PIASTRE

- Buildings

Disney Concert Hall, Los Angeles

Saint Mary's Cathedral, San Francisco

- Transportation

ESEMPI DI PIASTRE SOTTILI PIANE E CURVE

- Consumer products

- Nature



Ficus elastica leaf

Red blood cells

Elementi di piastra

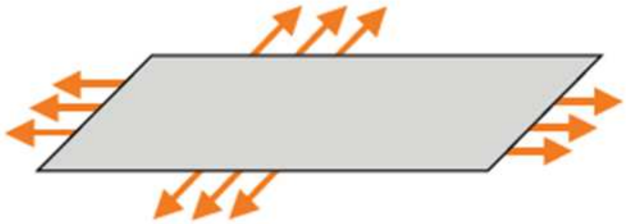
Discuteremo solo EF piastra (plate) volti a modellare solo il comportamento flessionale delle piastre.

Infatti la modellazione delle componenti di spostamento nel piano e delle corrispondenti deformazioni membranali non presenta differenze rispetto a quanto visto per EF 2d

Nel seguito si trascurano pertanto i gradi di libertà nel piano medio delle piastre

Elementi di piastra

Alla base di questa procedura vi è l'ipotesi di separazione del comportamento membranale, descritto in termini di deformazione nel piano della superficie media, da quello flessionale caratterizzato da una deformazione trasversale della piastra, la qual cosa risulta essere vera se la superficie di riferimento scelta per la direzione trasversale coincide con il piano neutro della piastra.
Questa scelta è semplice se l'elemento strutturale è omogeneo ed isotropo, (e.g.per i materiali compositi si abbandona l'ipotesi di disaccoppiamento).



Elementi di piastra

In queste condizioni il campo cinematico di flessione è disaccoppiato da quello membranale. Questa situazione rimane valida fintanto che le deformazioni sono infinitesime, o gli spostamenti piccoli rispetto alle dimensioni trasversali della piastra; in caso contrario il comportamento membranale potrebbe accoppiarsi con quello flessionale a causa degli effetti non lineari, per esempio l'allungamento del continuo;

questo provocherebbe dei sensibili cambiamenti della rigidezza dell'elemento richiedendo una procedura iterativa per la soluzione del problema.

Elementi di piastra

Gli elementi di piastra che verranno presentati si limitano alla trattazione dei termini di deformazione associati alla flessione; esattamente come nel caso della trave in cui si sono trattate separatamente le caratteristiche di rigidezza per carichi trasversali ed assiali.
È possibile realizzare un elemento che presenti la capacità di opporsi a carichi nel piano (membranali) ed a carichi trasversali (taglio, flessione e torsione): Elemento PLATE and SHELL

Elementi di piastra

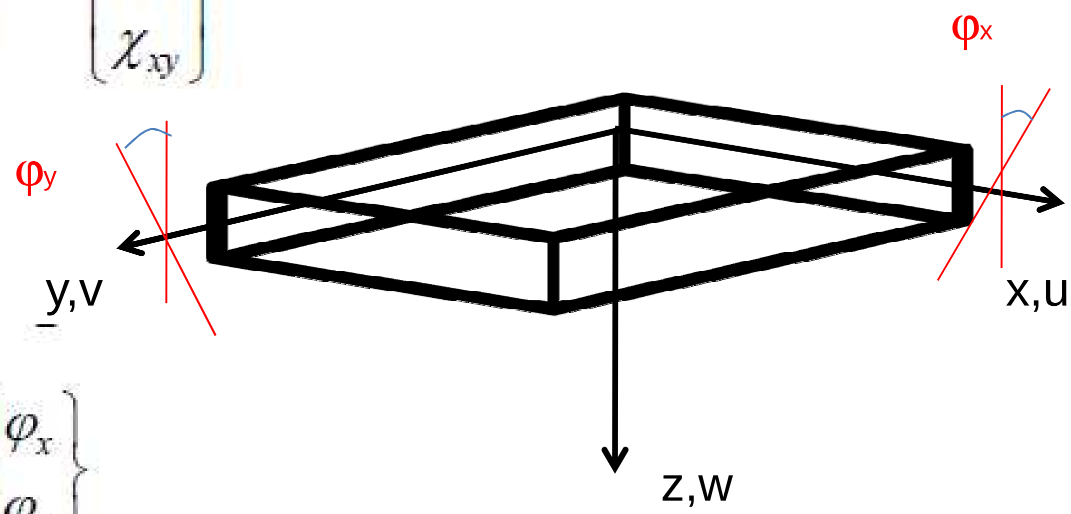
Analizziamo ora i due modelli di piastra più diffusi:

• Mindlin (1951)
adatto per lo studio di piastre spesse nelle quali risulta non trascurabile la deformazione per scorrimento nel piano verticale

•Kirchhoff (1850)
adatto per lo studio di piastre sottili nelle quali si può ritenere nulla la deformazione per scorrimento nel piano verticale

Modello di Mindlin

Deformazioni $$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \varphi_x \\ w_{,y} + \varphi_y \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bullet_{,x} & 0 \\ 0 & \bullet_{,y} \\ \bullet_{,y} & \bullet_{,x} \end{bmatrix}$$

Elementi di piastra di Mindlin

Consideriamo il legame costitutivo in termini di momenti generalizzati e deformazioni generalizzate ponenndo $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \upsilon D & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-\upsilon)D}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu G_{xz} h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu G_{yz} h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{x,x} \\ \varphi_{y,y} \\ \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} \\ \varphi_x + w_{,x} \\ \varphi_y + w_{,y} \end{Bmatrix}$$

Scritto in forma compatta

$$M = D_M k$$

Elementi di piastra di Mindlin

il lavoro di deformazione può essere riscritto in funzione delle componenti di deformazione generalizzata

$$\delta L_d = \int_V \delta\varepsilon^t \sigma \, dV = \int_A \int_\ell \delta\varepsilon^t \sigma \, dz dA =$$

$$\int_A \delta k^t M dA = \int_A \delta k^t D_M k dA$$

Elementi di piastra di Mindlin

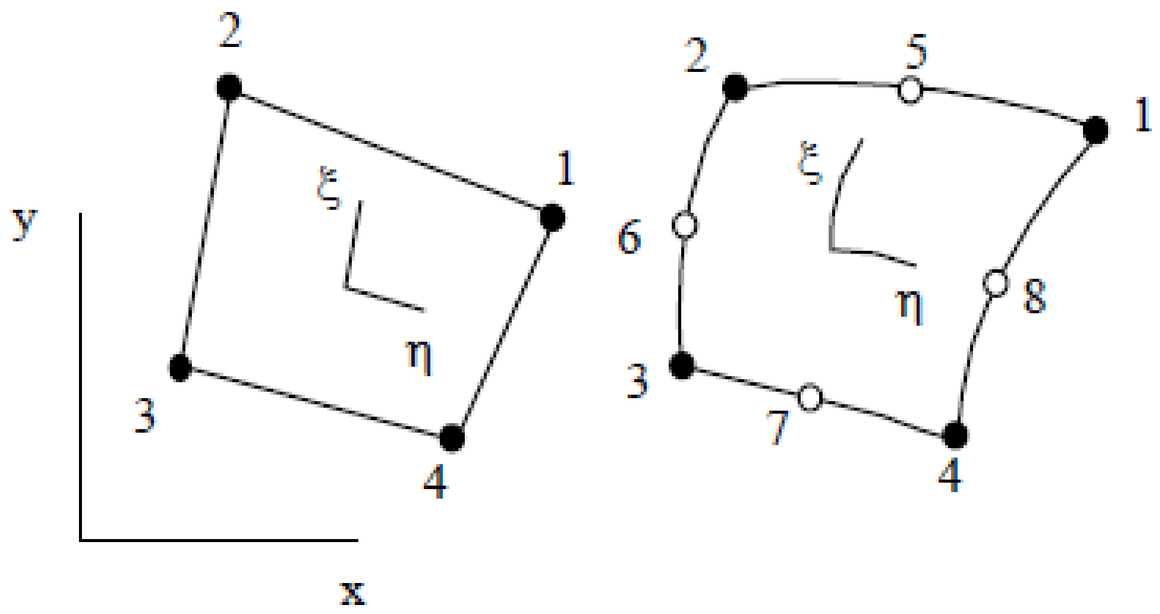
Elemento rettangolare

Il modello di Mindlin per la formulazione di un elemento di piastra spessa risulta essere di implementazione abbastanza semplice, in quanto, essendo le incognite nodali di spostamento w e rotazione φ_x, φ_y indipendenti tra loro, è possibile utilizzare funzioni di interpolazione caratterizzate da continuità di tipo C_0 ed utilizzare le stesse funzioni per tutti i gradi di libertà nodali.

