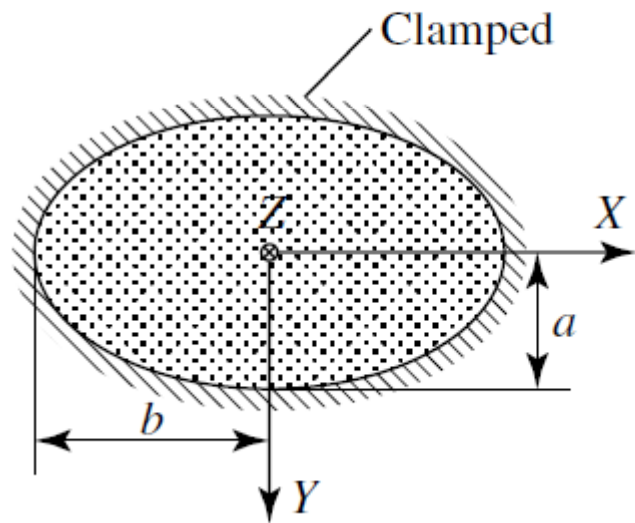


# Piastra sottile: soluzioni esatte

## Piastra ellittica incastrata al bordo soggetta a carico distribuito costante

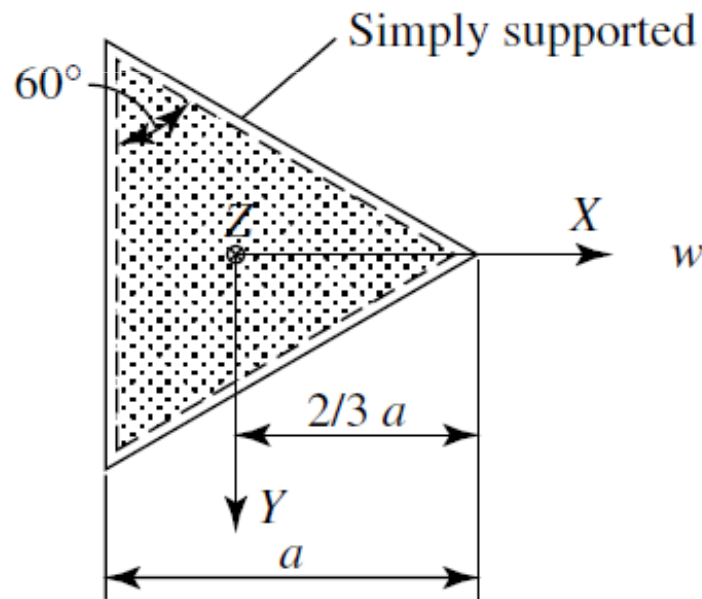


$$p_z = p_0 = \text{const}$$

$$w = \frac{p_0 a^4 b^4}{8D \left[ 3 \left( a^2 + b^2 \right)^2 - (2ab)^2 \right]} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2$$

# Piastre sottili: soluzioni esatte

## Piastra triangolare appoggiata al bordo soggetta a carico distribuito costante

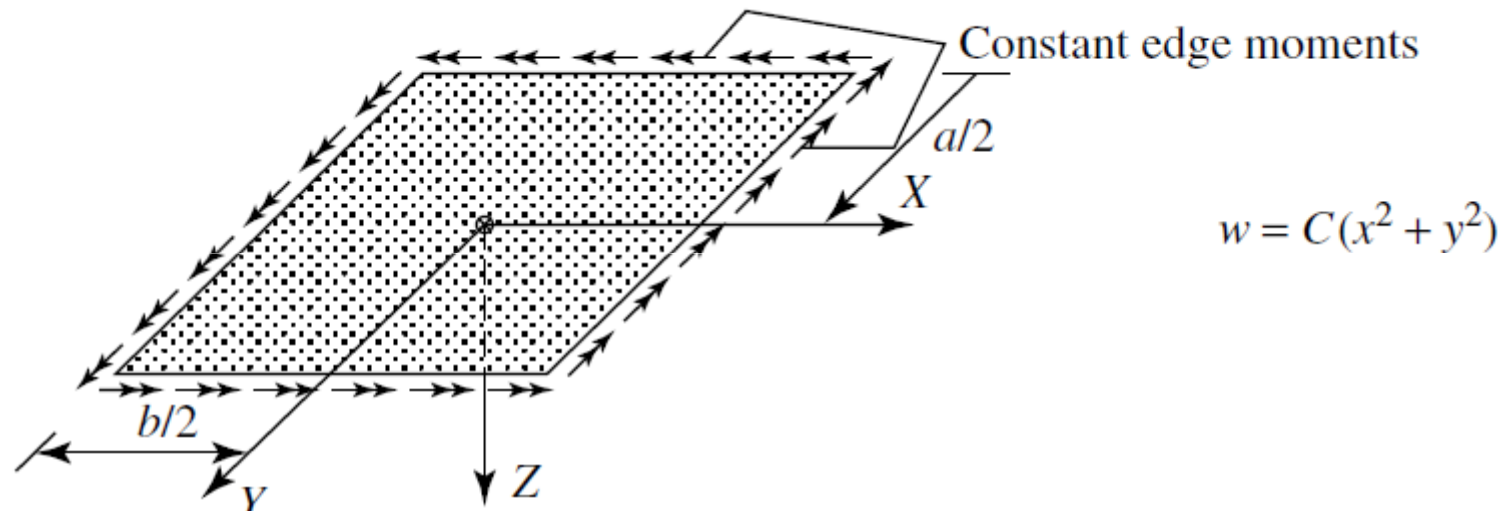


$$p_z = p_0 = \text{const}$$

$$w = \frac{p_0}{64Da} \left( x^3 - x^2a - 3xy^2 - y^2a + \frac{4}{27}a^3 \right) \left( \frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right)$$

