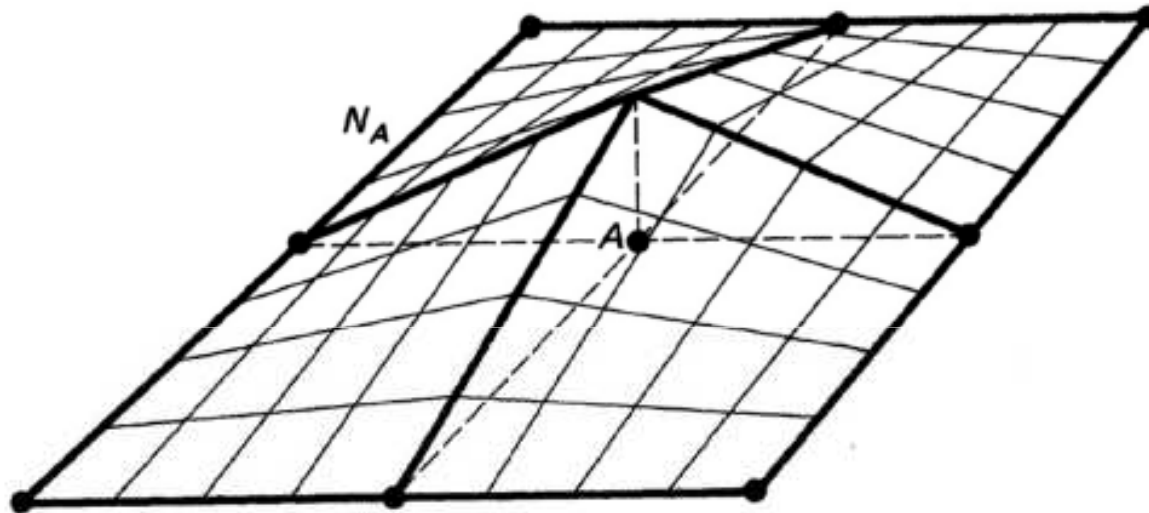


Elementi finiti piani

<https://www.stru.polimi.it/home/pandolfi/Corsi/elementipiani.pdf>



- **Definizione degli elementi finiti piani classici**
 - Elementi isoparametrici piani a 4 nodi
 - Elementi isoparametrici piani a 3 nodi
 - Elementi isoparametrici piani di ordine superiore (a 8 o a 6 nodi)

Elementi finiti piani

- Nella definizione delle funzioni di forma si segue il principio che, **all'aumentare del grado di raffinamento della mesh, la soluzione di Galerkin converga alla soluzione esatta.**
- Le seguenti condizioni sulle funzioni di forma sono sufficienti affinché ciò accada:
 1. devono essere **regolari** (almeno C^1) all'interno dell'elemento;
 2. devono essere **continue** (C^0) **attraverso il contorno** degli elementi;
 3. devono essere **complete**.
- Si possono costruire elementi finiti convergenti anche se le funzioni di forma non rispettano tali condizioni.

Continuità e Regolarità

- Le prime due condizioni garantiscono che le derivate prime delle funzioni di forma abbiano, nella situazione peggiore, un salto finito nelle interfacce tra gli elementi. Quindi, **tutti gli integrali sono ben definiti** all'interno dell'elemento (dato che in essi appaiono al più le derivate prime delle funzioni di forma).
- Elementi finiti che soddisfano le prime due condizioni sono spesso chiamati **elementi- C^0** .
- Per gli **elementi strutturali** (la cui cinematica è definita in base a teorie di comportamento strutturale, come **travi, piastre e gusci**) è richiesta in genere una **continuità di ordine superiore**, in quanto le equazioni che governano l'equilibrio contengono derivate di grado superiore al primo.
- Nel caso in cui gli integrali della matrice di rigidità includano derivate di ordine m , la prima condizione deve implicare **continuità fino a C^m** . Gli elementi finiti che rispettano questa condizione vengono detti **conformi**.

Completezza

Le funzioni di interpolazione (che sono combinazioni lineari delle funzioni di forma) di un elemento si dicono complete se, esprimendo i gradi di libertà

- nodali come una combinazione lineare delle coordinate del nodo, le funzioni di interpolazione sono in grado di rappresentare in modo esatto tale polinomio.

$$u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^n N_a d_{i a}^e$$

$$d_{i a}^e = c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e + c_3 z_a^e \implies u_i^h(\mathbf{x}) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

- Questa condizione si traduce nel fatto che ogni singolo elemento è in grado di **riprodurre i moti rigidi di traslazione e di rotazione e gli stati a deformazione costante**. Spesso per completezza si intende proprio la capacità di rappresentare moti rigidi e deformazioni costanti.
- Per elementi strutturali, nei cui integrali appaiono derivate di ordine m , la condizione di completezza si estende fino ai polinomi di ordine m .

