Applicazioni a problemi piani di deformazione

Problemi piani di deformazione (Leone Corradi III pag 59)
In molti casi non è facile determinare una soluzione sia staticamente che cinematicamente ammissibile

Ci si accontenta di delimitazioni bilaterali
Si consideri il caso di solidi idealmente plastici in stato di deformazione piana rispetto all'asse z
Si considerano i criteri di Huber –Hencky-von Mises e Tresca

Le velocità di deformazione plastiche si sviluppano a volume costante

Applicazioni a problemi piani di deformazione

Essendo stato piano di deformazione, il meccanismo plastico imporrà che la dissipazione avviene nel piano xy

$$\dot{\varepsilon}_{pz} = \dot{\gamma}_{pxz} = \dot{\gamma}_{pyz} = 0$$

La condizione di incompressibilità implica che

$$\dot{\varepsilon}_{px} + \dot{\varepsilon}_{py} = 0$$

Siano $\dot{p}_{I}, \dot{p}_{II}, \dot{p}_{III} = 0$ **le deformazioni plastiche**

principali e $s_{I}, s_{II}, s_{III} = \sigma_{z}$ **le tensioni principali**

Applicazioni a problemi piani di deformazione

Il criterio di HHvM implica che

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\mathbf{s}_{\mathrm{I}} - \mathbf{s}_{\mathrm{II}}\right)^2 + \left(\mathbf{s}_{\mathrm{II}} - \mathbf{s}_{\mathrm{III}}\right)^2 + \left(\mathbf{s}_{\mathrm{I}} - \mathbf{s}_{\mathrm{III}}\right)^2\right] - \sqrt{3}\tau_0 \leq 0$$

Poiché $$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{s}_{\mathrm{III}}} = 0$$

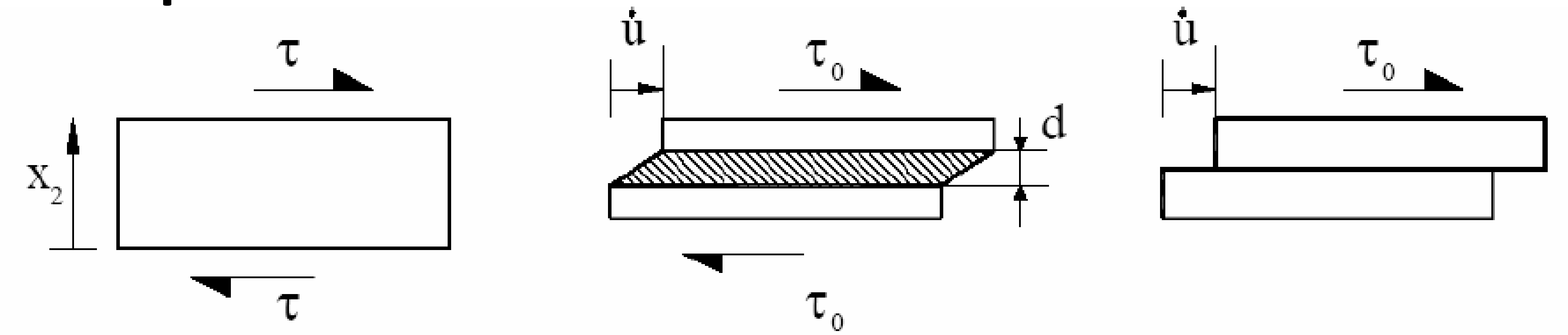
Si ha che $$\mathbf{s}_{\mathrm{III}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{s}_{\mathrm{I}} + \mathbf{s}_{\mathrm{II}}\right)$$

E dunque

$$\phi = \left|\mathbf{s}_{\mathrm{I}} - \mathbf{s}_{\mathrm{II}}\right| - 2\tau_0 \leq 0$$

problemi piano di deformazione

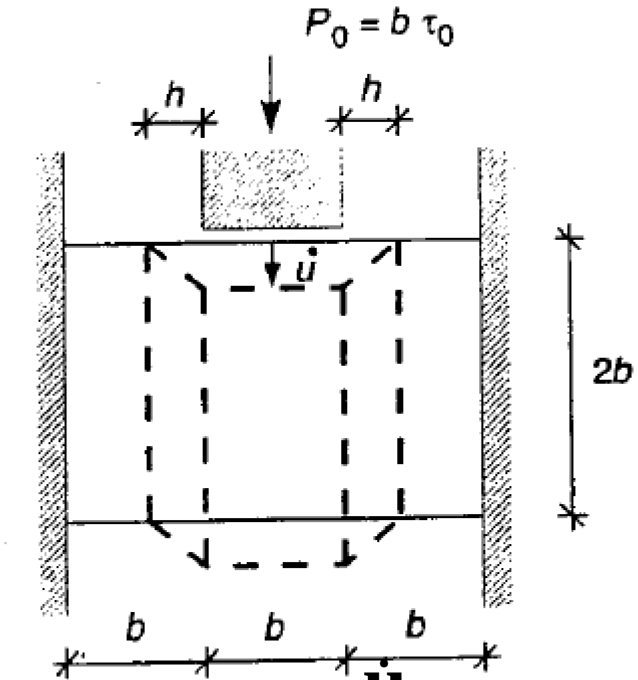
Esempio n. 1: Scorrimento di un blocco rigido
Si consideri lo scorrimento di due blocchi rigidi collegati da uno strato (sottile) di materiale rigido plastico, per cui è immediato ottenere una stima per eccesso μ_k del moltiplicatore di collasso.



$$D_{int} = \int_0^d \tau_0 \dot{\gamma} dx_2 = \tau_0 \int_0^d \dot{\gamma} dx_2 = \tau_0 \dot{u}$$ **Dissipazione**