$$w = \sum_{i=1}^{nnodi} N_i w_i \qquad \varphi_x = \sum_{i=1}^{nnodi} N_i \varphi_{xi} \qquad \varphi_y = \sum_{i=1}^{nnodi} N_i \varphi_{yi}$$

Elementi di piastra di Mindlin

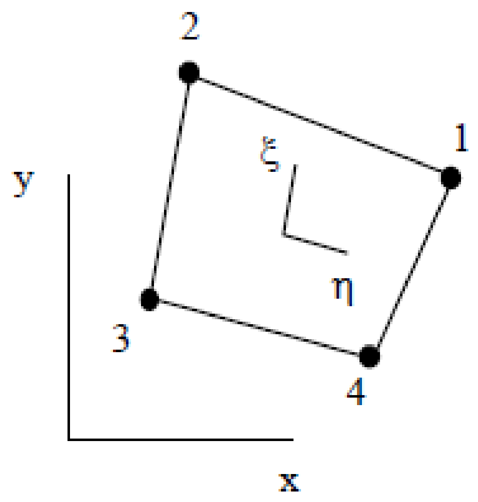
Data la sua struttura l'elemento di piastra di Mindlin è facilmente implementabile utilizzando lo schema isoparametrico che ci permette di trattare con lo stesso schema elementi rettangolari o genericamente quadrangolari, lineari o di ordine superiore.



Elementi di piastra di Mindlin

Assumiamo l'organizzazione degli spostamenti nodali definita dall'unione dei termini relativi a ciascun nodo

$$d = \{w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, w_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, w_3, \varphi_{x3}, \varphi_{y3}, w_4, \varphi_{x4}, \varphi_{y4}\}^t$$



Elementi di piastra di Mindlin

il vettore di spostamenti

$$u = \{w, \varphi_x, \varphi_y\}^t$$

in un generico punto della piastra viene definito dalla usuale forma di interpolazione isoparametrica delle grandezze relative agli N nodi dell'elemento

$$\underset{3x1}{u} = \underset{3x3n}{N}\,\underset{3nx1}{d}$$

dove sono state esplicitamente indicate le dimensioni degli operatori e nella quale la matrice [N] assume la forma

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & & N_N & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_N & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & & 0 & 0 & N_N \end{bmatrix}$$

Elementi di piastra di Mindlin

Definiamo ora il legame tra lo spostamento così espresso ed il vettore di deformazioni caratteristico del modello di piastra in termini di operatore differenziale lineare

$$k = \partial u$$

Dove le deformazioni generalizzate della piastra sono esprimibili come

$$k = \begin{Bmatrix} \varphi_{x,x} \\ \varphi_{y,y} \\ \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} \\ \varphi_x + w_{,x} \\ \varphi_y + w_{,y} \end{Bmatrix}$$

$$\partial = \begin{Bmatrix} 0 & (.)_{,x} & 0 \\ 0 & 0 & (.)_{,y} \\ 0 & (.)_{,y} & (.)_{,x} \\ (.)_{,x} & 1 & 0 \\ (.)_{,y} & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Elementi di piastra di Mindlin

La matrice di compatibilità generalizzata per le piastre di Mindlin diventa

$$B = \partial N$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & 0 & \dots & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,y} & \dots & 0 & 0 & N_{4,y} \\ 0 & N_{1,y} & N_{1,x} & \dots & 0 & N_{4,y} & N_{4,x} \\ N_{1,x} & N_{1} & 0 & \dots & N_{4,x} & N_{4} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & N_{1} & \dots & N_{4,y} & 0 & N_{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ w_1 & \varphi_{x1} & \varphi_{y1} & \dots\dots\dots & w_4 & \varphi_{x4} & \varphi_{y4} \end{array}$$

Matrice di rigidezza piastra di Mindlin

È ora possibile eseguire con le solite tecniche l'integrazione necessaria per determinare la matrice di rigidezza della piastra (si ricordi che l'integrazione lungo lo spessore è già stata effettuata a livello della definizione del legame curvature-momenti applicati ed è contenuta nella matrice [D_M])

matrice di rigidezza

$$K = \int_A B^T D_M B dA$$

Matrice di rigidezza della piastra di Mindlin

matrice di rigidezza $$K = \int_A B^T D_M B dA$$

Se la piastra è rettangolare l'integrazione sarà diretta, mentre se si tratta di un elemento distorto o a lati curvi, essendo le funzioni di forma espresse nel riferimento locale η,ξ, l'elemento di area assumerà l'espressione dA=J dη dξ e nell'espressione della matrice [B] occorrerà tenere conto, sempre mediante lo Jacobiano, della diversa metrica dei due riferimenti

Elementi di piastra di Mindlin

Dato che tengono conto della deformabilità a taglio, gli elementi di questo tipo sono convenientemente utilizzabili per la modellazione di piastre spesse.

Possono essere impiegati anche per l'analisi di piastre sottili tenendo presente che, normalmente, un elemento siffatto, se utilizzato in questa specifica applicazione, funziona meno bene di un elemento formulato secondo il modello di Kirchhoff.

Elementi di piastra di Mindlin

Ricordando che la matrice elastica della piastra D_M presenta un disaccoppiamento tra i termini di flessione D_F e quelli di taglio G

$$D_M = \begin{bmatrix} D_F & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$$

è possibile separare i contributi dovuti a questi termini e vedere la matrice di rigidezza dell'elemento come la somma di due matrici calcolate indipendentemente e relative appunto a queste modalità di deformazione.

Elementi di piastra di Mindlin

La matrice di compatibilità [B] può essere formalmente partizionata nei termini associati al comportamento flessionale e quelli legati alla deformazione nel piano verticale

$$B = \{B_F \quad B_T\}$$

Tenendo conto della stessa partizione della matrice elastica e della nullità delle matrice di accoppiamento di questi termini si ottiene

$$K = \int_A B_F{}^T D_F\, B_F dA + \int_A B_T{}^T G B_T\, dA = K_F + K_T$$

Elementi di piastra di Mindlin

La separazione dei due contributi ha lo scopo di evitare che l'utilizzo di formule per la corretta integrazione di uno dei due termini possa compromettere in qualche modo l'ottenimento di risultati altrettanto soddisfacenti per l'altro: l'utilizzo di troppi punti di integrazione può infatti introdurre un effetto di irrigidimento del modello (indicato nella letteratura anglosassone come "locking") dovuto all'eccessivo vincolo esercitato sui termini di deformazione normale da γ_{zx} e γ_{yz}. Questo fenomeno numerico si presenta quando gli elementi sono stirati e lo spessore molto piccolo, in rapporto alle dimensioni trasversali.

Elementi di piastra di Mindlin

Per esempio, supponiamo che w sia interpolato mediante funzioni di forma lineari e la rotazione ϕ_x sia approssimata mediante funzioni forma lineari

$$\gamma_{xz} = w_{,x} + \varphi_x = 0$$

Termine costante

Termine lineare

La somma di un termine lineare e di una costante non può fare zero per qualunque valore delle coordinate

Pertanto il vincolo γ_{xz}=0 risulta soddisfatto solo se saparatemente φ_x=0 e
$w_{,x}$=0, fatto che produce un irrigidimento del modello strutturale

Elementi di piastra di Mindlin

In questa situazione la condizione di scorrimento trasversale nullo tende a presentarsi naturalmente e questo comporta che i termini associati a tale fenomeno tendono a crescere per forzare numericamente questa condizione. Poiché questi termini sono accoppiati a quelli di deformazione trasversale, l'irrigidimento che ne consegue e' tale da bloccare anche questi gradi di libertà, con conseguente blocco anche della flessione dell'elemento.

Elementi di piastra di Mindlin

Un trucco per porre rimedio a questo problema e' ancora una volta costituito dal rilassamento dell'integrazione, in particolare da un rilassamento selettivo. Infatti l'unica possibilità e' di sottovalutare l'irrigidimento commettendo intenzionalmente un errore di integrazione che consenta di avere un elemento sufficientemente rigido da soddisfare il requisito di Kirchhoff ma non tanto da impedire la flessione.

Elementi di piastra di Mindlin

L'errore nel calcolo del lavoro dovuto al taglio trasversale può anche essere rilevante ma non può determinare il degrado della precisione del risultato in quanto trascurabile rispetto a quello di flessione: la piastra infatti è troppo sottile per essere correttamente modellata con Mindlin, quindi il contributo del taglio è trascurabile e stimarlo in maniera sbagliata non comporta problemi; l'unico requisito è quello di rimuovere il locking.