Elementi triangolari piani

- Elemento finito introduttivo per i problemi piani.
- Nei triangoli possono essere definite funzioni di forma speciali, basate sul concetto di coordinate d'area. Si definisce dapprima l'**elemento parente**, un **triangolo rettangolo isoscele**, caratterizzato da due coordinate r ed s lungo i due lati ortogonali. Si introduce una terza coordinata t , non indipendente, definita come:

$$t = 1 - r - s$$

- Le funzioni di forma sono date dalle tre coordinate:

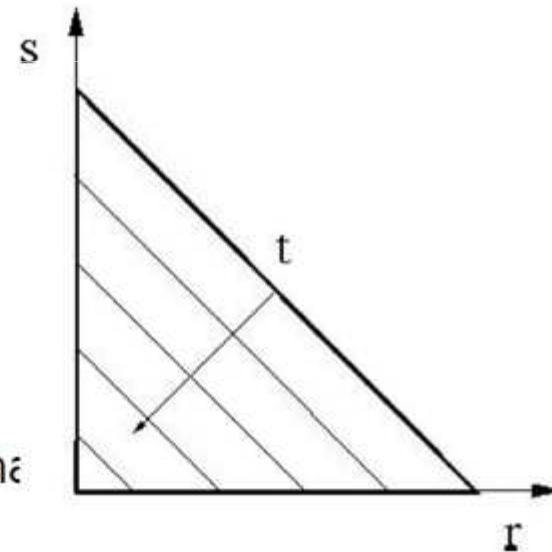
$$N_1(r, s, t) = r$$

$$N_2(r, s, t) = s$$

$$N_3(r, s, t) = t = 1 - r - s$$

- raccolte nella matrice delle funzioni di forma

$$\mathbf{N} = [N_a] = [N_1 \ N_2 \ N_3]$$

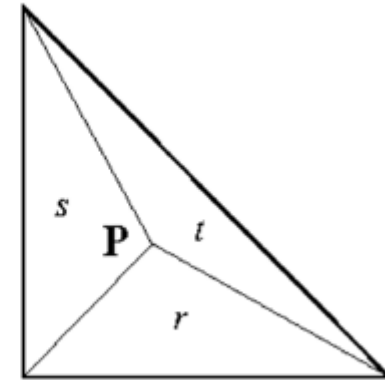


Coordinate d'area

- Nel caso di elementi triangolari, le tre coordinate r , s , e t di un punto P rappresentano le 3 aree adimensionali in cui il triangolo e' suddiviso dalle rette che uniscono il punto con i vertici.
- Si osserva che l'area del triangolo A e' data da:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = rA + sA + tA$$

$$2A = b_1a_2 - b_2a_1 \quad a_i = x_k - x_j \quad b_i = y_j - y_k$$



- La trasformazione dal riferimento parente a quello reale e' data da:

$$x^e = r x_1^e + s x_2^e + (1-r-s) x_3^e \quad y^e = r y_1^e + s y_2^e + (1-r-s) y_3^e$$

- Pur essendo la coordinata t ridondante, conviene usare sempre le 3 coordinate nel calcolo delle grandezze relative agli elementi triangolari.

- Lo Jacobiano vale: $J = 2A = \det \left[\frac{\partial \mathbf{x}^e}{\partial \mathbf{r}} \right]$

Derivate delle funzioni di forma

- Le funzioni inverse si calcolano come:

$$r = \frac{1}{2A}(2A_1^0 + b_1 x^e + a_1 y^e) \quad 2A_i^0 = x_j y_k - x_k y_j$$

$$s = \frac{1}{2A}(2A_2^0 + b_2 x^e + a_2 y^e) \quad 2A_3^0 = -2A_1^0 - 2A_2^0$$

$$t = \frac{1}{2A}(2A_3^0 + b_3 x^e + a_3 y^e) \quad a_3 = -a_1 - a_2 \quad b_3 = -b_1 - b_2$$

- Nell'eseguire la derivazione di una funzione, si deve applicare la regola di derivazione a catena:

$$\frac{\partial f(r, s, t)}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left(b_1 \frac{\partial f(r, s, t)}{\partial r} + b_2 \frac{\partial f(r, s, t)}{\partial s} + b_3 \frac{\partial f(r, s, t)}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial f(r, s, t)}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left(a_1 \frac{\partial f(r, s, t)}{\partial r} + a_2 \frac{\partial f(r, s, t)}{\partial s} + a_3 \frac{\partial f(r, s, t)}{\partial t} \right)$$

Derivate delle Funzioni di Forma e Matrice B

- In particolare, nel calcolo delle derivate delle funzioni di forma per problemi 2D, si osserva che queste sono costanti e si possono esprimere in forma esplicita:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{2A} = \frac{b_1}{2A}, \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{y_3 - y_1}{2A} = \frac{b_2}{2A}, \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{y_1 - y_2}{2A} = \frac{b_3}{2A}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{2A} = \frac{a_1}{2A}, \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{x_1 - x_3}{2A} = \frac{a_2}{2A}, \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{2A} = \frac{a_3}{2A}$$

- Di solito le derivate delle funzioni di forma vengono raccolte nella matrice di congruenza **B**, in un ordine che dipende dal problema che deve essere risolto.