Problema piano di deformazione: punzone

Sono ammesse soluzioni con discontinuità nel campo degli spostamenti: esempio punzone in figura
Un cinematismo possibile vede blocco centrale scorrere con velocità $\dot{u}$ mentre la deformazione plastica si concentra nele strisce adiacenti di larghezza h



Sia τ_0 il valore limite tensionale

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\gamma}_p = \frac{\dot{u}}{h}$$

Problema piano di deformazione: punzone

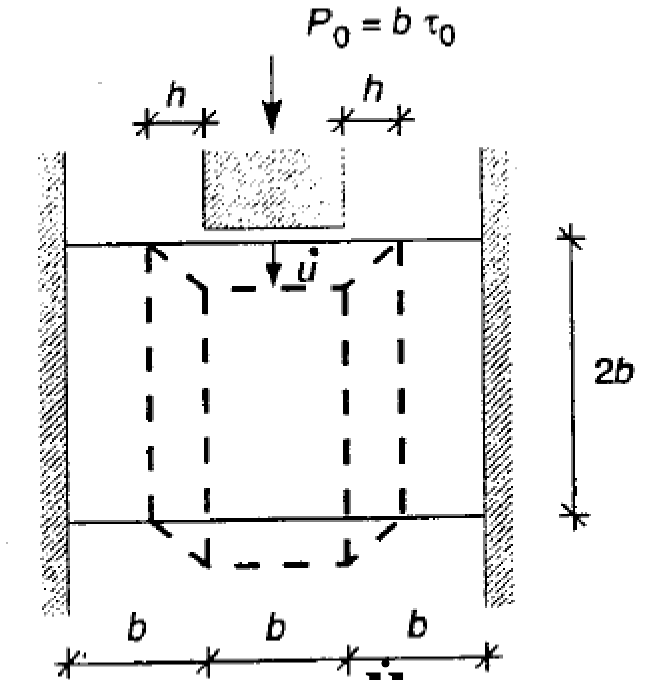
Dissipazione plastica
Oss: D non dipende da h

$$D = 2 \times 2bh\,\tau_0 \frac{\dot{u}}{h}$$

$$\mu_k = 4 \geq \mu_c$$

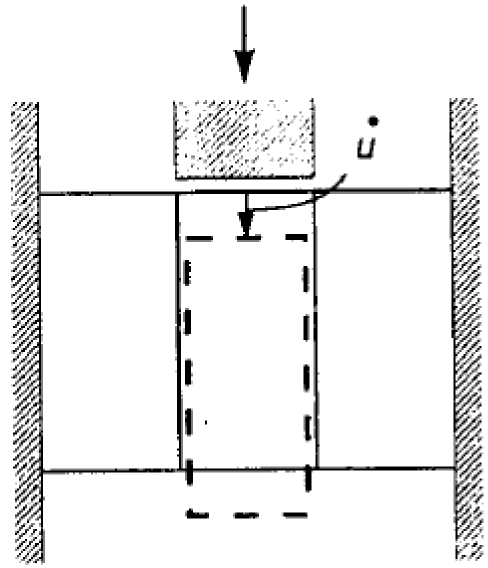
Potenza esterna

$$W_{ext} = P_0 \dot{u} = b\tau_0 \dot{u}$$

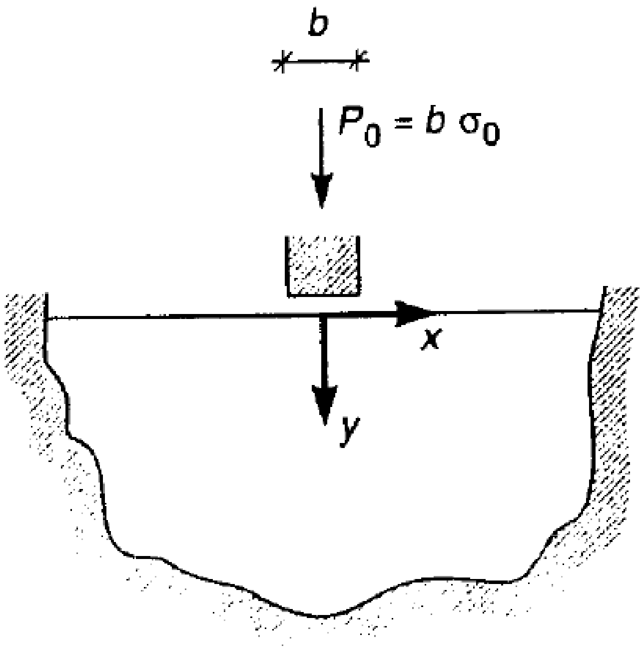


$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\gamma}_p = \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\mathbf{h}}$$

Situazione limite
h→0



Stato piano di deformazione: Indentazione di un semispazio



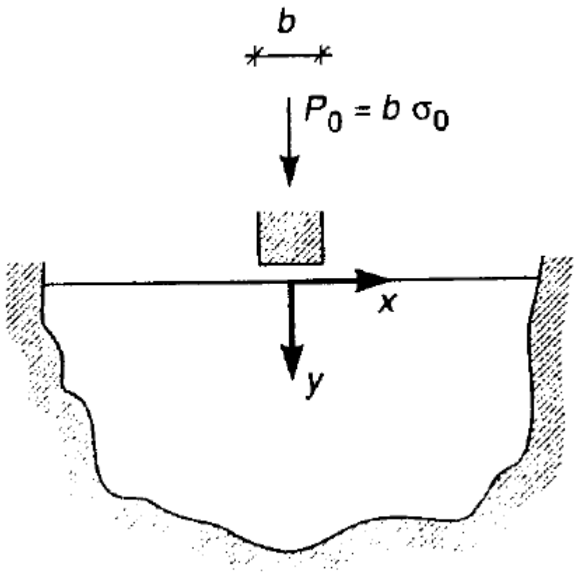
Solido ovunque rigidamente vincolato tranne sul bordo rettilineo . Su una porzione piccola di esso di ampiezza b agisce un punzone, che trasmette una forza per unità di spessore pari a $P = b\sigma_0$. Il punzone è liscio, trasmette solo forze normali
Si utilizza il criterio di Tresca per cui $\sigma_0 = 2\,\tau_0$