Elementi di piastra di Mindlin

Utilizzando la classica formula di Gauss-Legendre per effettuare l'integrazione, è possibile effettuare una integrazione rilassata o completa di entrambi i termini oppure impiegare ordini di integrazioni differenti per i due contributi, in particolare, riducendo di un ordine la formula utilizzata per il taglio.

A titolo di esempio si riportano i punti di integrazioni relativi all'elemento a 4 nodi:

Integrazione	Flessione	Taglio
Rilassata	1x1	1x1
Selettiva	2x2	1x1
Completa	2x2	2x2

Elementi di piastra di Mindlin

Abbiamo visto come nell'analisi di piastre moderatamente spesse (alla Reissner-Mindlin) gli scorrimenti angolari fuori dal piano medio non siano trascurabili ed anche le rotazioni di un generico segmento normale al piano medio figurano tra le incognite primarie del problema. Tutte le deformazioni generalizzate sono legate al più alle derivate prime delle incognite e la formulazione di EF completi e conformi è più agevole che non per piastre alla Kirchhoff

Elementi di piastra di Mindlin

Possono peraltro insorgere problemi di shear locking quando gli elementi alla R-M sono applicati all'analisi di piastre sottili, in analogia a quanto osservato per gli EF 1D beam alla Timoshenko

Elementi di piastra di Kirchhoff

Il legame deformazioni generalizzate – azioni interne diventa

$$\mathrm{M} = \mathrm{D_k k}$$

$$\mathrm{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} E & \upsilon E & 0 \\ \upsilon E & E & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2}E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix}$$

Elementi di piastra di Kirchhoff

Il vettore delle deformazioni generalizzate

$$k = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & (.)_{,x} & 0 \\ 0 & 0 & (.)_{,y} \\ 0 & (.)_{,y} & (.)_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix}$$

contiene solo derivate seconde dello spostamento trasversale w e non contiene w stesso

Elementi di piastra di Kirchhoff

Anche nel caso della piastra sottile si riscrive il lavoro di deformazione in funzione delle componenti di deformazione generalizzata

$$\delta L_d = \int_V \delta\varepsilon^t \sigma \, dV = \int_A \int_\ell \delta\varepsilon^t \sigma \, dz dA =$$

$$= \int_A \delta k^t M dA = \int_A \delta k^t D_K k dA$$

Elementi di piastra di Kirchhoff

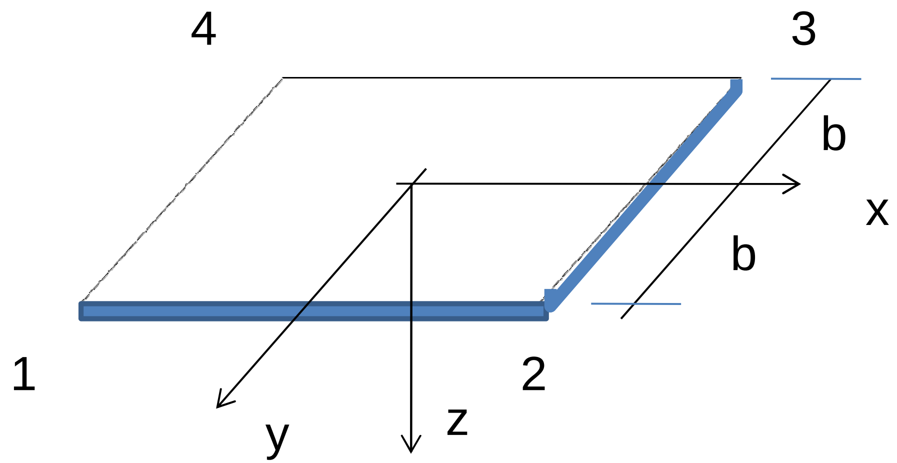
Vista la semplicità dello sviluppo dell'elemento di piastra per il modello di Mindlin, si potrebbe essere indotti a credere che lo sviluppo per quello di Kirchhoff dovrebbe risultare più agevole visto che il modello teorico su cui si basa è più semplice

Purtroppo non è affatto così

La formulazione di un efficiente ed efficace elemento finito di piastra di forma generica è piuttosto complessa e la vasta letteratura reperibile in merito è significativa dell'importanza e della difficoltà che caratterizzano l'argomento

Elementi di piastra di Kirchhoff

Cerchiamo di impostare un elemento di piastra lineare, piano, rettangolare e a spessore costante. L'utilità pratica di un simile elemento è limitata, in particolar modo per il vincolo di pianta rettangolare: come altre volte il suo utilizzo è volto ad uno sviluppo completo dell'elemento che evidenzi i problemi connessi alla sua generalizzazione.



Elementi di piastra di Kirchhoff

La matrice dell'elemento può essere fatta derivare, per esempio, dalla scrittura del lavoro virtuale di deformazione nel singolo elemento

$$\delta L_{de} = \int_A \delta k^t{}_e \, D_{ke} \, k_e \; dA_e =$$

$$= \delta k^t{}_e \int_A B^t{}_e \, D_{ke} \, B_e \; dA_e$$

Elemento ACM

Formulazione e.f con funzioni polinomiali Hermitiane: il quadrilatero di Adini, Clough (1960) e Melosh (1961)

Elemento ACM

Utilizziamo la procedura di Ritz *per la definizione delle funzioni di forma: avendo a* disposizione 12 condizioni al contorno, costituite dai valori nodali delle 3 componenti di spostamento generalizzato, potremo ricorrere ad un polinomio di 12 termini

Funzioni di forma per EF 4 nodi ACM.

Triangolo di Pascal

$$1$$

$$x \qquad y$$

$$x^2 \qquad xy \qquad y^2$$

$$x^3 \qquad x^2y \qquad xy^2 \qquad y^3$$

$$x^4 \qquad x^3y \qquad x^2y^2 \qquad xy^3 \qquad y^4$$

$$x^5 \qquad x^4y \qquad x^3y^2 \qquad x^2y^3 \qquad xy^4 \qquad y^5$$

Funzioni di forma per EF 4 nodi ACM

Il polinomio di 12 termini che resta scartando i termini x^4,x^2y^2 e y^4 della quinta riga del triangolo di PASCAL

$$w = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3\}a$$

dove il vettore a contiene le dodici incognite generalizzate (coefficienti dei monomi contenuti in w)

$$a = \{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{11} \quad a_{12}\}^T$$

EF 4 nodi ACM

Possiamo esprimere anche le derivate dello spostamento in funzione dei parametri derivando la relazione di interpolazione dello spostamento

$$\frac{\partial w}{\partial x} = [0\,,1\,,0\,,2x\,,y\,,0\,,3x^2\,,2xy\,,y^2\,,0\,,3x^2y\,,\ y^3]\{a\}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = [0\,,0\,,1\,,0\,,x\,,2y\,,0\,,x^2\,,2xy\,,3y^2\,,x^3\,,3x\,y^2]\{a\}$$

Siamo quindi in grado di esprimere le 12 condizioni al contorno sui valori che la funzione w e le sue derivate devono assumere in corrispondenza dei nodi

EF 4 nodi ACM

In particolare per il primo nodo di coordinate (x_1,y_1) possiamo scrivere

$$w_1 = \{1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1^3, x_1^2 y_1, x_1 y_1^2, y_1^3, x_1^3 y_1, x_1 y_1^3\} a$$

$$(w_{,x})_1 = \varphi_{x1} = \{0,1,0,2x_1, y_1,0,3x_1^2,2x_1 y_1, y_1^2,0,3x_1^2 y_1, y_1^3\} a$$

$$(w_{,y})_1 = \varphi_{y1} = \{0,0_1,1,0, x_1,2y_1,0, x_1^2,2x_1 y_1,3y_1^2, x_1^3,3x_1 y_1^2\} a$$

EF 4 nodi ACM

la scrittura delle imposizione al contorno per i 4 nodi porta ad un sistema di 12 equazioni lineari del tipo

$$d = A\, a \quad \Rightarrow \quad a = A^{-1} d$$

dove il vettore d dei parametri nodali può, per esempio, essere organizzato come

$$d = \{ w_1 \quad \varphi_{x1} \quad \varphi_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad \varphi_{x4} \quad \varphi_{y4} \}^T$$

EF 4 nodi ACM

La soluzione del sistema d= Aa richiede ovviamente che la matrice A *sia invertibile cosa che avviene sempre* se l'elemento triangolare non degenera, come dimostrabile mediante un'inversione algebrica

EF 4 nodi ACM

resta da costruire la matrice di compatibilità B*, che definisce il legame tra le incognite generalizzate e le deformazioni*

$$w_{,xx} = \{0,0,0,2,0,0,6x,2y,0,0,6xy,0\}\,a$$

$$w_{,yy} = \{0,0,0,0,0,2,0,0,2x,6y,0,6xy\}\,a$$

$$2w_{,xy} = \{0,0,0,0,2,0,0,4x,4y,0,6x^2,6y\}\;a$$

EF 4 nodi ACM

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}}_{k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2x & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2y & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \{a\}$$

$$k = Da = DA^{-1}d = Bd$$

Dove la matrice di compatibilità è ottenuta come

$$B = DA^{-1}$$

EF 4 nodi ACM

Abbiamo a disposizione tutti i termini necessari per procedere con la determinazione delle matrici di rigidezza

L'impostazione segue la procedura canonica per lo sviluppo di un elemento; possiamo ora verificare se un'interpolazione cosiffatta è in grado di garantire la continuità inter-elementare dello spostamento e delle sue derivate.