Matrice di compatibilità **B**

- Per i problemi statici, dove le derivate sono usate per descrivere le deformazioni, la matrice **B** risulta (come si vedrà più avanti):

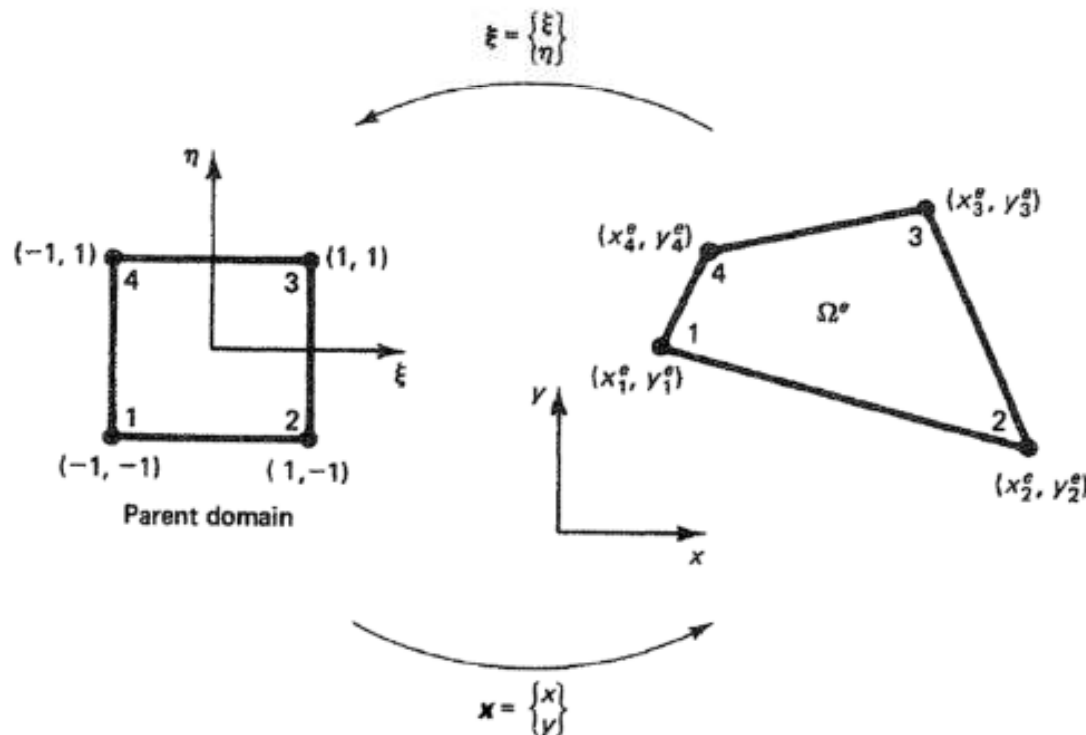
$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

Elemento quadrilatero bilineare

- Elemento piano a 4 lati rettilinei, definito da 4 nodi, situati nei vertici, numerati in verso antiorario, di coordinate

$$\mathbf{x}_a^e, \quad a = 1, 2, 3, 4$$

- L'elemento biunitario e' chiamato **elemento parente**. Le coordinate ξ sono chiamate **coordinate naturali**. Le coordinate reali \mathbf{x} e quelle naturali sono legate tra loro dalla stessa **trasformazione lineare** (mapping) vista per gli elementi monodimensionali.



$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}$$

$$x(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_a^e$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) y_a^e$$

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^4 N_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_a^e$$

Costruzione delle funzioni di forma

- Le funzioni di forma vengono costruite partendo da una **funzione di interpolazione "bilineare" delle coordinate** vere sull'elemento:

$$x(\xi, \eta) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_a^e$$

- dove le α_i sono costanti da determinare imponendo che **la funzione (espressione a destra) interpoli i quattro dati nodali** (le coordinate dei nodi nell'elemento parente sono in tabella):

$$x(\xi_a, \eta_a) = x_a^e$$

- Le condizioni sono equivalenti al sistema lineare in α_i :

$$\begin{Bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

a	ξ_a	η_a
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

Costruzione delle funzioni di forma

- La soluzione del sistema, confrontata con il membro di destra della funzione di partenza, fornisce l'espressione delle funzioni di forma:

$$N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a\xi)(1 + \eta_a\eta)$$

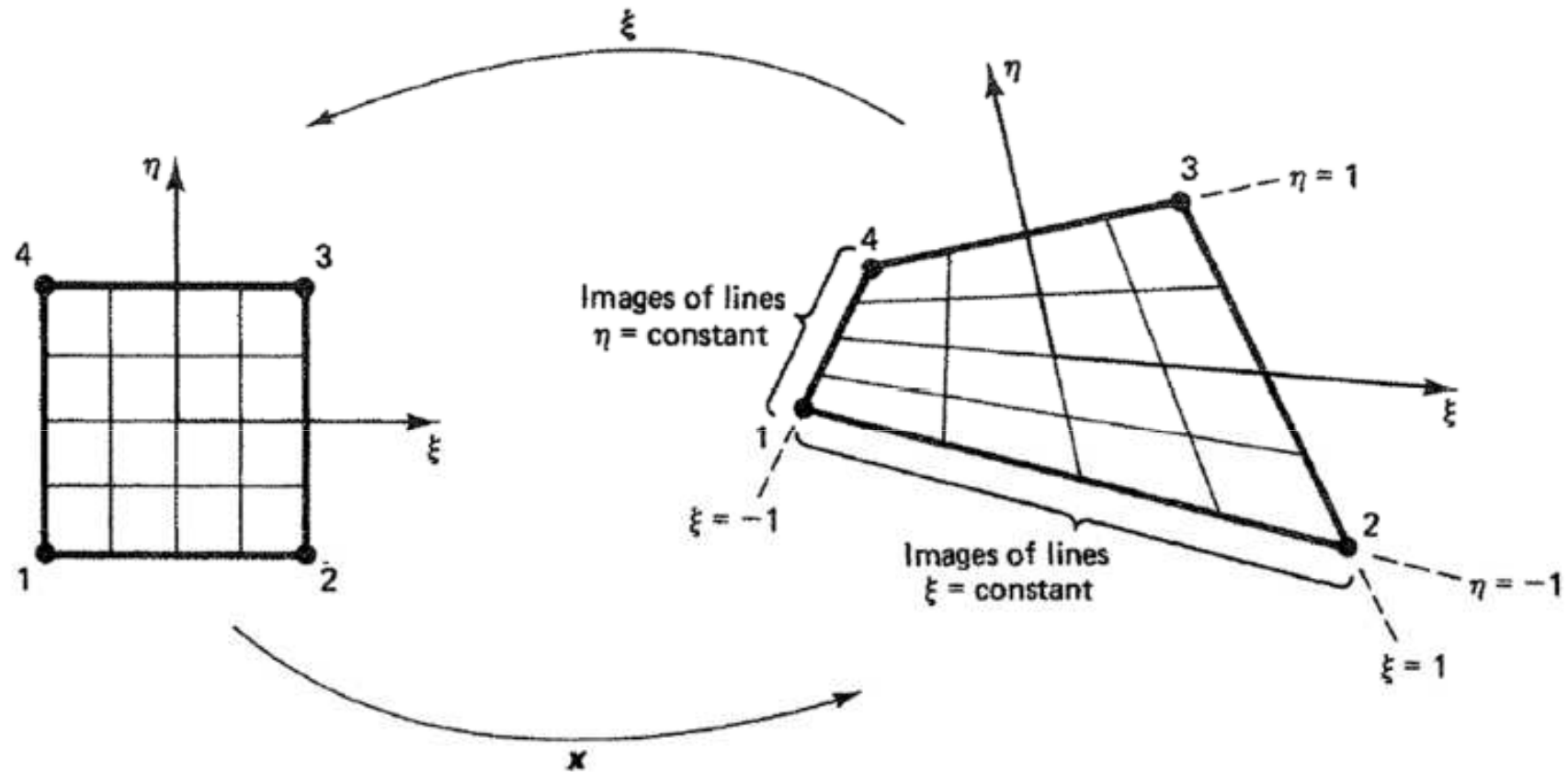
- Esse sono la generalizzazione al caso 2D di quelle già viste per gli elementi monodimensionali.
- Si ripete lo stesso procedimento per la coordinata y , partendo da:

$$y(\xi, \eta) = \beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\xi\eta = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) y_a^e$$

- Si ottengono le medesime funzioni di forma.
- Si osserva che per le funzioni di forma vale la seguente condizione (detta **proprietà di interpolazione**):

$$N_a(\xi_b) = \delta_{ab}$$

Superfici rigate



- Per gli elementi bilineari, **le linee coordinate (a ξ o η costante) sono delle rette.**
- Le funzioni di interpolazione sono funzioni "quadriche" delle coordinate naturali.

Elementi isoparametrici

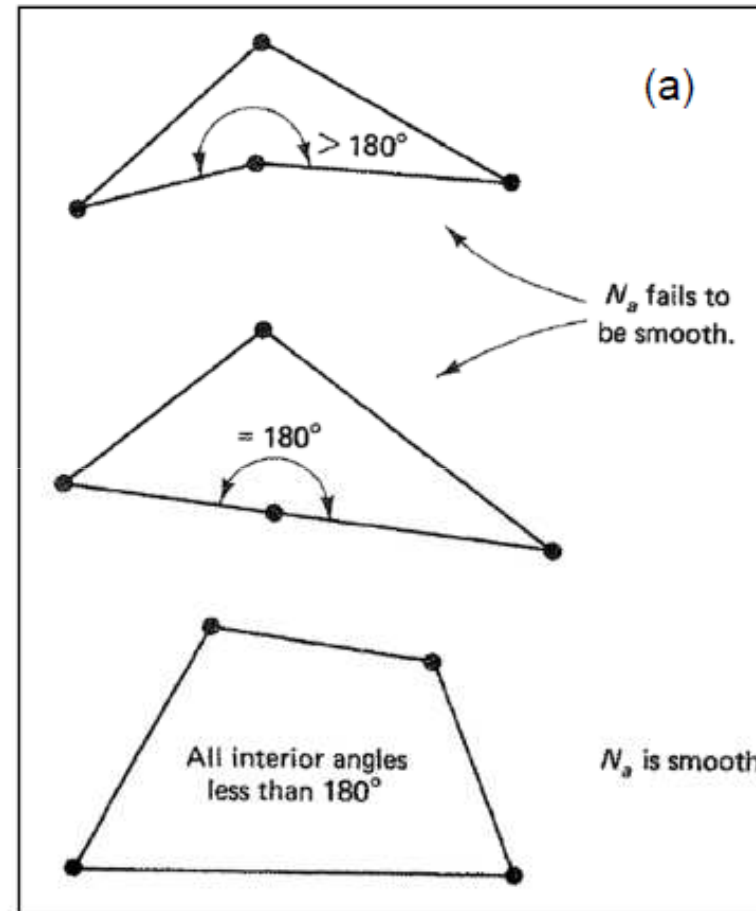
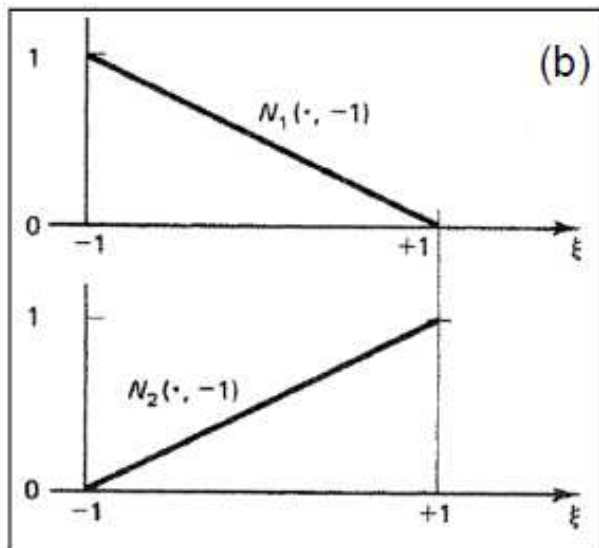
- Costruite le funzioni di interpolazione delle coordinate, si assume che **le funzioni di interpolazione della funzione incognita** (temperatura o spostamenti) abbiano la **stessa espressione delle funzioni di interpolazione delle coordinate** [Taig, 1961 ed Irons, 1966].
- Elementi finiti così costruiti sono detti **isoparametrici**.