Stato piano di deformazione: Indentazione di un semispazio

Esempio n. 2: Indentazione di un semispazio(Prandtl 1920) o fondazione superficiale

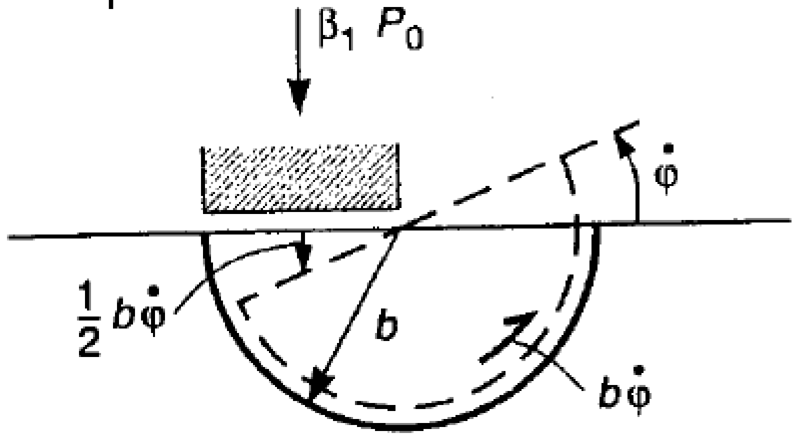
Vengono prima cercate soluzioni cinematicamente ammissibili.

Qualunque meccanismo comporta fuoriuscita di materiale dalla superficie libera del punzone



Stato piano di deformazione: fondazione superficiale

Esempio n. 2: Indentazione di un semispazio(Prandtl 1920) o fondazione superficiale
I Meccanismo: circoli di Bishop in Geotecnica
Blocco delimitato da una sup. circolare di raggio b ruota rigidamente con velocità $\dot{\varphi}$



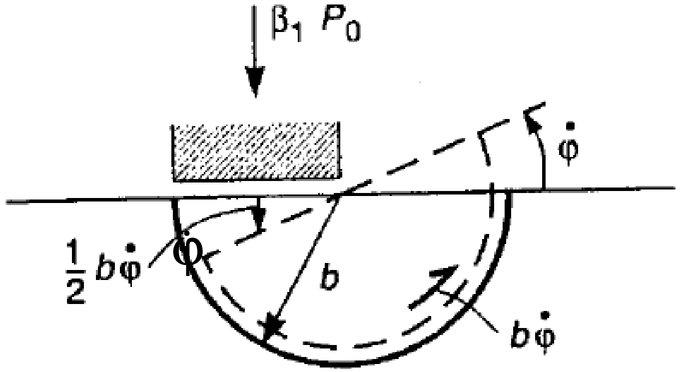
$$D_1 = \tau_0 \pi b (b\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\sigma_0 \pi b^2 \dot{\varphi}$$

Potenza dissipata sulla superficie di scivolamento

$$\dot{W}_{01} = P_0 \frac{b}{2}\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\sigma_0 b^2 \dot{\varphi}$$

Potenza dissipata dal carico

Stato piano di deformazione: fondazione superficiale



$$D_1 = \tau_0 \pi b (b\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \sigma_0 \pi b^2 \dot{\varphi}$$

Potenza dissipata sulla superficie di scivolamento

$$\dot{W}_{01} = P_0 \frac{b}{2} \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \sigma_0 b^2 \dot{\varphi}$$

Potenza dissipata dal carico

Moltiplicatore cinematico

$$\beta_1 = \pi = 3.142$$

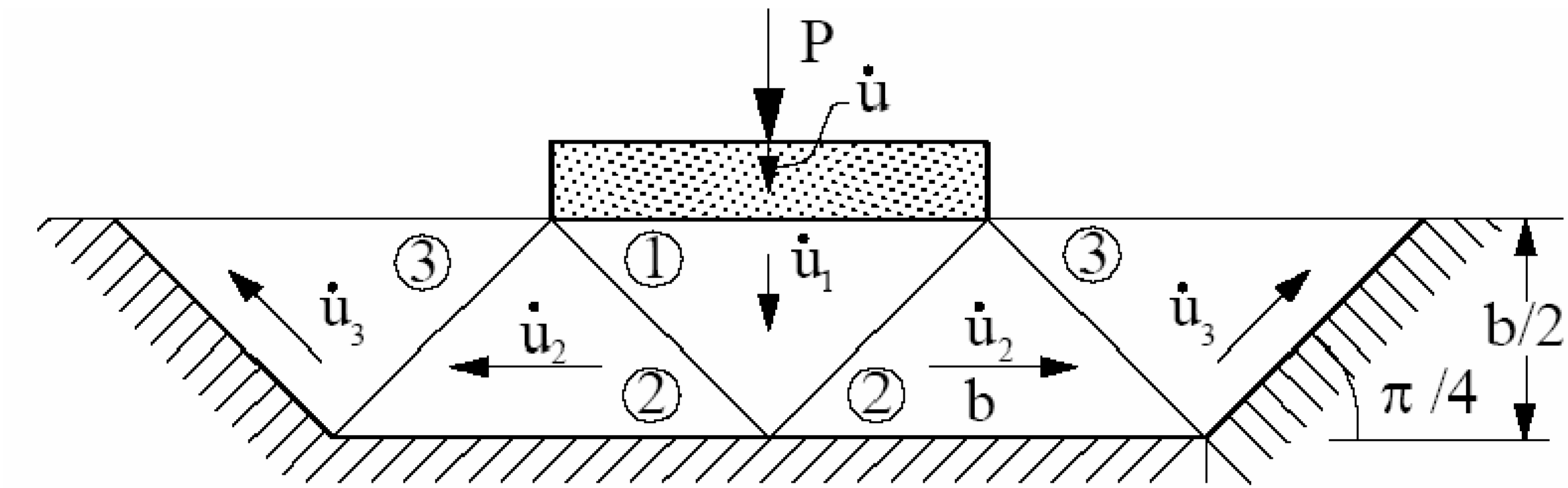
Stato piano di deformazione : fondazione superficiale