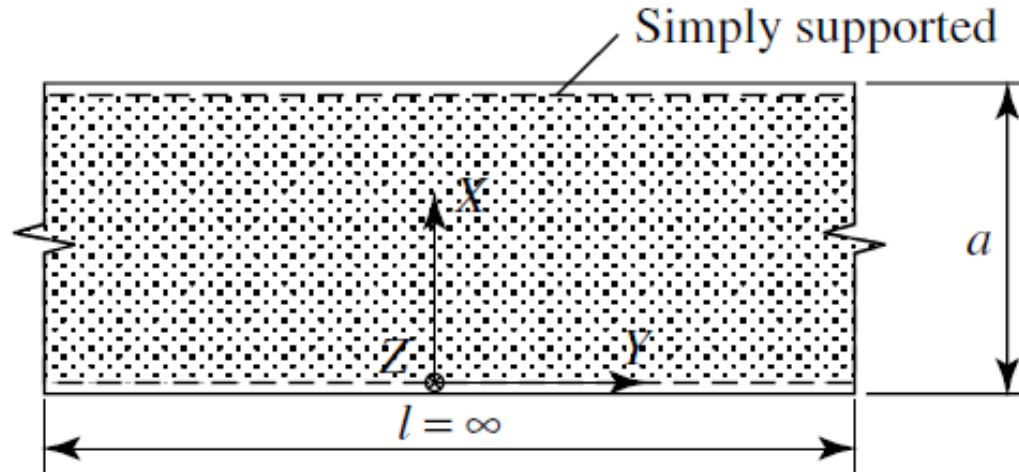
# Piastre di Kirchhoff: soluzioni esatte

## Piastra rettangolare soggetta a momenti al bordo senza carico distribuito



# Piastre di Kirchhoff: soluzioni esatte

**Striscia di lunghezza infinita appoggiata sui lati longitudinali bordo soggetta a carico distribuito costante**

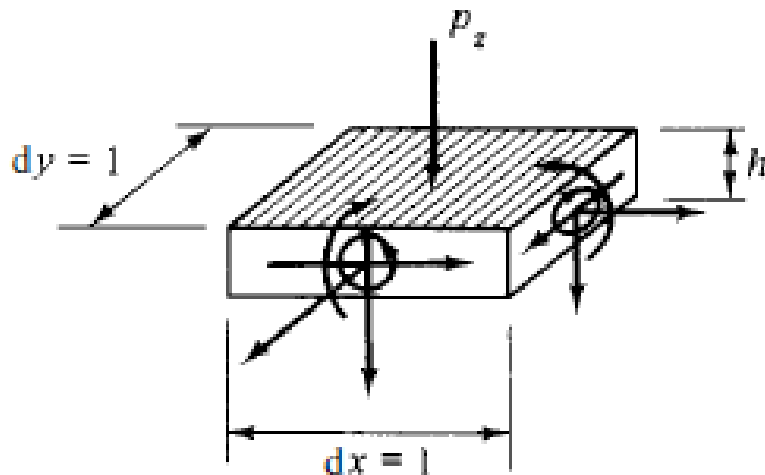


$$p_z = p_0 = \text{const}$$

$$w = \frac{p_0}{24D} \left( x^4 - 2ax^3 + a^3x \right)$$

# Le piastre moderatamente spesse

3. piastre moderatamente spesse  $h/L = 1/10 - 1/5$  : piastre in cui l'effetto del taglio sulle componenti normali viene messo in conto



(c) Plate with flexural and extensional rigidities

Figure I.3 Internal forces in various types of plate elements.

# Piastre moderatamente spesse

**Alcuni esperimenti hanno mostrato che la classica teoria di Kirchhoff per le piastre sottili sottostima le inflessioni e sovrastima le frequenze naturali ed i carichi di buckling per travi moderatamente spesse**

**Queste discrepanze sono dovute alla scelta di trascurare gli effetti dello scorrimento a taglio ovvero all'assunzione che la normale al piano medio rimanga rettilinea e normale al piano medio inflesso**

(Rif. Szilard, Theory and applications of plate analysis)

# Piastre moderatamente spesse

**Nonostante la teoria di Kirchhoff raggiunga risultati sufficientemente accurati per piastre sottili, la sua accuratezza diminuisce al crescere dello spessore della piastra.**