- Per l'elastostatica, le funzioni di interpolazione degli spostamenti sono:

$$u_i^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^4 N_a(\boldsymbol{\xi}) d_{i a}^e$$

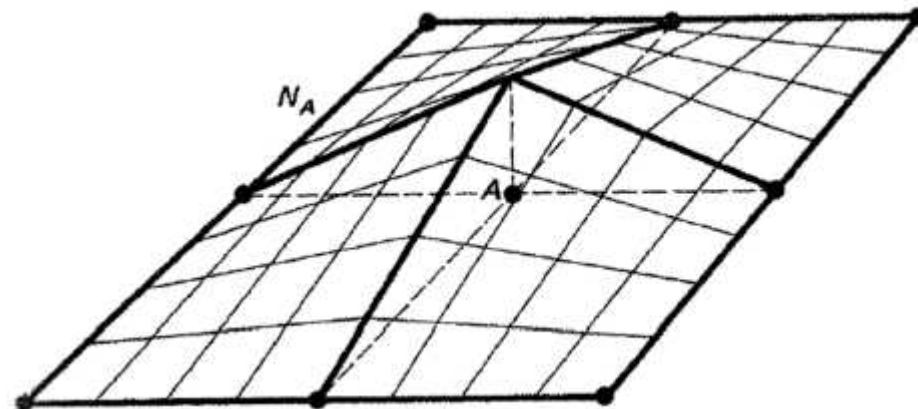
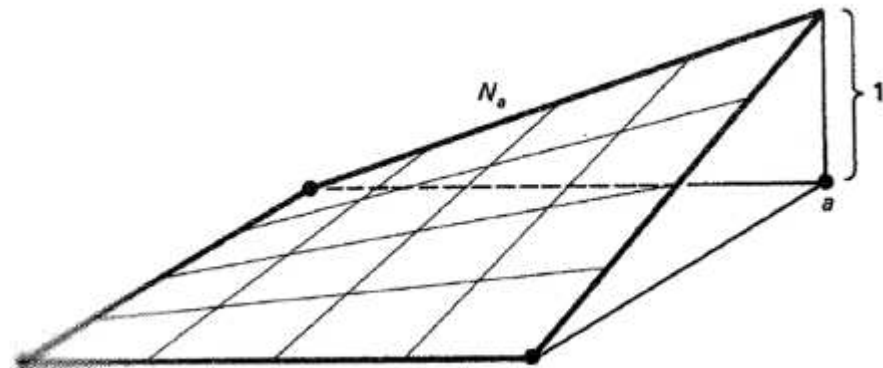
Regolarità

- Le funzioni di forma degli elementi bilineari sono sicuramente regolari, nell'ipotesi che i quattro angoli interni formati dai lati siano inferiori a 180° (a).
- Sui 4 contorni dell'elemento (ad esempio sul lato tra i nodi 1 e 2) le funzioni di forma variano linearmente (b).



Continuità attraverso il contorno

- Ne segue che all'interno dell'elemento esse hanno l'aspetto a tenda (paraboloide iperbolico).
- La linearità delle funzioni di forma garantisce la continuità delle funzioni di interpolazioni globali relative al nodo a .
- Inoltre, il comportamento della funzione di interpolazione lungo il lato di un elemento dipende solo dai valori dei due nodi all'estremità.