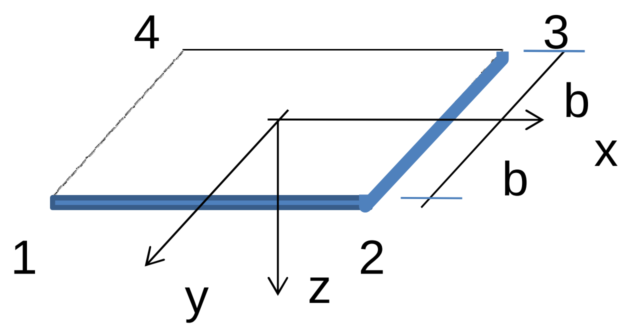
Per operare questa verifica è sufficiente dimostrare che i coefficienti dell'interpolazione su di un lato dipendono solo dagli spostamenti nodali dei nodi che vi appartengono.

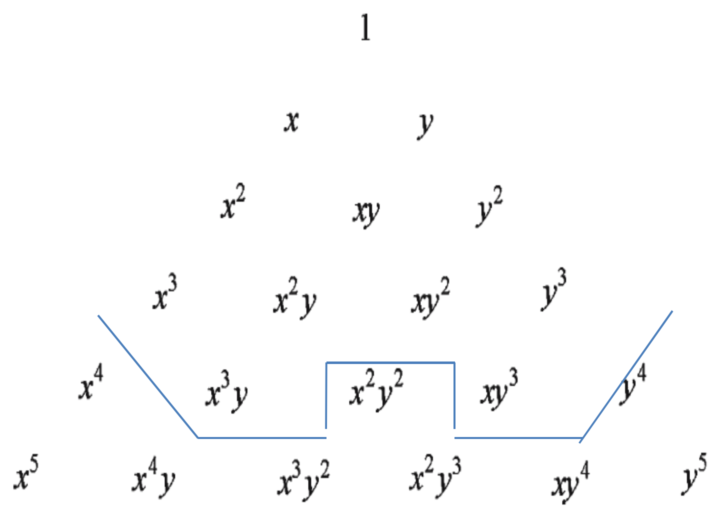
EF 4 nodi ACM

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 +$$
$$+ a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 +$$
$$+ a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3$$

$$w_{,x} = a_2 + 2a_4 x + a_5 y + 2a_7 x^2 + 2a_8 xy + a_9 y^2 +$$
$$+ 3a_{11} x^2 y + a_{12} y^3$$

$$w_{,y} = a_3 + a_5 x + 2a_6 y + a_8 x^2 + 2a_9 xy + 3a_{10} y^2 +$$
$$+ a_{11} x^3 + 3a_{12} xy^2$$





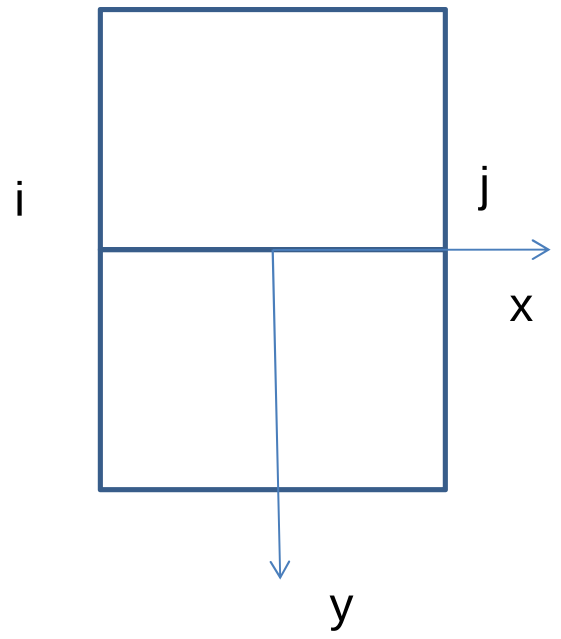
EF 4 nodi ACM

Prendiamo per esempio il lato i-j comune a due elementi ; esso è descritto da y =0 nel riferimento preso in figura

$$w\big|_{y=0} = a_1 + a_2 x + a_4 x^2 + a_7 x^3$$

$$w_{,x}\big|_{y=0} = a_2 + 2a_4 x + 2a_7 x^2$$

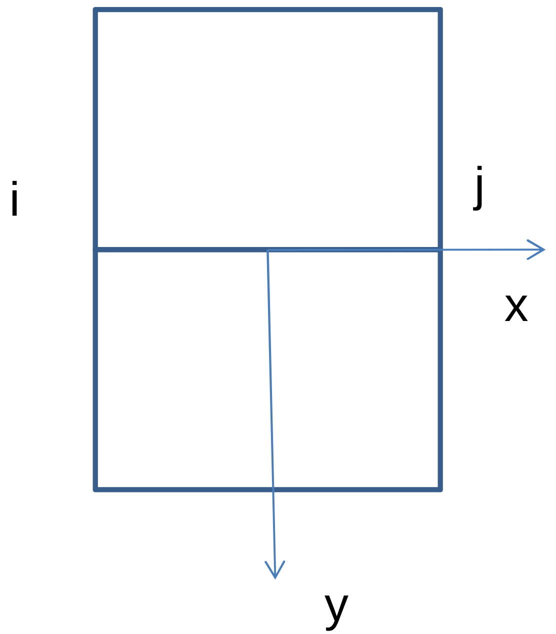
$$w_{,y}\big|_{y=0} = a_3 + a_5 x + a_8 x^2 + a_{11} x^3$$



EF 4 nodi ACM

8 costanti da determinare: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8, a_{11}$

Solo 6 condizioni al contorno nei nodi i e j



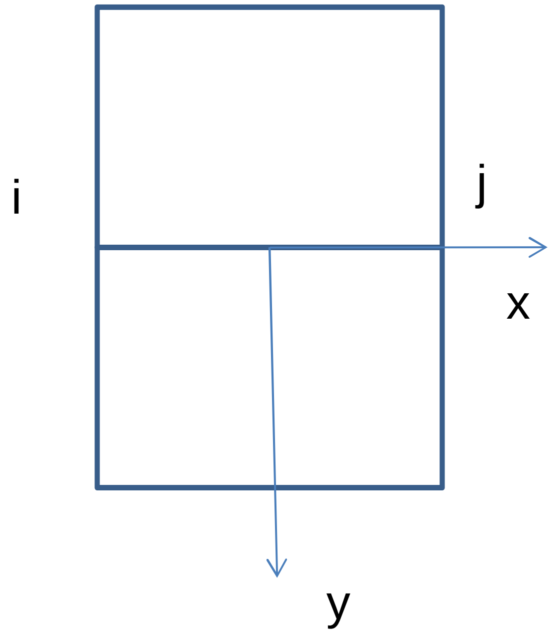
$$w\big|_{y=0} = a_1 + a_2 x + a_4 x^2 + a_7 x^3$$