**Un'analisi elastica tri-dimensionale di alcuni problemi di piastre inflesse indica che l'errore commesso è dell'ordine della radice quadrata dello spessore.**

**Questo limite inerente la teoria di Kirchhoff nel caso di piastre inflesse moderatamente spesse ha reso necessario lo sviluppo di teorie più raffinate in grado di ottenere risultati più affidabili**

# Piastre moderatamente spesse

**Attualmente esistono molte teorie di piastra inflessa che tengono conto dello scorrimento tagliante**

**Il primo tentativo si deve a M. Levy che nel suo lavoro pionieristico cominciò a cercare soluzioni usando le equazioni dell'elasticità tridimensionale.**

**Attualmente, esistono due approcci principali che consentono la presa in conto degli scorrimenti a taglio:**

- 1) Approccio di **Reissner**, dove le tensioni sono variabili primarie**
- 2) Approccio di **Mindlin**, dove gli spostamenti sono variabili primarie**

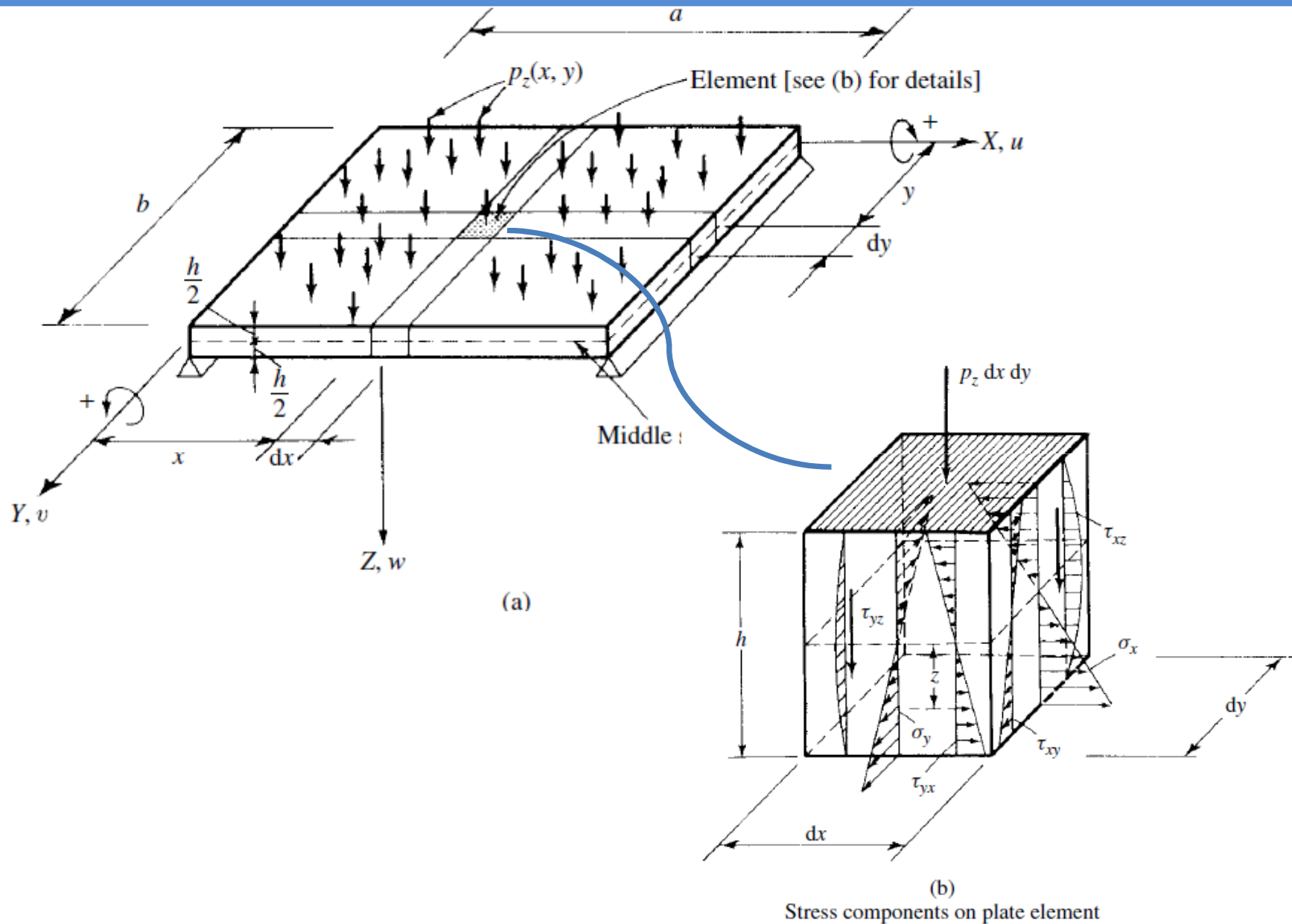


# Piastre moderatamente spesse

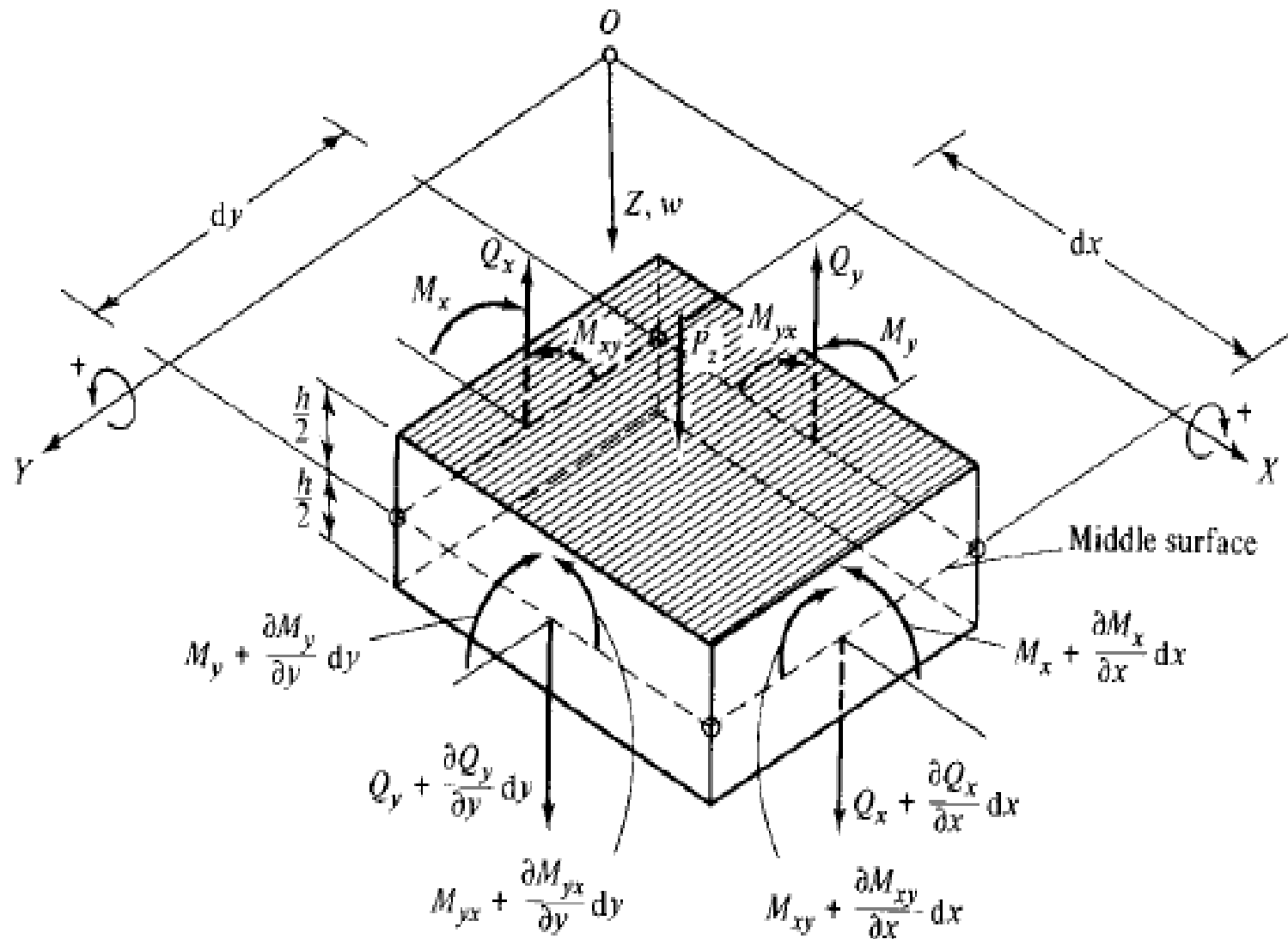