II Meccanismo

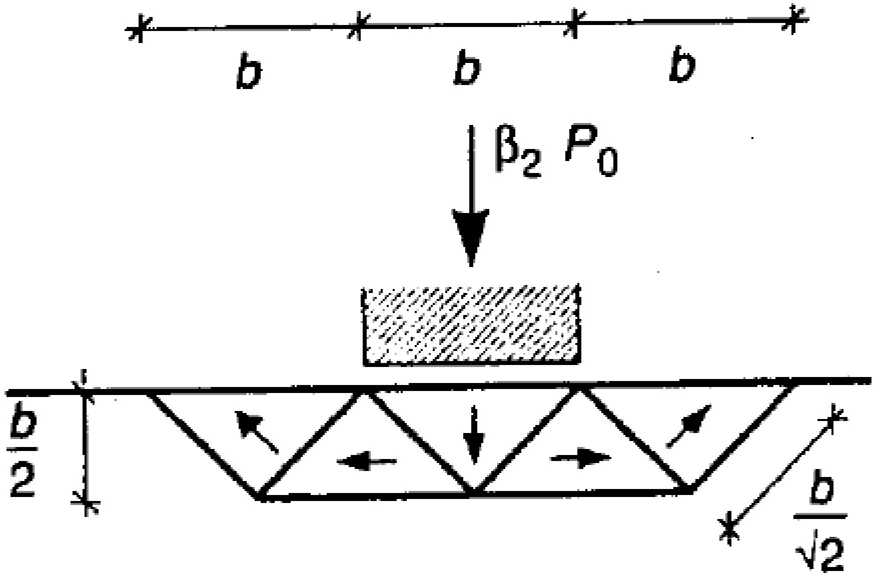
In figura è riportato un secondo meccanismo che presenta discontinuità delle velocità:

cinque blocchi rigidi a forma di triangolo isoscele che scorrono mutuamente

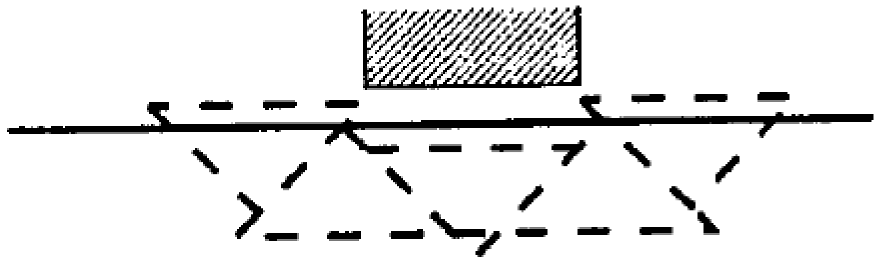
La velocità in direzione normale alle linee di scivolamento è continua mentre è discontinua la velocità in direzione tangenziale alla superficie di scivolamento