$$w_{,x}\big|_{y=0} = a_2 + 2a_4 x + 2a_7 x^2$$

$$w_{,y}\big|_{y=0} = a_3 + a_5 x + a_8 x^2 + a_{11} x^3$$

EF 4 nodi ACM

Solo 6 condizioni al contorno nei nodi i e j



$$w\big|_{y=0} = w_i \qquad x = x_i$$

$$w,_x\big|_{y=0} = -\varphi_{xi} \qquad x = x_i$$

$$w,_y\big|_{y=0} = -\varphi_{yi} \qquad x = x_i$$

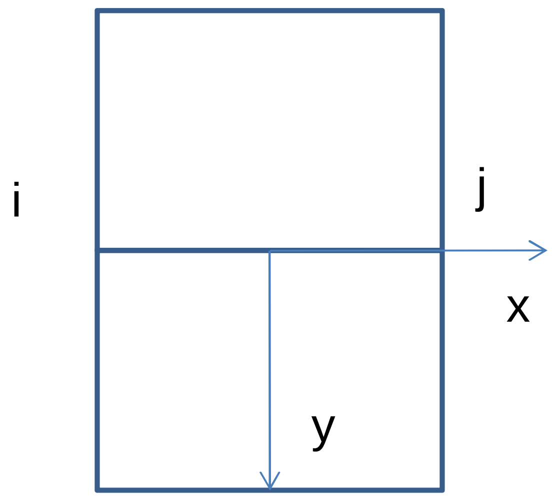
$$w\big|_{y=0} = w_j \qquad x = x_j$$

$$w,_x\big|_{y=0} = -\varphi_{xj} \qquad x = x_j$$

$$w,_y\big|_{y=0} = -\varphi_{yj} \qquad x = x_j$$

EF 4 nodi ACM

Pertanto, non si riesce a determinare le univocamente le costanti relative al lato ij in funzione dei soli gradi di libertà dei nodi i e j



Ne consegue che $w_{,y}\big|_{y=0}$

può essere discontinua

Quadrilatero ACM risulta non conforme

Si dimostra che risulta in generale impossibile generare EF conformi se si modella il campo degli spostamenti con espressioni polinomiali e si scelgono come gradi di libertà solo gli spostamenti e le derivate nei nodi.

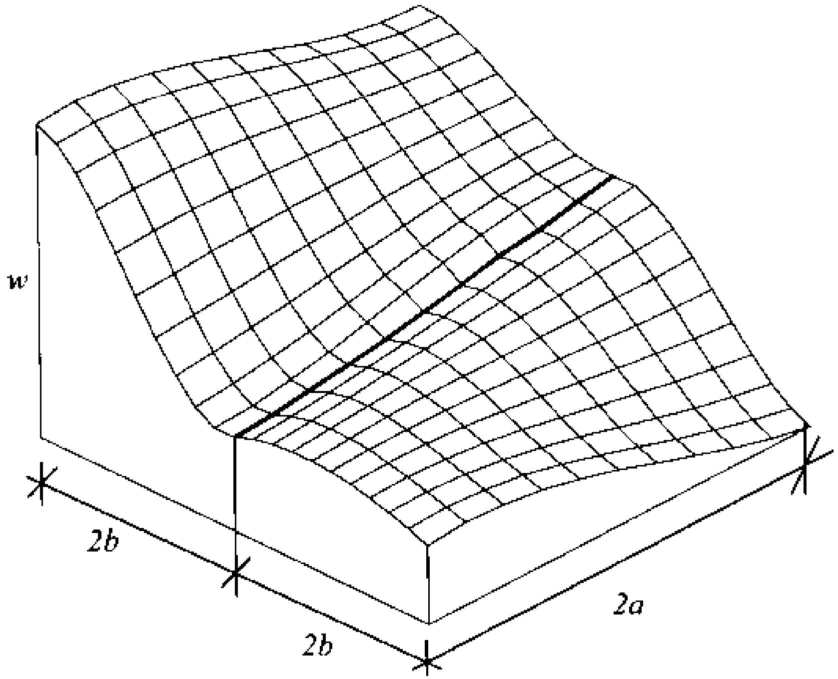


Figura 8.19 – Discontinuità della derivata normale dello spostamento all'interfaccia fra due elementi ACM.

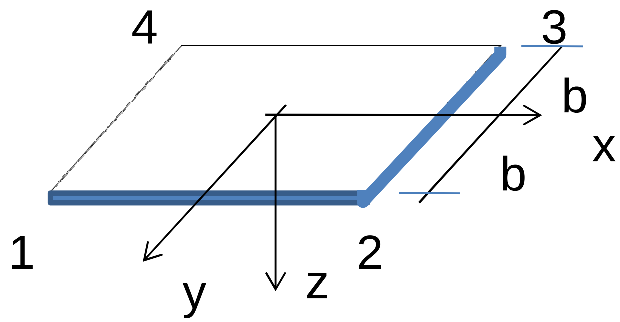
Da Corigliano, Taliercio

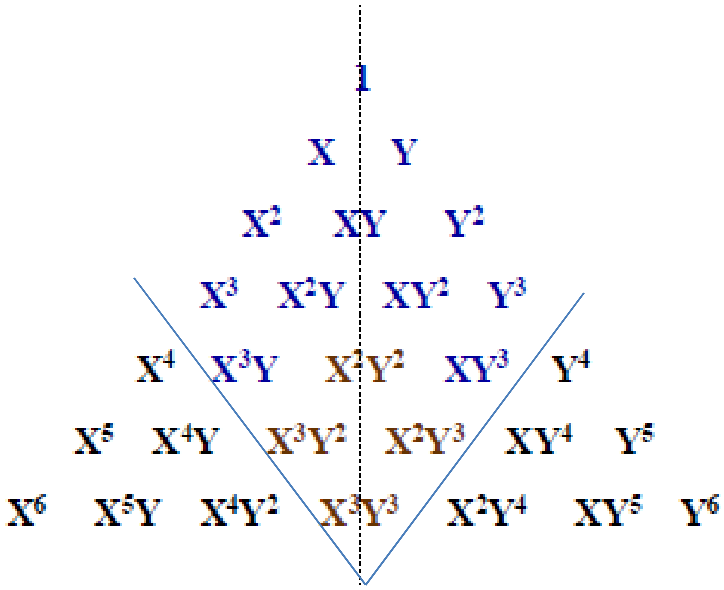
Meccanica Computazionale

Libreria Clup, pag.360

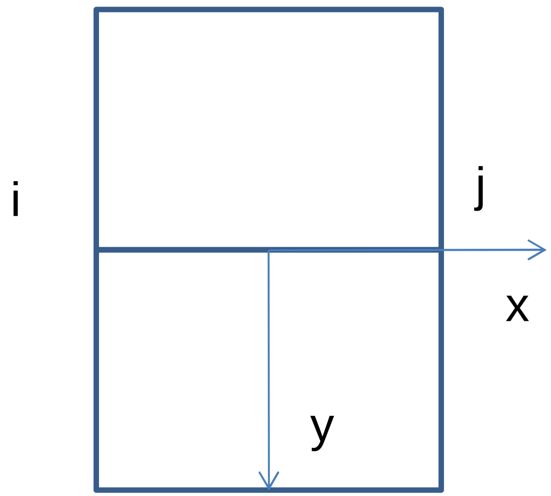
Il quadrilatero conforme BFS

Per superare questa difficoltà, la soluzione piu' ovvia parrebbe quella di introdurre i valori nodali della derivata seconda mista fra i gradi di liberta'. Cio' e' possibile se la piastra viene suddivisa in EF rettangolari come quelli BFS (Bogner-Fox-Schmidt 1966)





Il quadrilatero conforme BFS



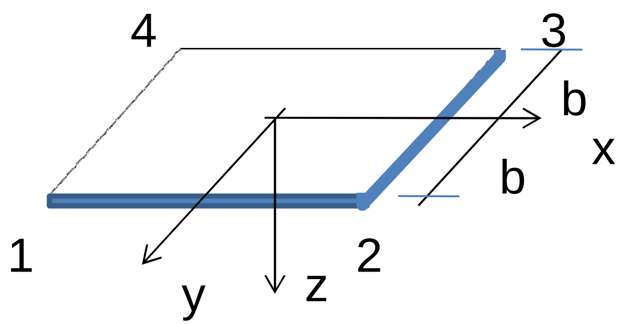
Gradi di libertà per ogni nodo

$$w, w_{,x}, w_{,y},$$

$$w_{,xy}$$

Adesso abbiamo 4 condizioni al contorno per nodo e riusciamo a trovare le 8 costanti che individuano le costanti relative al lato ij