**Entrambi gli approcci sono stati ulteriormente sviluppati**

**Negli ultimi anni, sono state elaborate delle teorie di ordine superiore più sofisticate (Higher-order plate theories)**

# Stato tensionale



# Sforzi flessionali



**Le sollecitazioni risultanti sono le stesse viste per la teoria delle piastre inflesse sottili**

# Teoria di Reissner-Mindlin delle piastre moderatamente spesse

**Ipotesi sulla tensione:** la tensione normale in direzione dello spessore della piastra è trascurabile.

$$\sigma_z = 0$$

**Ipotesi cinematica:** la dilatazione lineare in direzione dello spessore della piastra è trascurabile, gli scorrimenti angolari tra il piano della piastra e la fibra ortogonale a tale piano sono costanti

$$\varepsilon_z = 0$$

**Ipotesi cinematica:** la fibra ortogonale al piano medio della piastra risulta rettilinea ma non necessariamente ortogonale alla superficie media della piastra a deformazione avvenuta

$$\gamma_{yz} = \gamma_2 \quad \gamma_{xz} = \gamma_1$$

# Teoria di Reissner-Mindlin delle piastre moderatamente spesse

1. Trascurabilità della tensione normale nello spessore, i.e.  $\sigma_z = 0$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x] & \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= -\nu \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y] & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}\end{aligned}$$