Completezza

- Partendo dalla funzione di interpolazione, si esprime ogni grado di liberta' nodale come combinazione lineare delle coordinate del nodo stesso:

$$\begin{aligned}u^h &= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a d_a^e \\&= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a (c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e) \\&= \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a \right) c_0 + \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a x_a^e \right) c_1 + \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a y_a^e \right) c_2 \\&= c_0 + x(\xi, \eta) c_1 + y(\xi, \eta) c_2\end{aligned}$$

- Si verifica che **la somma delle funzioni di forma dell'elemento e' uguale a 1**:

$$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) = 1$$

Elementi isoparametrici

- Un elemento è detto **isoparametrico** se la trasformazione dall'elemento parente all'elemento reale è descritta da:

$$\mathbf{x}^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^4 N_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_a^e$$

- E le funzioni di interpolazione sono descritte dalla stessa espressione:

$$\mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^4 N_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_a^e$$

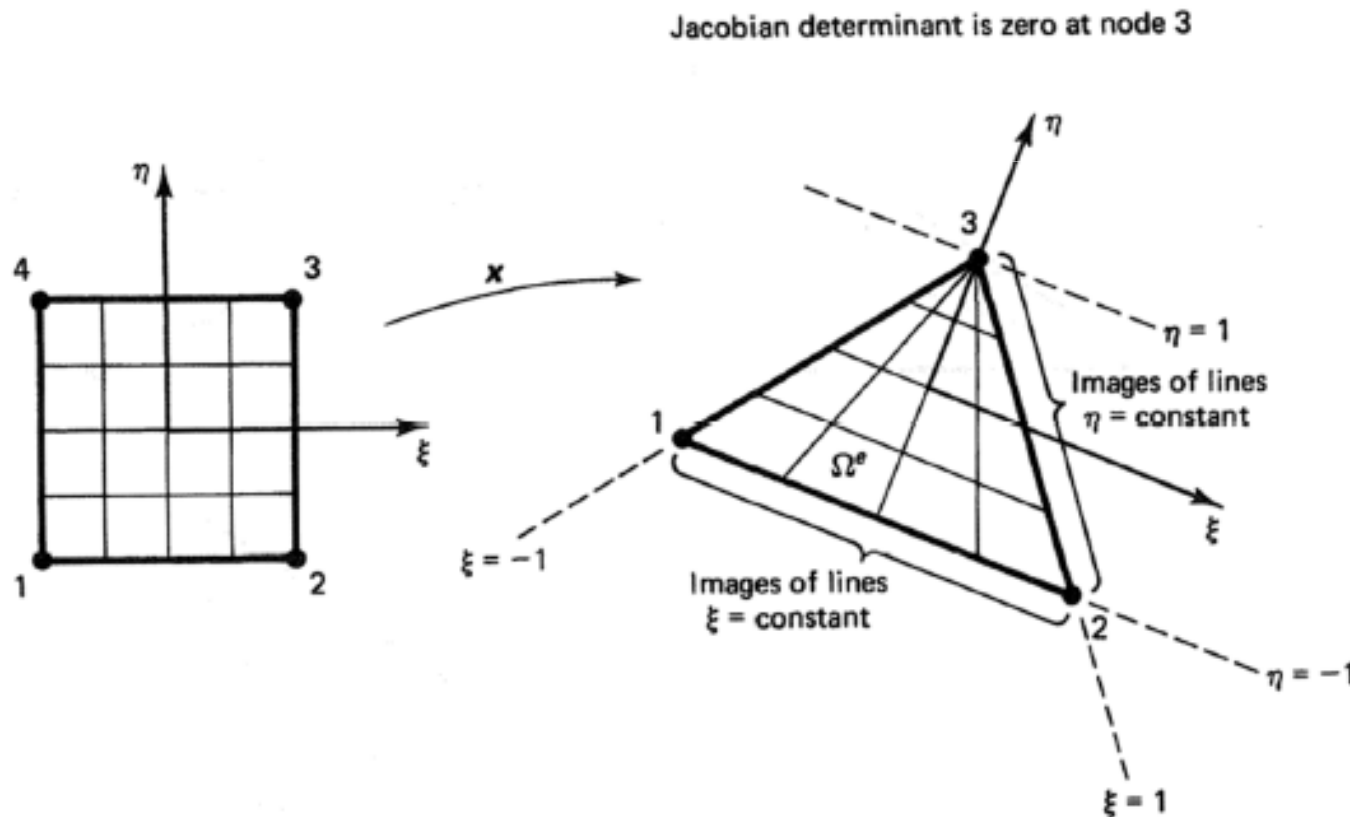
- La trasformazione è detta **biunivoca** (one-to-one) se due punti distinti non vengono mappati nel medesimo punto.
- La trasformazione è detta **suriettiva** (onto) se ogni punto dell'elemento reale è l'immagine di un punto dell'elemento parente.
- La trasformazione è detta C^k se è continua con tutte le derivate fino all'ordine k .