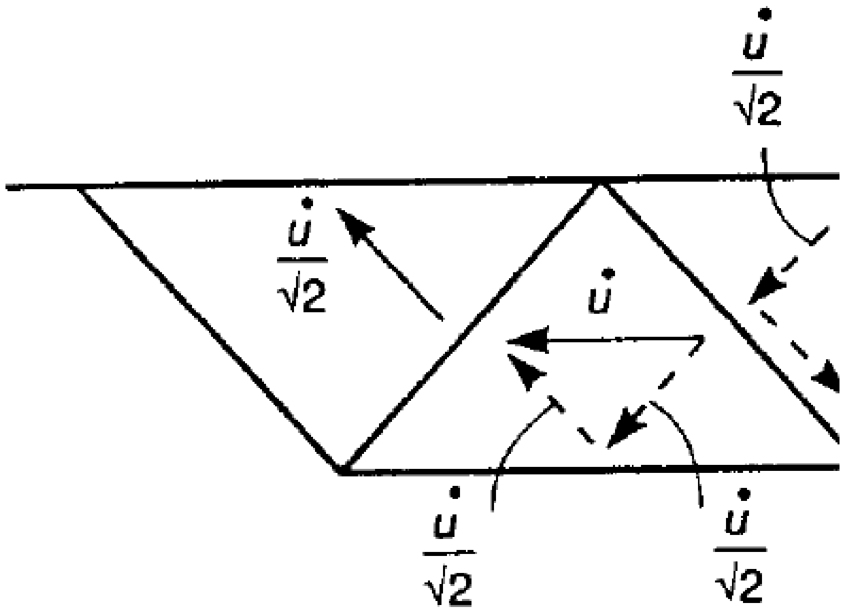


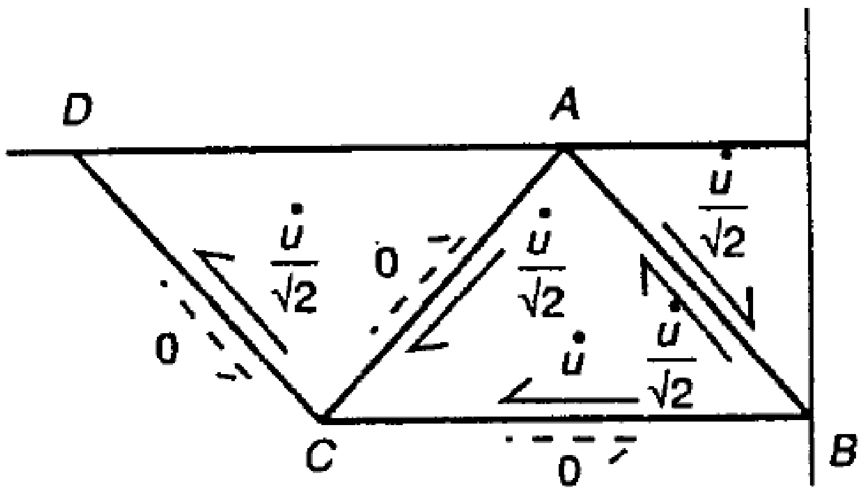
fondazione superficiale



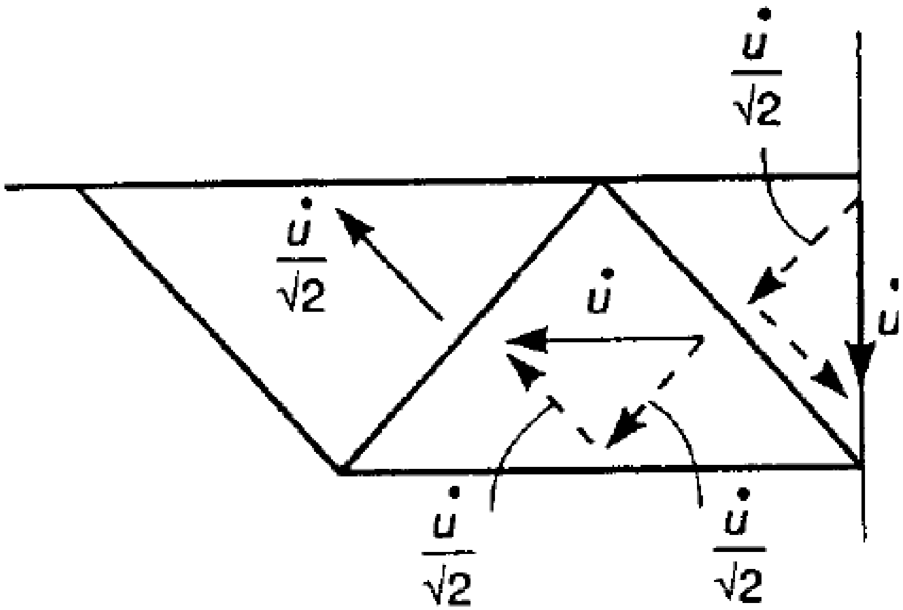
Leone Corradi III pag 67



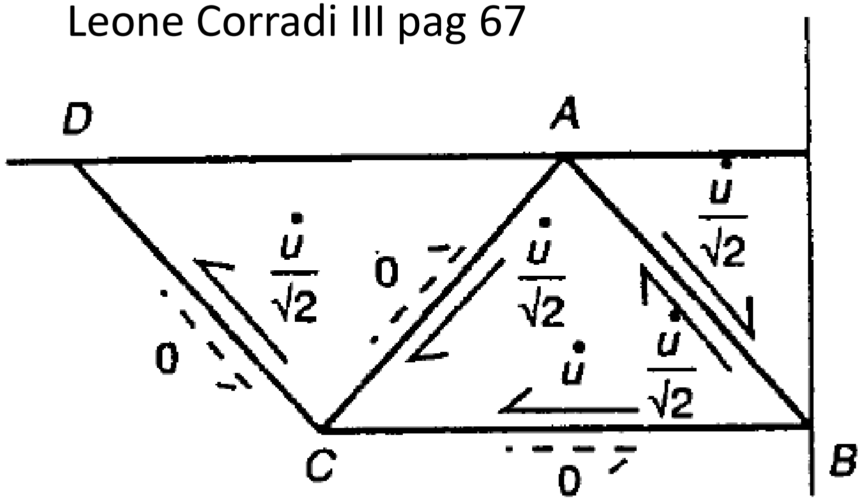




Fondazione superficiale



Leone Corradi III pag 67



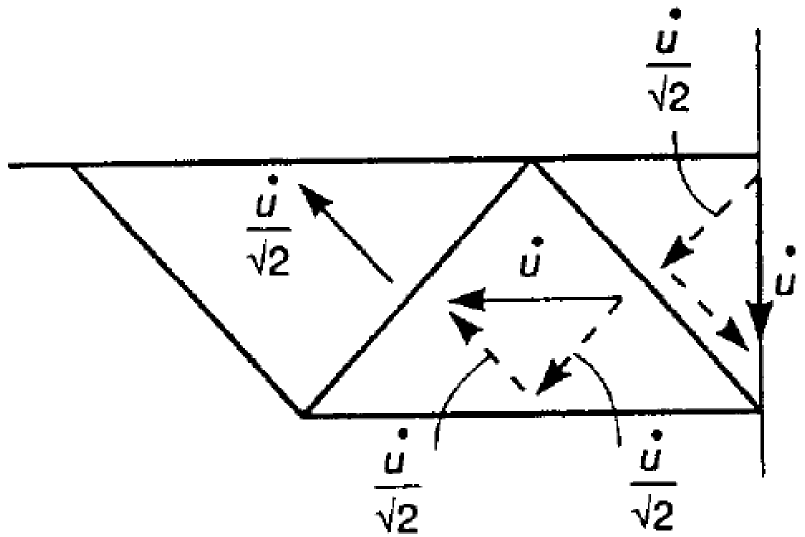
È possibile ricondurre gli atti di moto tra i blocchi alla velocità $\dot{u}$ del blocco centrale, inoltre il problema è simmetrico