Il quadrilatero conforme BFS



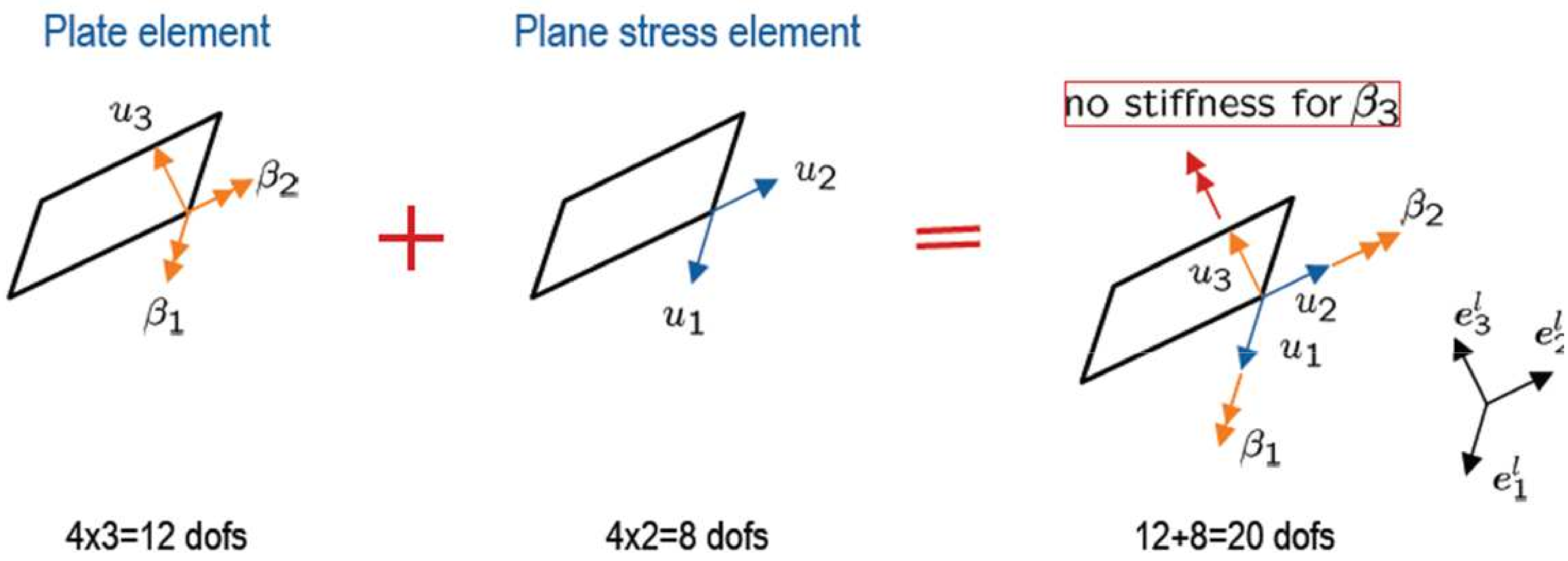
$$w, w_{,x}, w_{,y},$$

$$w_{,xy}$$

Questa soluzione presenta inconvenienti in presenza di mesh caratterizzate da nodi in cui convergono lati di più EF con inclinazioni diverse. In questi casi, la continuità delle derivate seconde miste secondo più coppie di direzioni ortogonali del piano si traduce nella continuità di tutte le derivate seconde in un nodo, cosa che in generale non e' auspicabile.

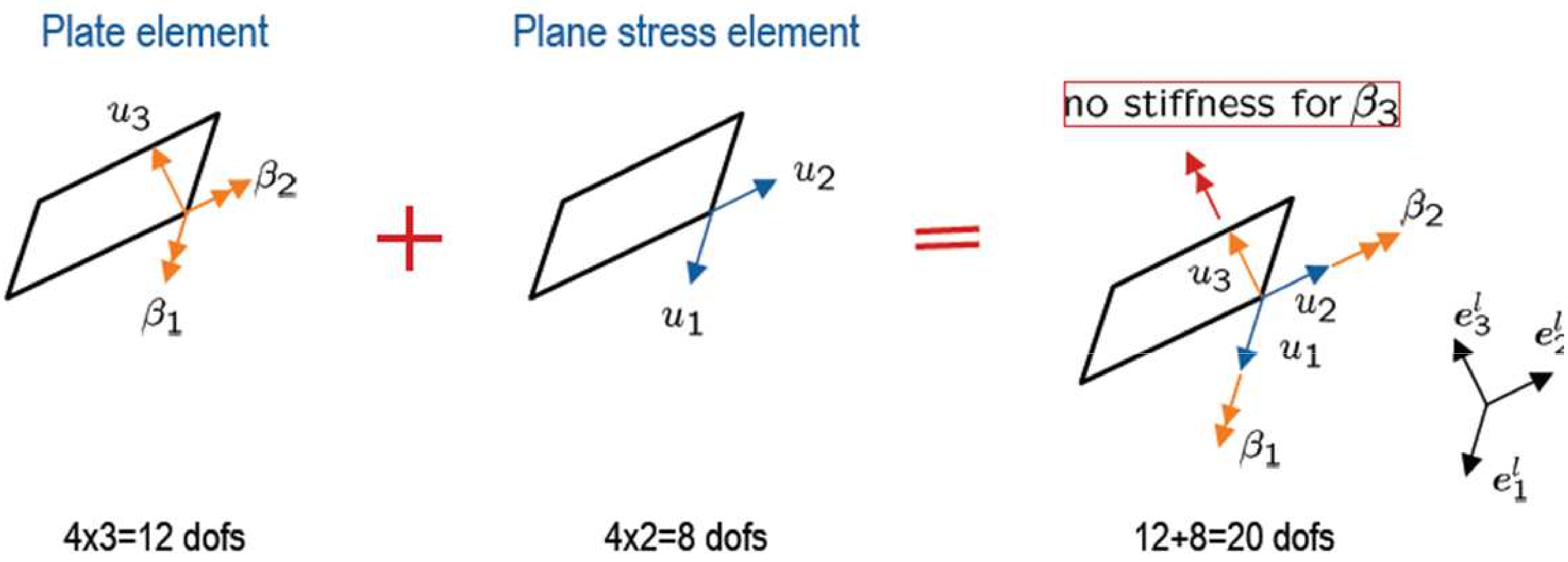
Inoltre, risulta difficile sapere a priori i valori della derivata mista di w al bordo

Elemento plate and shell



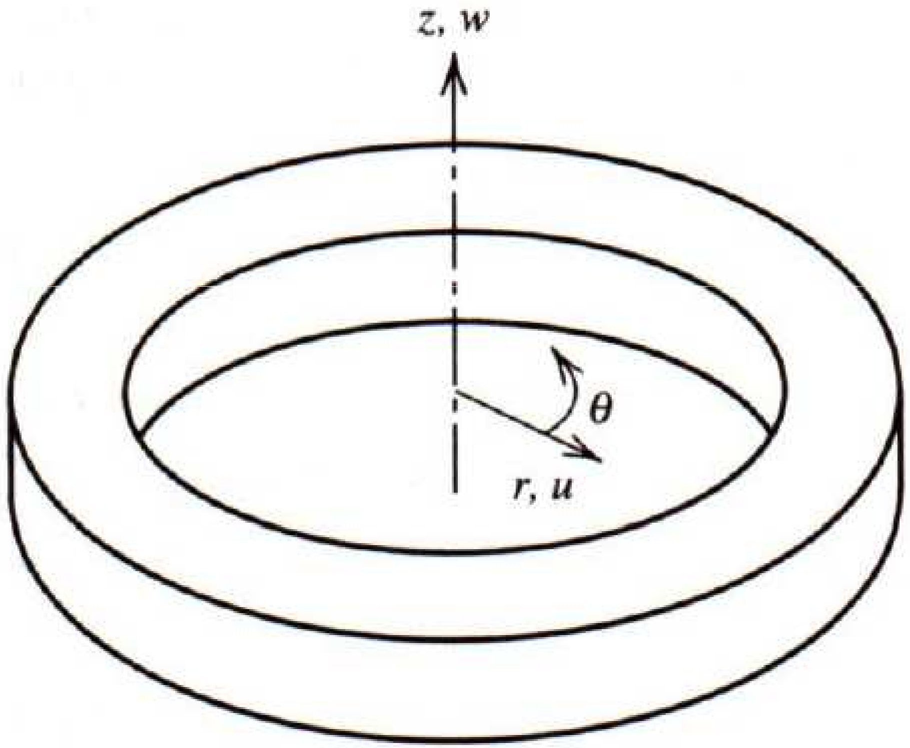
L'elemento plate and shell combina la rigidezza di un elemento plane stress per la descrizione del comportamento dovuto a deformabilità membranale con la rigidezza di un elemento plate (piastra)

Elemento plate and shell



La rigidezza rispetto alla rotazione β_3 di asse ortogonale al piano (drilling) non viene considerata