Convergenza degli elementi isoparametrici

- Se la trasformazione è differenziabile, il determinante J della derivata della trasformazione è detto determinante Jacobiano.
- Si dimostra che se la trasformazione è **biunivoca, suriettiva, di ordine C^k e il determinante jacobiano $J > 0$** , allora la trasformazione è **invertibile**.
- L'invertibilità è un requisito in generale sempre soddisfatto dagli elementi finiti classici, con un'eccezione, legata ai cosiddetti **elementi degeneri**, per i quali il determinante J va a zero in un punto del dominio parente.
- In genere (anche nel caso di elementi degeneri) il determinante J viene calcolato in punti regolari. Anzi, **la condizione di non positività del determinante viene considerata come un errore di input** (elementi distorti o nodi scambiati).
- Se la **somma delle funzioni di forma è uguale ad 1**, la condizione di **completezza** per gli elementi isoparametrici è **soddisfatta**.
- L'unica condizione che può procurare problemi con gli isoparametrici è la **continuità attraverso i contorni**: questa va verificata a posteriori.

Elemento triangolare lineare

- Uno dei primi elementi finiti sviluppati [Courant, 1943 e Turner et al., 1956] e' l'elemento triangolare lineare, spesso noto come elemento a deformazione costante (CST) nella letteratura meccanica.
- Puo' essere ottenuto per degenerazione dell'elemento bilineare a 4 nodi facendo coincidere il 3 e il 4 nodo.



Elemento triangolare lineare: funzioni di forma

- Si assume che il nodo 3 coincida con il nodo 4 e si ridefiniscono le funzioni di forma come:

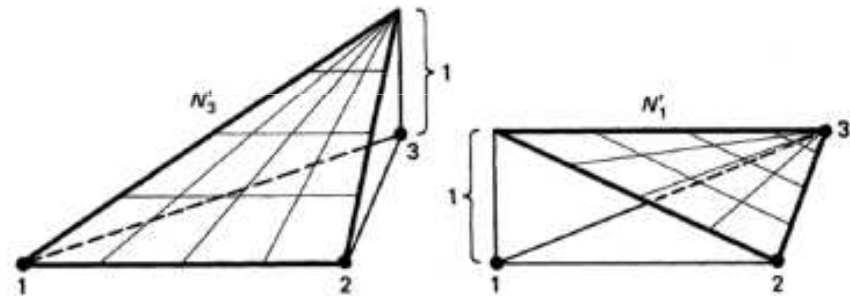
$$\mathbf{x} = \sum_{a=1}^4 N_a \mathbf{x}_a = N_1 \mathbf{x}_1^e + N_2 \mathbf{x}_2^e + (N_3 + N_4) \mathbf{x}_3^e = \sum_{a=1}^3 N'_a \mathbf{x}_a^e$$

- Le nuove funzioni sono **piani** (vedi figure):

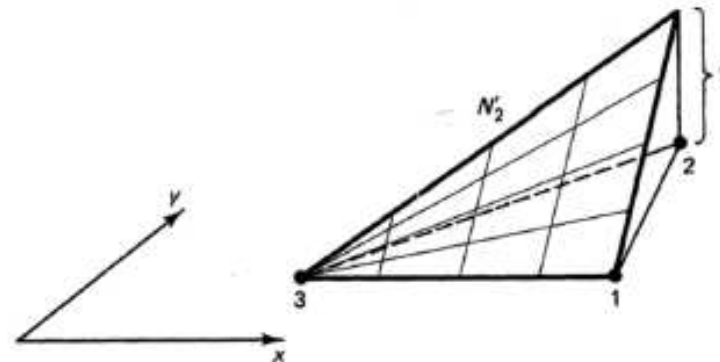
$$N'_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N'_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N'_3 = \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

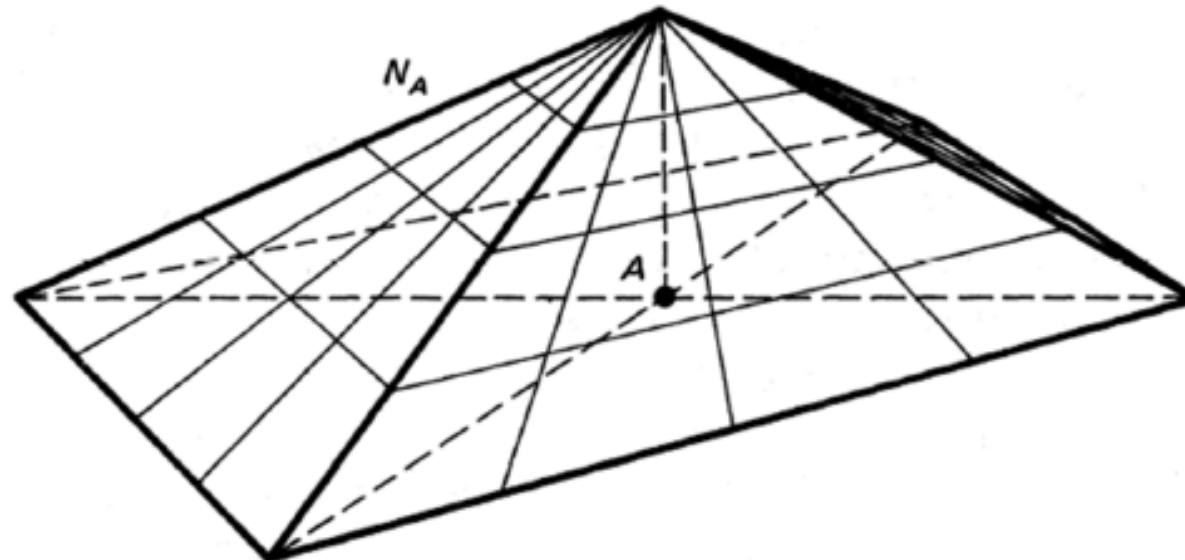


- In questo caso, la **mappa non e' biunivoca** (due nodi finiscono nello stesso punto) e lo **Jacobiano e' nullo** nel punto x_3 .



