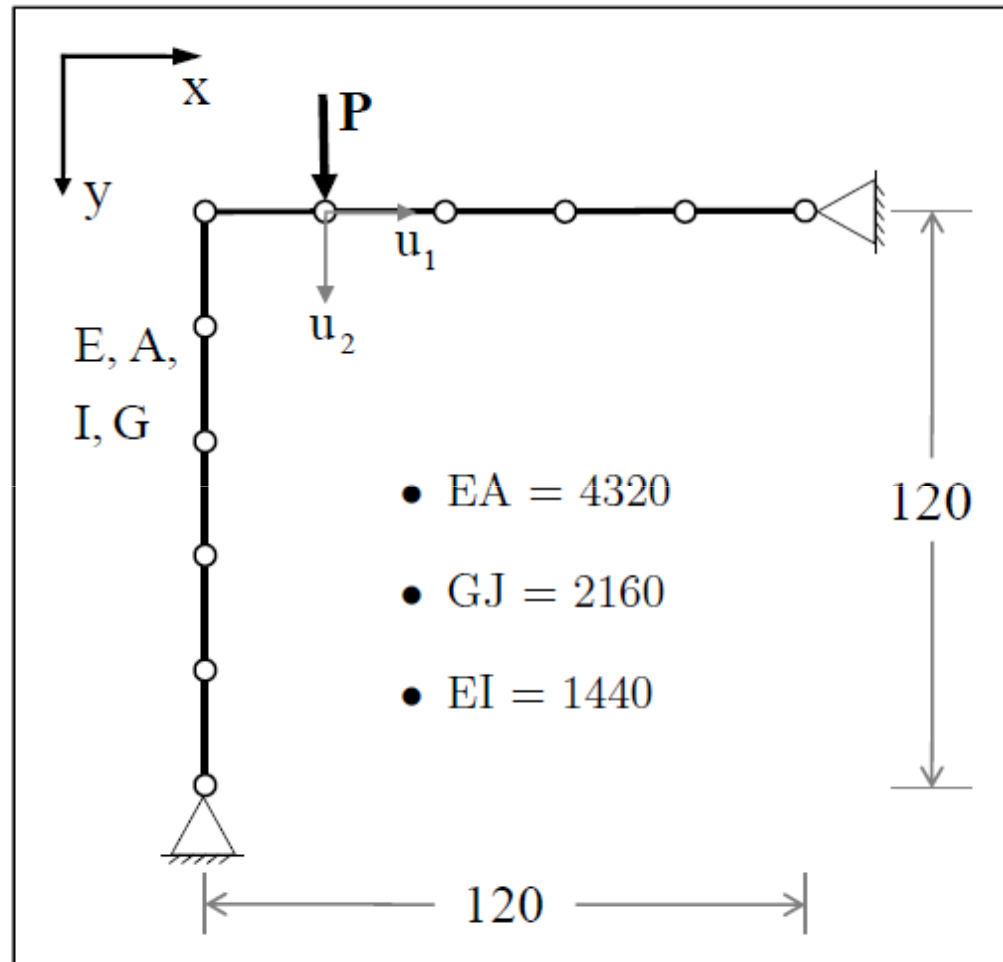
¹ Fixed control coordinate: \mathbf{u}_1

² Fixed control coordinate: \mathbf{u}_2

Table 4.2: Nonlinear solution scheme inputs

Algorithm type	Initial control factor
Load control method	Load increment, $\overline{\Delta\lambda}^i$
Displacement control method	Displacement increment, $\overline{\Delta u}^i$
Arc-length control method	Arc-length increment, $\overline{\Delta S}^i$
Work control method	Work increment, $\overline{\Delta W}^i$
Generalized displacement control method	Load parameter, $\delta\lambda_1^1$
Orthogonal residual procedure	Iterative load increment, $\delta\lambda$

Esempio: Lee frame



Esempio: Lee frame

Table 5.7: Summary of the Lee frame example

Algorithm	Max. steps	Control factor	Scale factor	Converged/diverged
LCM	100	0.05	n/a	Diverged at step 40
DCM ^{v,1}	100	0.1	n/a	Fully converged
ALCM	80	5	n/a	Fully converged
WCM	300	0.004	n/a	Diverged at step 180
GDCM	80	0.3	n/a	Fully converged
ORP	23000	0.1	0.01	Diverged at step 9173
ORP	14000	0.1	0.02	Diverged at step 13676

^v Variable

¹Fixed control coordinate: u_1

La convergenza non è sempre garantita.....

Table 4.2: Nonlinear solution scheme inputs

Algorithm type	Initial control factor
Load control method	Load increment, $\Delta\lambda^i$
Displacement control method	Displacement increment, $\overline{\Delta u}^i$
Arc-length control method	Arc-length increment, $\overline{\Delta S}^i$
Work control method	Work increment, $\overline{\Delta W}^i$
Generalized displacement control method	Load parameter, $\delta\lambda_1^1$
Orthogonal residual procedure	Iterative load increment, $\overline{\delta\lambda}$