Invertendo la relazione di legame costitutivo si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_y & \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_x + \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_y & \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \\ & & \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}\end{aligned}$$

# Teoria di Reissner-Mindlin

La sezione trasversale ruota rimanendo piana, la normale ruota ma non resta ortogonale al piano medio inflesso

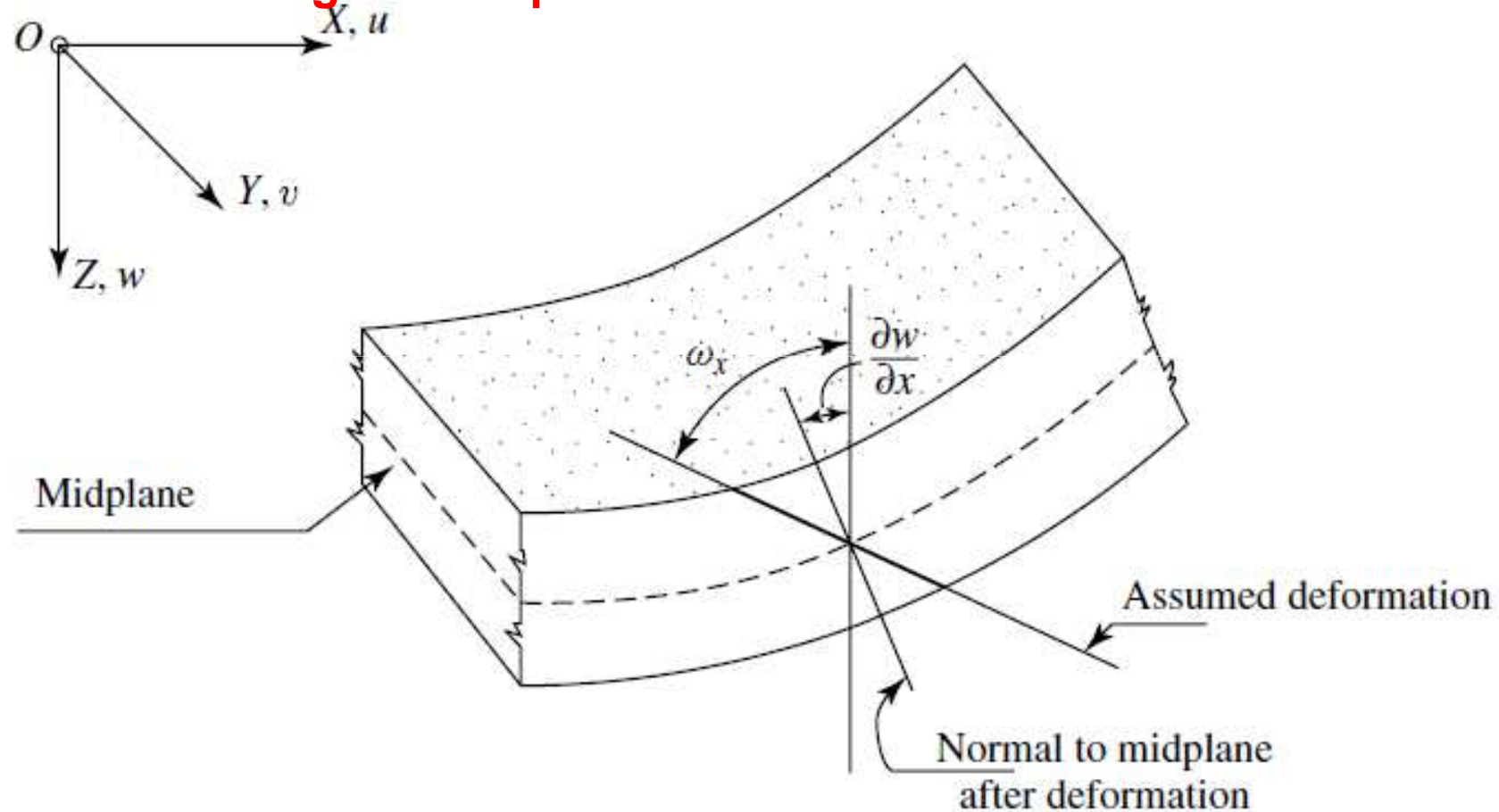


Figure 1.5.1 Reissner's cross-sectional assumption.

# Teoria di Reissner-Mindlin

**Ipotesi cinematiche: trascurabilità della dilatazione lineare in direzione dello spessore della piastra e degli scorrimenti angolari**