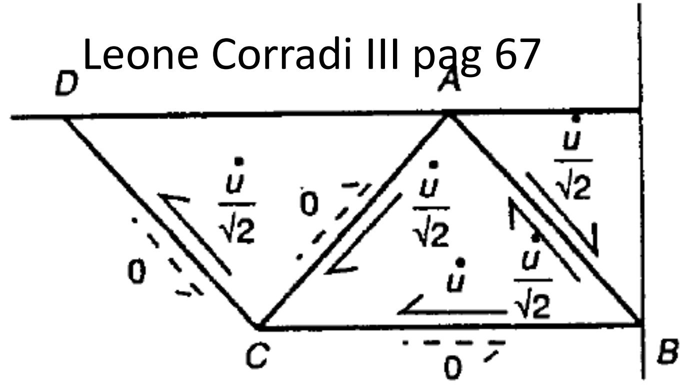
Lato AB $\left(\text{lunghezza } \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$: $\frac{\dot{u}}{\sqrt{2}} + \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\dot{u}$

Lato BC (lunghezza b): $\dot{u} + 0 = \dot{u}$

Lati AC e CD $\left(\text{lunghezza } \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$: $\frac{\dot{u}}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}}$

Fondazione superficiale





La potenza dissipata per unità di spessore sulle superfici di scorrimento è

$$D_2 = 2\tau_0\left(\sqrt{2}\dot{u}\,\frac{b}{\sqrt{2}} + \dot{u}b + 2\,\frac{\dot{u}}{\sqrt{2}}\,\frac{b}{\sqrt{2}}\right) = 3\sigma_0 b\dot{u}$$

La potenza dissipata dal carico esterno è $\dot{W}_{02} = P_0\dot{u} = \sigma_0 b\dot{u}$

Il moltiplicatore di questo cinematismo è

$$\beta_2 = 3.0$$

Fondazione superficiale

La soluzione può essere migliorata cambiando la forma dei blocchi, per esempio prendendo triangoli equilateri si ottiene un nuovo cinematismo che comporta un moltiplicatore cinematico

$$\beta_3 = 2.890$$

Fondazione superficiale

Si vuole ora determinare una soluzione staticamente ammissibile

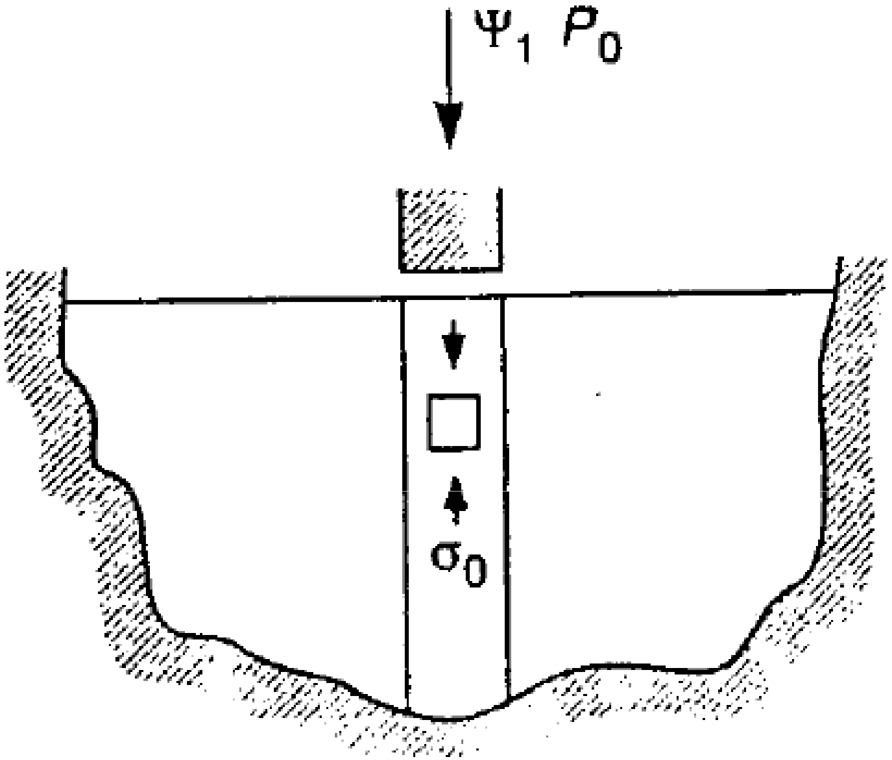
Si assume che il carico sia sostenuto unicamente da una colonna compressa sottostante il blocco come in figura