Simmetria polare-assialsimmetria



Simmetria polare-assialsimmetria

Campo di deformazione generale per assialsimmetria quindi con spessori non necessariamente sottili

Deformazioni:

$$\varepsilon_r(r,z) = \frac{du}{dr}$$

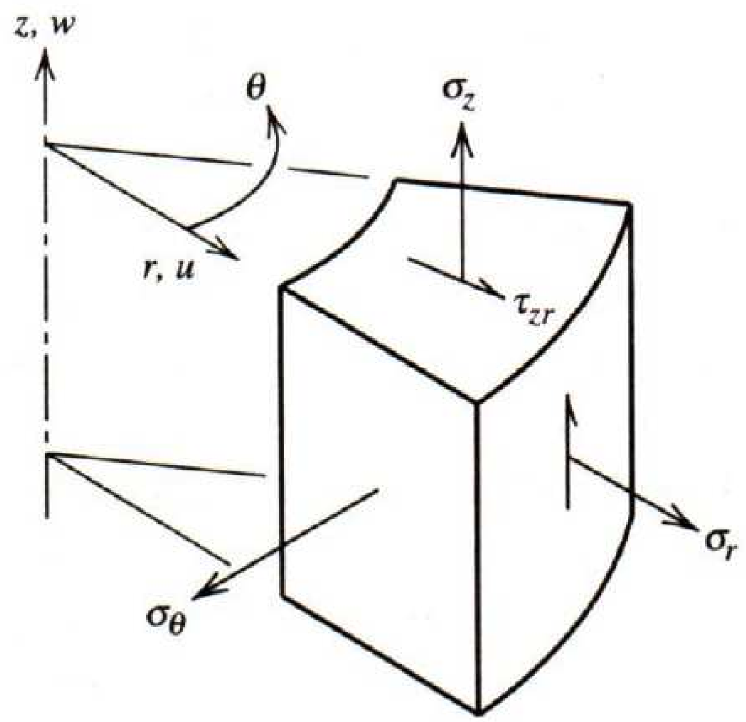
$$\varepsilon_\theta(r,z) = \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_z(r,z) = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{rz}(r,z) = \frac{dw(r)}{dr} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

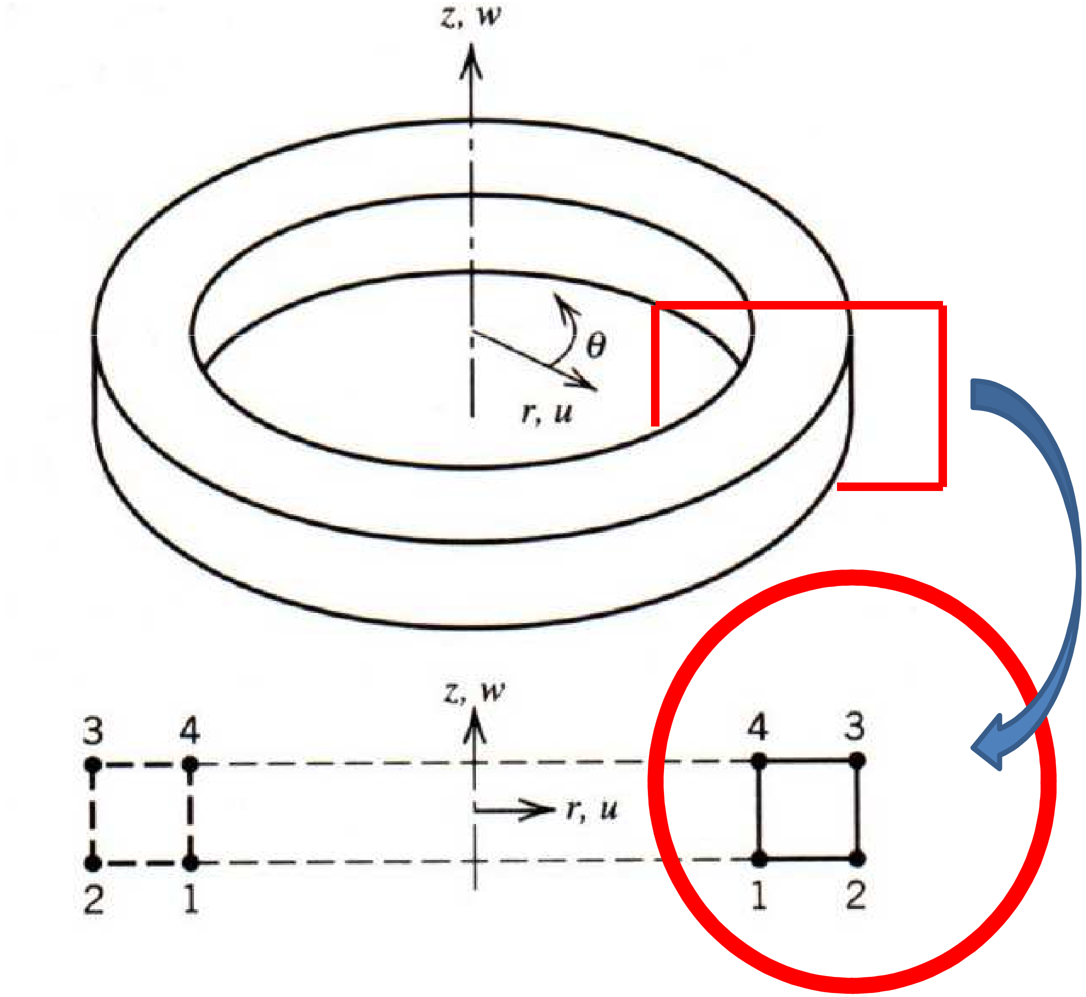
Leggi costitutive

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix}$$



Simmetria polare-assialsimmetria

La mesh è simile a quella dei problemi piani, ma ogni nodo rappresenta quello che avviene lungo la direzione circonferenziale mentre ogni elemento rappresenta la sezione trasversale dell'anello



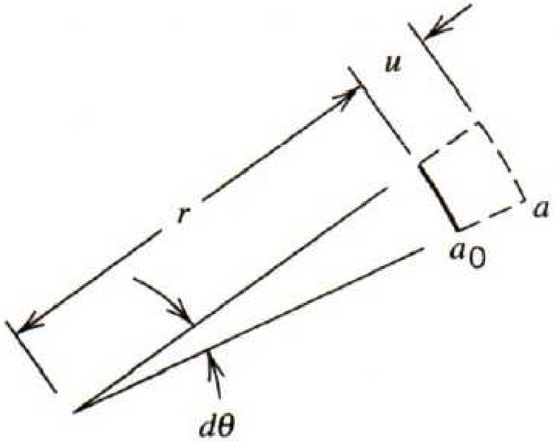
Si considera una sezione trasversale

Elemento finito assialsimmetrico

Simmetria polare-assialsimmetria

In problemi assialsimmetrici, la geometria è assialsimmetrica e carichi e vincoli sono anch'essi assialsimmetrici di solito

La mesh è simile a quella dei problemi piani, ma ogni nodo rappresenta una circonferenza mentre ogni elemento rappresenta la sezione trasversale dell'anello



Initial arc $= a_0 = r\,d\theta$

Displaced arc $= a = (r+u)\,d\theta$

By definition, $\varepsilon_\theta = \dfrac{a - a_0}{a_0}$

Hence $\varepsilon_\theta = \dfrac{u}{r}$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Simmetria polare-assialsimmetria