Elemento triangolare lineare: funzioni di forma

- La linearità delle funzioni di forma garantisce la continuità delle funzioni di interpolazione attraverso i contorni.
- La funzione di forma riferita a un nodo è chiamata **piramide**.
- La completezza dell'elemento è conseguenza della completezza dell'elemento bilineare di partenza.
- Una formulazione alternativa si basa sul concetto di coordinate d'area.



Elementi di ordine superiore

- Gli elementi visti finora erano stati ottenuti costruendo le funzioni di forma come prodotti di **polinomi monodimensionali lineari**.
- Si possono definire **elementi di ordine superiore**, in cui le funzioni di forma sono polinomi di ordine superiore al primo, che sono in grado di riprodurre con **maggiore accuratezza sia la forma del dominio originario, sia la funzione di soluzione**.
- A scapito della migliore prestazione, questi elementi sono generalmente **piu' costosi** da implementare e da calcolare. La scelta sull'uso di un elemento piuttosto che un altro e' dettata dal problema alla mano.
- Un modo sistematico di ottenere elementi finiti di ordine superiore consiste nell'uso dei **polinomi di Lagrange**.
- Una volta imparato il meccanismo, e' possibile costruire elementi di qualsiasi ordine.

Polinomi di Lagrange

- Dati n_{en} punti, i polinomi di Lagrange sono definiti come il **prodotto di polinomi lineari** nella forma:

$$L_a^{n_{en}-1}(\xi) = \frac{\prod_{b \neq a}^{n_{en}} (\xi - \xi_b)}{\prod_{b \neq a}^{n_{en}} (\xi_a - \xi_b)}$$

$$L_a^{n_{en}-1}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{a-1}) (\xi - \xi_{a+1}) \dots (\xi - \xi_{n_{en}})}{(\xi_a - \xi_1) \dots (\xi_a - \xi_{a-1}) (\xi_a - \xi_{a+1}) \dots (\xi_a - \xi_{n_{en}})}$$

- E' facile verificare che i polinomi di Lagrange soddisfano la **proprietà di interpolazione**:

$$L_a^{n_{en}-1}(\xi_b) = \delta_{ab}$$

- Per costruire i cosiddetti **elementi Lagrangiani**, si identificano le n_{en} **funzioni di forma** con i polinomi:

$$N_a = L_a^{n_{en}-1}$$

- Per il caso di 2 nodi, questi forniscono le formule di interpolazione lineare precedentemente utilizzate.

Elementi piani a 8 nodi

- Sono gli elementi parabolici piu' versatili per l'analisi di problemi piani. Con riferimento alla figura, le funzioni di forma sono:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-1 - \xi - \eta)(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-1 + \xi - \eta)(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-1 + \xi + \eta)(1 + \xi)(1 + \eta)$$

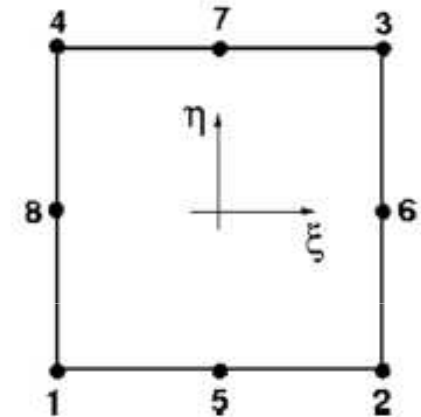
$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \eta)(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$$



- Si possono definire elementi con qualunque numero di nodi.

Elementi piani a 4 nodi e posizione dei relativi punti di Gauss

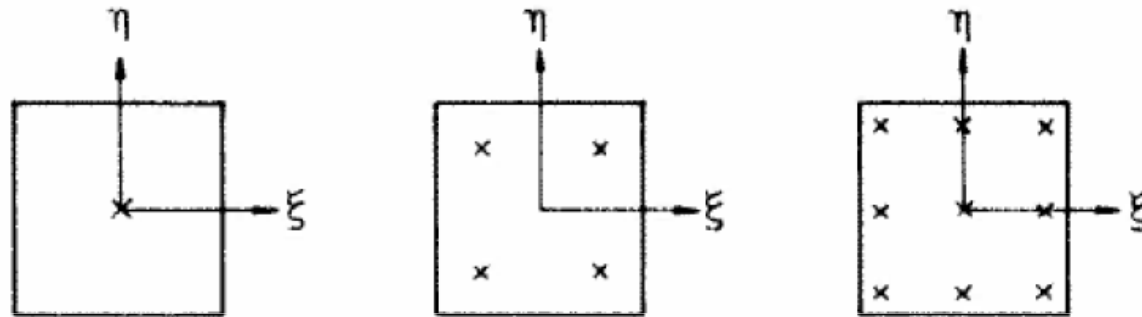


Figure 20.4 Locations of Gauss points for 1×1 , 2×2 and 3×3 point integration in parent domain