È una soluzione discontinua ma equilibrata

La condizione limite viene raggiunta con $|\sigma| = \sigma_0$

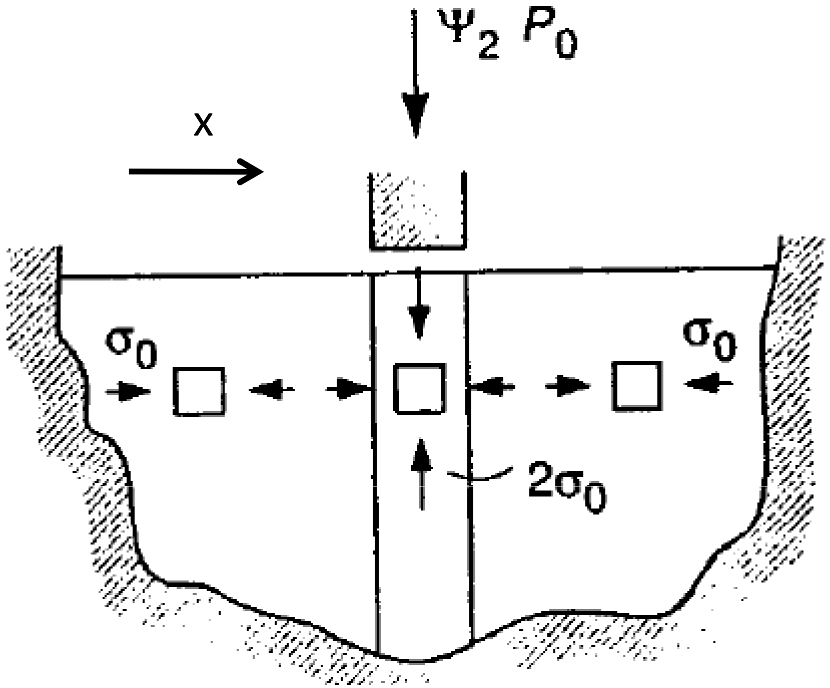
Il moltiplicatore è

$\psi_1 = 1$



Fondazione superficiale

La soluzione può essere migliorata se si considera che i vincoli consentono compressione σ_x in direzione x con $|\sigma_x| <= \sigma_0$



La condizione di snervamento

$$\phi = |\sigma_1 - \sigma_2| - \sigma_0 \le 0$$

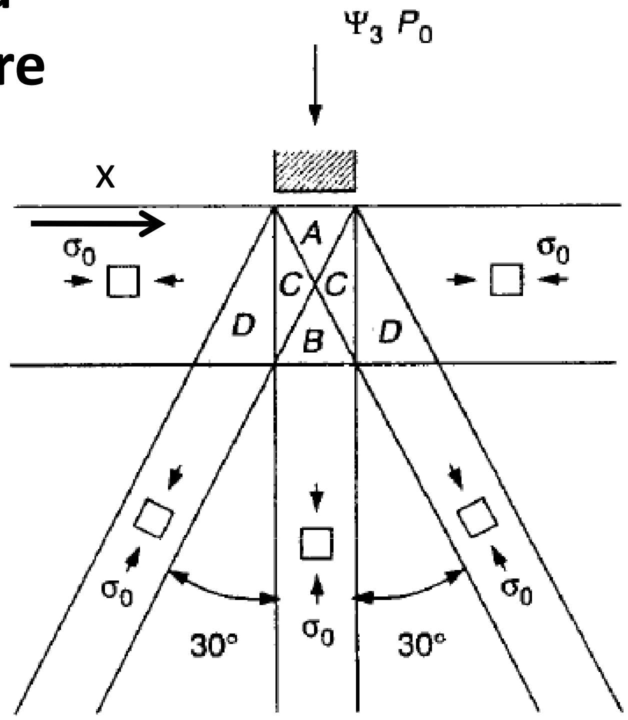
Implica che la condizione limite si raggiunge per $|\sigma_Y| = 2\sigma_0$

Il moltiplicatore è
$\psi_2 = 2$
Che rispetto a prima è cresciuto

Fondazione superficiale

Si dimostra che il cinemnatismo in figura consente di massimizzare il moltiplicatore statico

ψ_3**= 2.5**

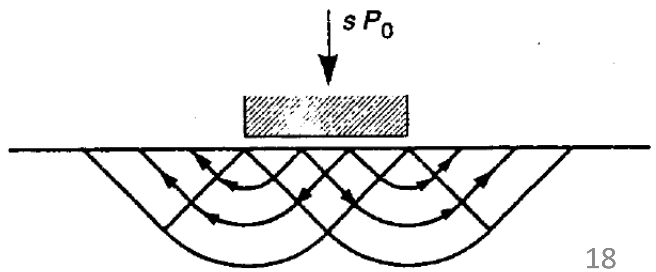


Si è quindi determinato il seguente intervallo di delimitazione per il moltiplicatore di collasso