Campo di spostamento

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix},$$

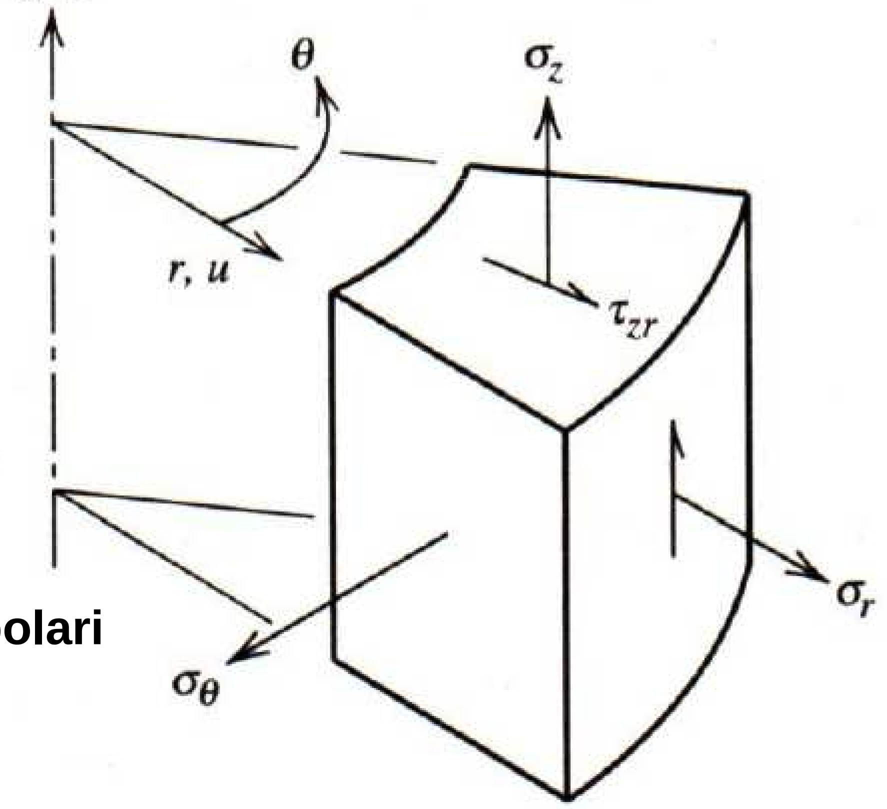
deformazione

$$\underset{4\times1}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{4\times2n}{\mathbf{B}} \; \underset{2n\times1}{\mathbf{d}}$$

Matrice di rigidezza

$$\underset{2n\times2n}{\mathbf{k}} = \iiint \mathbf{B}^T \underset{4\times4}{\mathbf{E}} \, \mathbf{B} \, \boxed{r\,dr} \, d\theta \, dz$$

Jacobiano in coordinate polari



Simmetria polare-assialsimmetria

•**Eccetto per la deformazione circonferenziale**

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

Gli elementi assialsimmetrici sono simili agli elementi piani

• **Il triangolo a 3 nodi è simile al triangolo con deformazione costante**

$$u = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 z$$

$$w = \beta_4 + \beta_5 r + \beta_6 z$$

•**ma ε_θ è una funzione di r e z , non è costante**

$$\varepsilon_r = \beta_2$$

$$\varepsilon_z = \beta_6$$

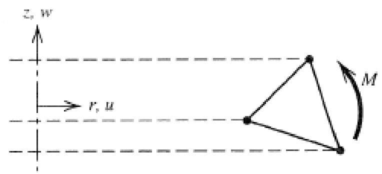
$$\varepsilon_\theta = \beta_1 \frac{1}{r} + \beta_2 + \beta_3 \frac{z}{r}$$

$$\gamma_{zr} = \beta_5 + \beta_3$$

Simmetria polare-assialsimmetria

Non è un elemento a deformazione costante perché l' espressione di ε_θ contiene termini in r e z

L' unico moto rigido possibile è in direzione z: w = β_4 perché β_4 non compare in nessuna espressione delle ε. Queste ultime sono invece presenti se qualsiasi altra coordinata generalizzata è diversa da zero



C' è una resistenza alla rotazione nel piano radiale rz, rappresentata dal termine β_3 z/r

Tale deformazione nasce con l' applicazione di un momento M per unità di lunghezza uniformemente distribuito lungo la circonferenza del componente

Per mantenere la congruenza dell' oggetto reale 3D, le deformazioni circonferenziali risulteranno di trazione nella parte bassa dell' elemento e di compressione in quella alta

Un elemento piano non è in grado di resistere al momento M che genererebbe una rotazione rigida

Simmetria polare-assialsimmetria

Nel caso di un elemento assialsimmetrico rettangolare a *n* nodi isoparametrico

$$\underset{2n\times 2n}{[K]} = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underset{2n\times 4}{[B]^T}\,\underset{4\times 4}{[E]}\,\underset{4\times 2n}{[B]}\, r\,|J|\, d\xi\, d\eta\, d\vartheta$$

NB: r |J| al posto di t |J|

Rispetto agli elementi piani, la riga in più corrisponde alla ε_θ

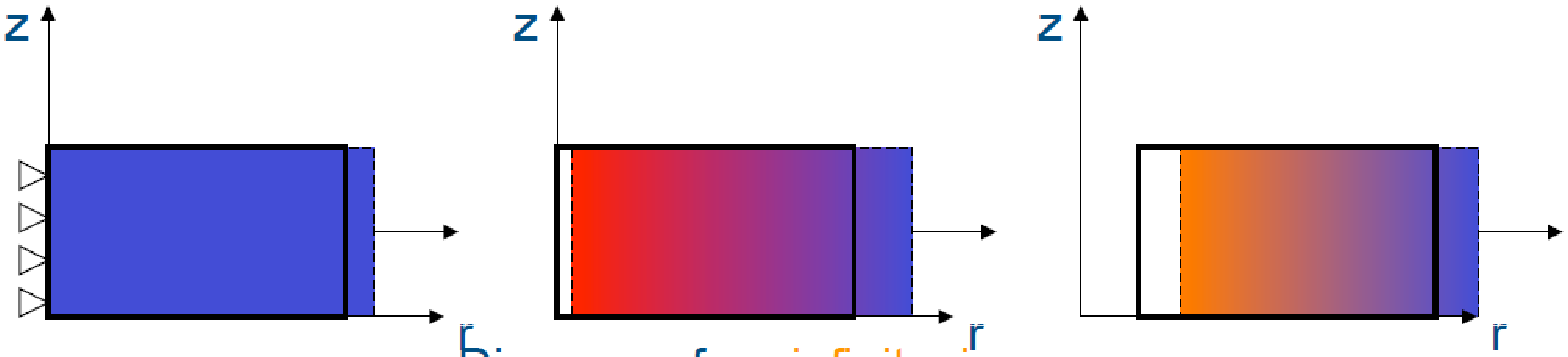
$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\left(N_1 u_1 + N_2 u_2 + \ldots + N_n u_n\right)$$

$B^T EBr$ contiene termini in 1/r => problemi per l'integrazione numerica?
NO, a condizione che nessun punto di Gauss si trovi sull'asse z, ovvero a r=0

Simmetria polare-assialsimmetria

A differenza dei modelli piani, per impedire moti rigidi è sufficiente vincolare un solo nodo in direzione z

Attenzione al vincolo radiale in corrispondenza dell'asse z:



Disco pieno

Disco con foro infinitesimo o compenetrazione

Disco forato

Per quanto riguarda i carichi, bisogna fare attenzione perché le logiche di applicazione sono due (e ogni software ne adotta una):

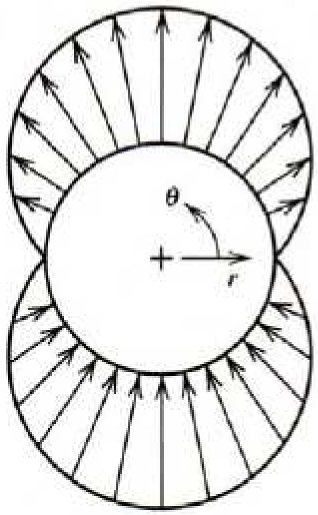
- si applica alla sezione 2D il carico totale integrato su 2π
- si applica alla sezione 2D il carico per unità di angolo (segmenti di 1 rad)

Alcuni software permettono di applicare carichi non assialsimmetrici e di sviluppare spostamenti fuori piano (torsione). La tecnica è però complicata e va oltre i nostri scopi

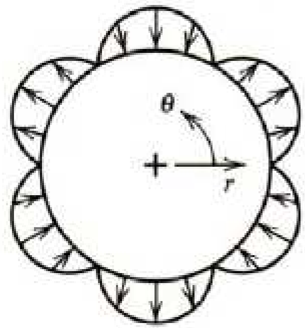
Simmetria polare-assialsimmetria

In caso di carichi non assialsimmetrici, possiamo usare le serie di Fourier per rappresentare il carico come una funzione dell'angolo θ

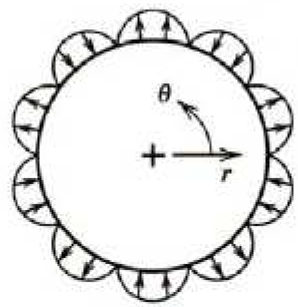
$$q = \sum_{n=0}^{\infty} q_{cn} \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} q_{sn} \sin n\theta$$



$q = \frac{4q_o}{\pi} \sin \theta$



$q = \frac{4q_o}{3\pi} \sin 3\theta$



$q = \frac{4q_o}{5\pi} \sin 5\theta$