**Ipotesi sulla dilatazione lineare**

$$\varepsilon_z = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{,z} = 0$$

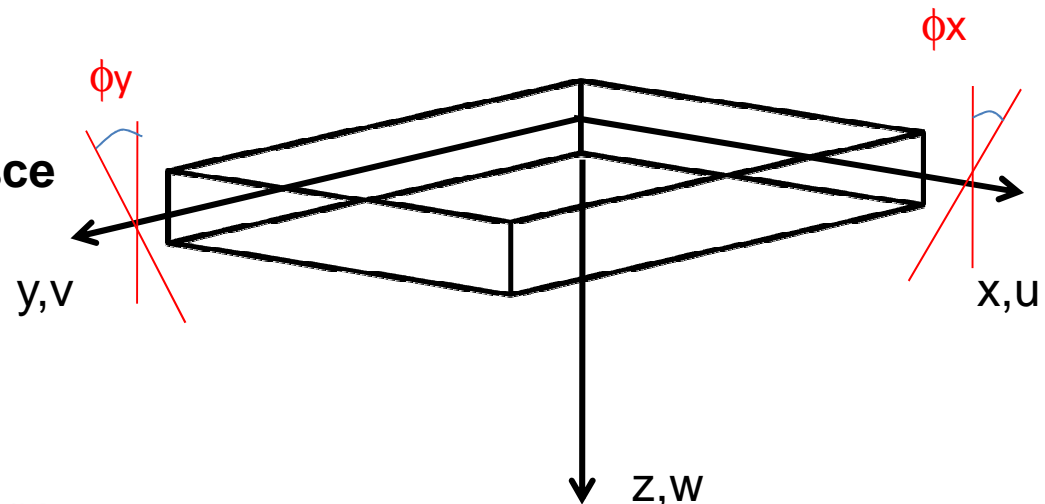
che, integrata nello spessore fornisce

$$w = w(x, y)$$

**Ipotesi sugli scorrimenti angolari**

$$\gamma_{yz} = \gamma_2 \quad \Rightarrow \quad v_{,z} + w_{,y} = \gamma_2$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_1 \quad \Rightarrow \quad u_{,z} + w_{,x} = \gamma_1$$



# Teoria di Reissner-Mindlin

Consideriamo le espressioni degli scorrimenti

$$\gamma_{yz} = \gamma_2 \quad \Rightarrow \quad v_{,z} + w_{,y} = \gamma_2$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_1 \quad \Rightarrow \quad u_{,z} + w_{,x} = \gamma_1$$

che, integrate nello spessore in  $z$ , forniscono

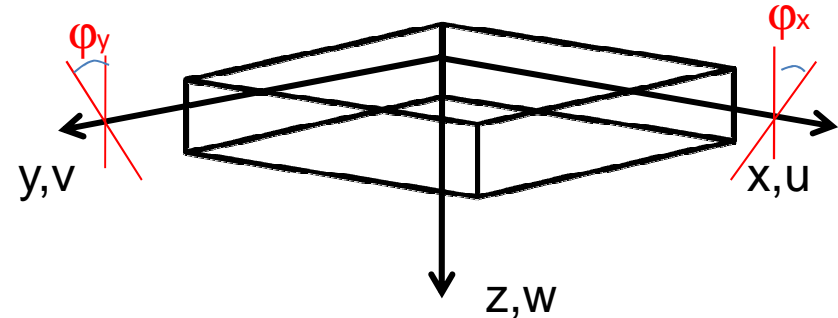
$$u = u_o + z \varphi_x$$

$$v = v_o + z \varphi_y$$

dove

$$\varphi_x = \gamma_1 - w_{,x} \quad \text{Rotazione di asse } y$$

$$\varphi_y = \gamma_2 - w_{,y} \quad \text{Rotazione di asse } x$$





# Teoria di Reissner-Mindlin

Il campo di spostamenti risulta quindi

$$u = u_o(x, y) + z \varphi_x(x, y)$$

$$v = v_o(x, y) + z \varphi_y(x, y)$$

$$w = w(x, y)$$

Dove

$u_o(x, y)$  e  $v_o(x, y)$

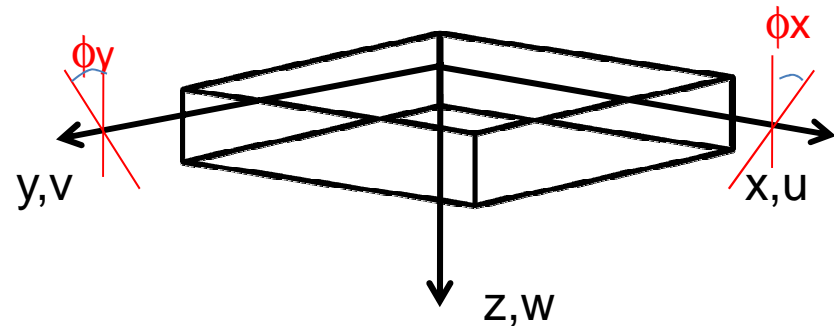
spostamenti in x ed y del piano medio ( $z=0$ )

$$\varphi_x = \gamma_1 - w_{,x}$$

Rotazione di asse y

$$\varphi_y = \gamma_2 - w_{,y}$$

Rotazione di asse x



# Teoria di Reissner-Mindlin: cinematica

**Spostamenti**

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ w \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}$$

**Deformazioni**

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bullet_{,x} & 0 \\ 0 & \bullet_{,y} \\ \bullet_{,y} & \bullet_{,x} \end{bmatrix}$$

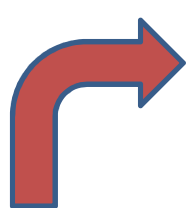
$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \varphi_x \\ w_{,y} + \varphi_y \end{Bmatrix}$$

# Teoria di Reissner-Mindlin

**Tensioni**

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$


$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

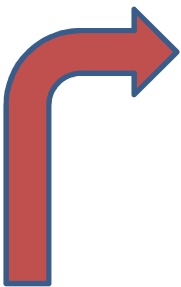
**OSS: le  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  nel caso della cinematica di R-M sono direttamente legate agli scorrimenti omologhi**

# Teoria di Reissner-Mindlin: sforzi generalizzati

**Risultanti**

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \boldsymbol{\sigma} dz$$


$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\tau} dz$$

**Dove  $\mu = 5/6$**

**OSS: le  $Q_x$  e  $Q_y$  nel caso della teoria di R-M sono direttamente ottenute come sforzi generalizzati**

## Teoria di Reissner-Mindlin: fattore di correzione $\mu$

**Le assunzioni cinematiche implicano che gli scorrimenti trasversali sono costanti. Di conseguenza, anche gli sforzi taglianti corrispondenti sono costanti. Tale risultato viola la distribuzione parabolica reale valida per travi moderatamente spesse. Inoltre, viene violata la condizione che lo stress sia zero all'estradosso ed intradosso.**

**Pertanto l'assunzione di scorrimento costante non è congruente**

**Si è allora introdotto un fattore di correzione  $\mu$  che è stato valutato tramite confronto con la soluzione esatta elastica usata da Timoshenko per le travi moderatamente alte**

# Teoria di Reissner-Mindlin: sforzi membranalni generalizzati

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{D} \left( \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{D} dz \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{D} dz \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^m \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^m = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{D} dz = h \mathbf{D}$$

**Sono le stesse espressioni ottenute per la trattazione di Kirchhoff**

# Teoria di Reissner-Mindlin

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \boldsymbol{\sigma} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{D} \left( \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{D} dz \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} + \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \mathbf{D} dz \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^f \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}^f = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \mathbf{D} dz = \frac{h^3}{12} \mathbf{D}$$

# Teoria di R-M: sforzi generalizzati

In esplicito

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} e_x + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} e_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} u_{o,x} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} v_{o,y}$$

$$N_y = \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} e_x + \frac{Eh}{1-\nu^2} e_y = \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} u_{o,x} + \frac{Eh}{1-\nu^2} v_{o,y}$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} e_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_{o,y} + v_{o,x})$$

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \chi_x + \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} \chi_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \varphi_{x,x} + \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} \varphi_{y,y}$$

$$M_y = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} \chi_x + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \chi_y = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} \varphi_{x,x} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \varphi_{y,y}$$

$$M_{xy} = \frac{Eh^3}{12 \cdot 2(1+\nu)} \chi_{xy} = \frac{Eh^3}{12 \cdot 2(1+\nu)} (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x})$$



# Teoria di Reissner-Mindlin: sforzi taglianti generalizzati

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\tau} dz = \mu \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} dz$$

$$\mathbf{D}^S = \mu \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{G} dz = \mu h \mathbf{G}$$

$$Q_x = \mu \frac{E h}{2(1+\nu)} (w_{,x} + \varphi_x)$$

$$Q_y = \mu \frac{E h}{2(1+\nu)} (w_{,y} + \varphi_y)$$

**Dove  $\mu = 5/6$**

# Equilibrio alla traslazione

Equilibrio alla traslazione lungo  $x$  e  $y$ .

$$(N_x + \Delta N_x - N_x) \Delta y + (N_{xy} + \Delta N_{xy} - N_{xy}) \Delta x + f_x \Delta x \Delta y = 0$$

$$(N_y + \Delta N_y - N_y) \Delta x + (N_{xy} + \Delta N_{xy} - N_{xy}) \Delta y + f_y \Delta x \Delta y = 0$$

Semplificando e dividendo per  $\Delta x \Delta y$

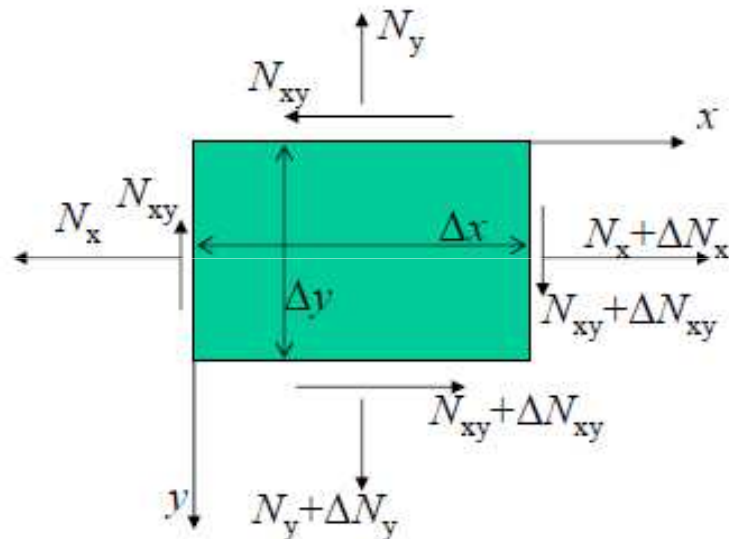
$$\frac{\Delta N_x}{\Delta x} + \frac{\Delta N_{xy}}{\Delta y} + f_x = 0$$

$$\frac{\Delta N_{xy}}{\Delta x} + \frac{\Delta N_y}{\Delta y} + f_y = 0$$

nel limite per  $\Delta x$  e  $\Delta y$  che tendono a zero

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + f_y = 0$$

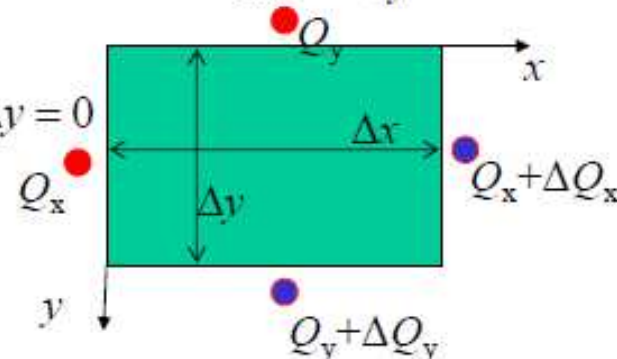


Equilibrio alla traslazione lungo  $z$ .

$$(Q_x + \Delta Q_x - Q_x) \Delta y + (Q_y + \Delta Q_y - Q_y) \Delta x + q \Delta x \Delta y = 0$$

⇓

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$



# equilibrio alla rotazione

Equilibrio alla rotazione intorno a  $y$  e  $x$ .

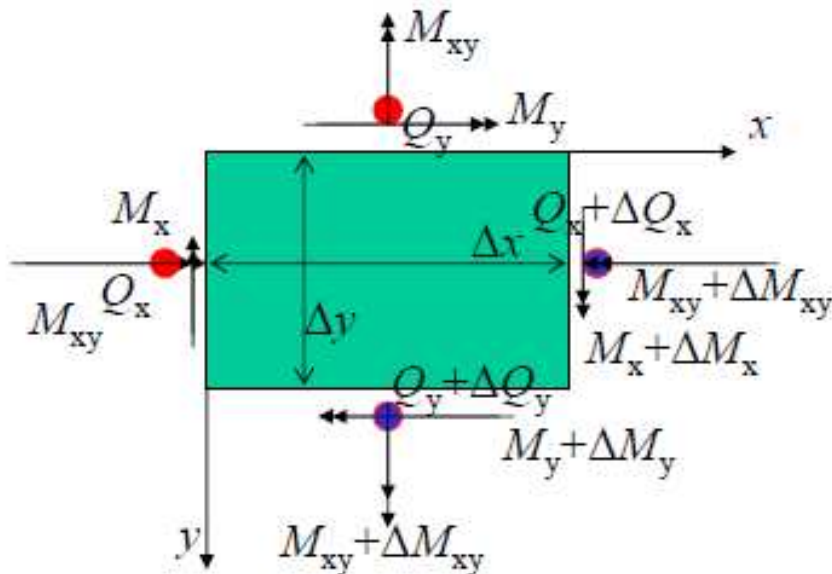
$$(M_x + \Delta M_x - M_x) \Delta y + (M_{xy} + \Delta M_{xy} - M_{xy}) \Delta x - (Q_x + \Delta Q_x) \Delta x \Delta y - q \frac{\Delta x^2 \Delta y}{2} = 0$$

$$(M_y + \Delta M_y - M_y) \Delta x + (M_{xy} + \Delta M_{xy} - M_{xy}) \Delta y - (Q_y + \Delta Q_y) \Delta x \Delta y - q \frac{\Delta x \Delta y^2}{2} = 0$$

Semplificando, dividendo per  $\Delta x \Delta y$ , eseguendo il limite si ottiene:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$



# Teoria di Reissner-Mindlin

In definitiva le equazioni di equilibrio sono:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$

# Teoria di Reissner-Mindlin delle piastre moderatamente spesse

**I parametri cinematici indipendenti sul contorno sono**

**w: inflessione**

**$\varphi_s$  rotazione attorno al versore della direzione tangente al contorno)**

**$\varphi_n$  rotazione attorno ad n (n versore normale al contorno)**

**Analogamente si dimostra che possono essere assegnate 3 condizioni al contorno di tipo statico**

**Tali caratteristiche della sollecitazione devono essere duali (nel senso del lavoro virtuale) all'inflessione, alla rotazione attorno ad m ed alla rotazione attorno d n**

# Teoria di Reissner-Mindlin delle piastre moderatamente spesse

**Il lavoro virtuale delle caratteristiche di sollecitazione lungo un tratto del contorno  $c$  vale**

$$L = \int_C (M_n \varphi_n + M_s \varphi_s + Q_n w) ds$$

**Per cui le caratteristiche della sollecitazione da assegnare sul contorno valgono**

**$Q_n$  taglio**

**$M_n$  momento flettente di asse  $n$**

**$M_s$  momento flettente di asse tangenziale**