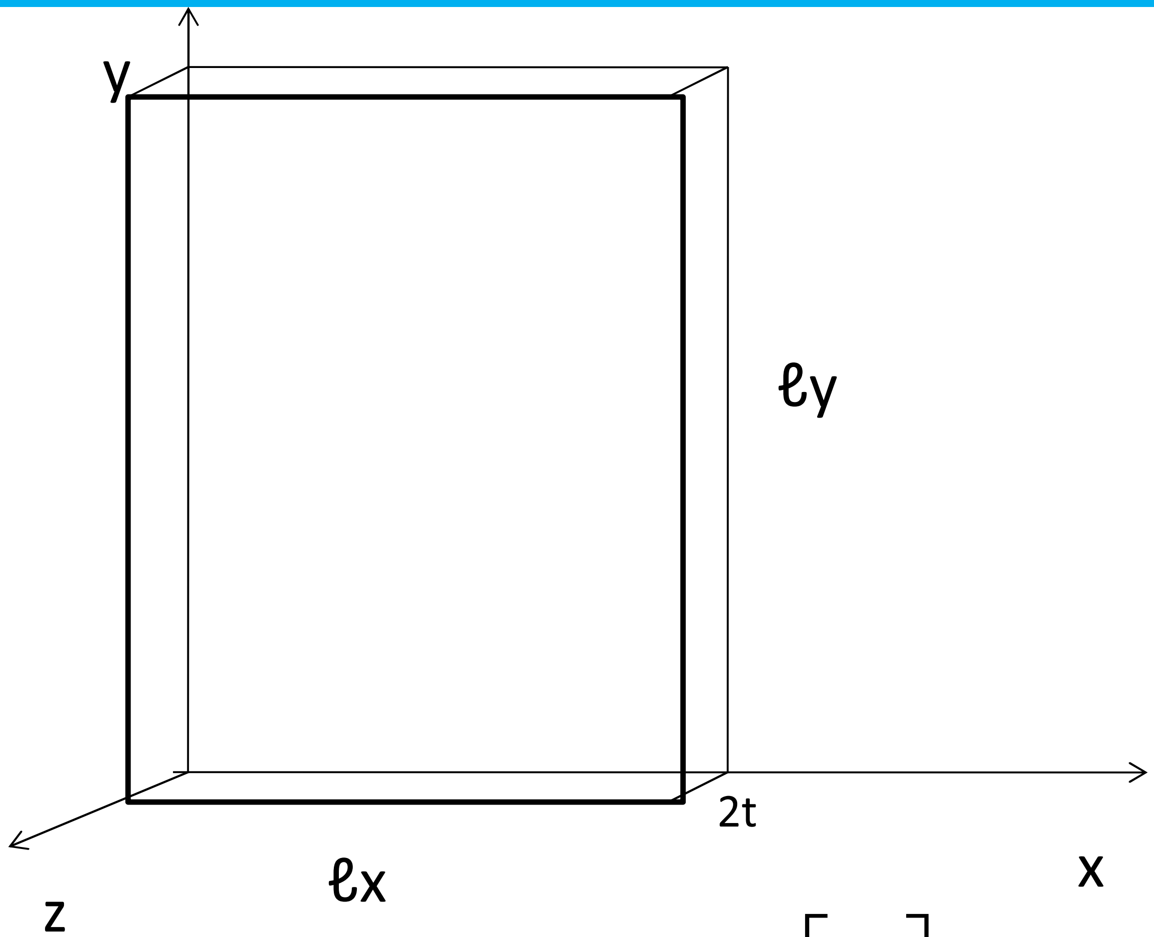
$$2.5 \leq s \leq 2.890$$

Oss: L'effettivo moltiplicatore di collasso è

$$s = \frac{2+\pi}{2} = 2.571$$



Problema piano di tensione

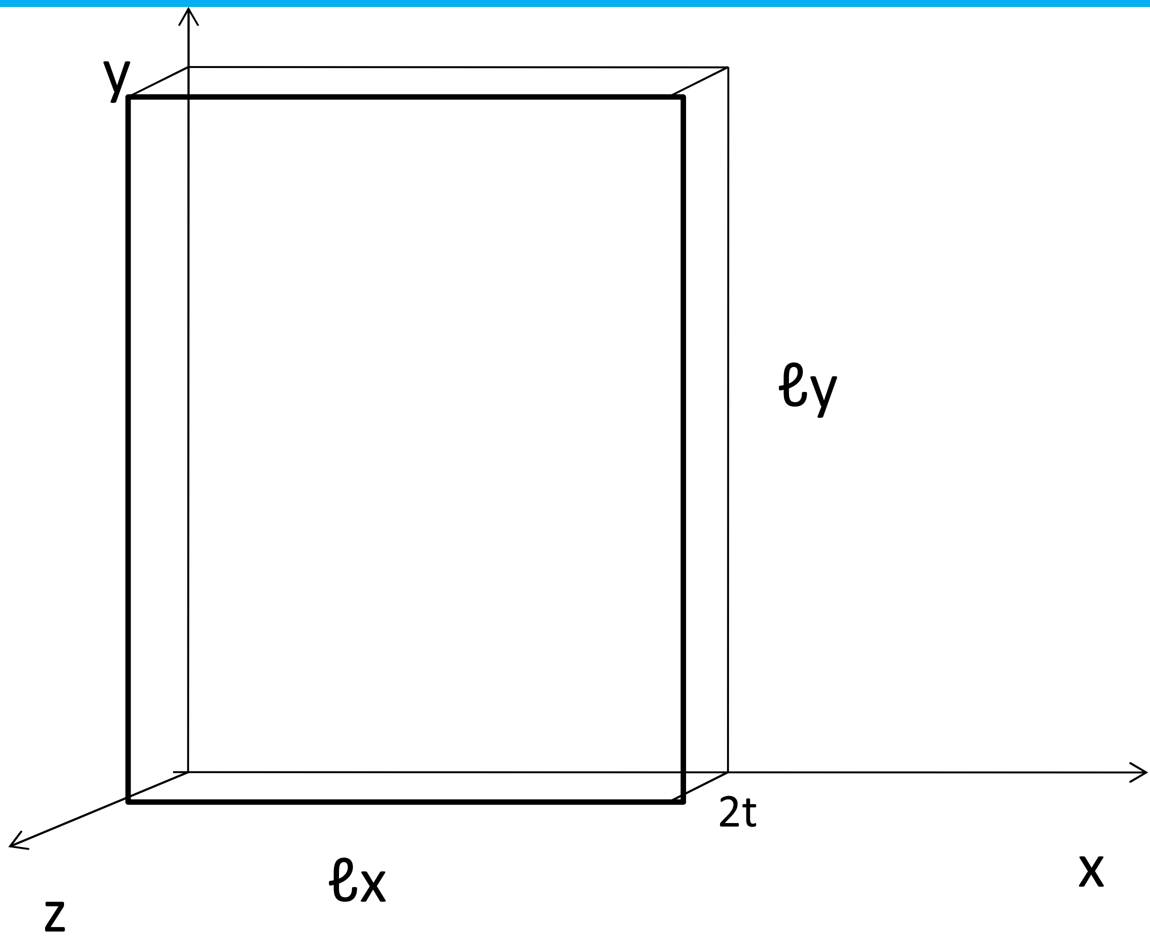


$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Si consideri la lastra generata per traslazione lungo z del rettangolo di lati ℓx, ℓy e di spessore 2t

Si assume che sia un pb. piano di tensione $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$
E che il vettore di tensione t_n appartenga al piano medio z=0
Inoltre le tensioni sono uniformi nello spessore 2t

problema piano di tensione



Si introducono gli sforzi membranali [F/L]

$N_x = \sigma_x \, 2t$

$N_y = \sigma_y \, 2t$

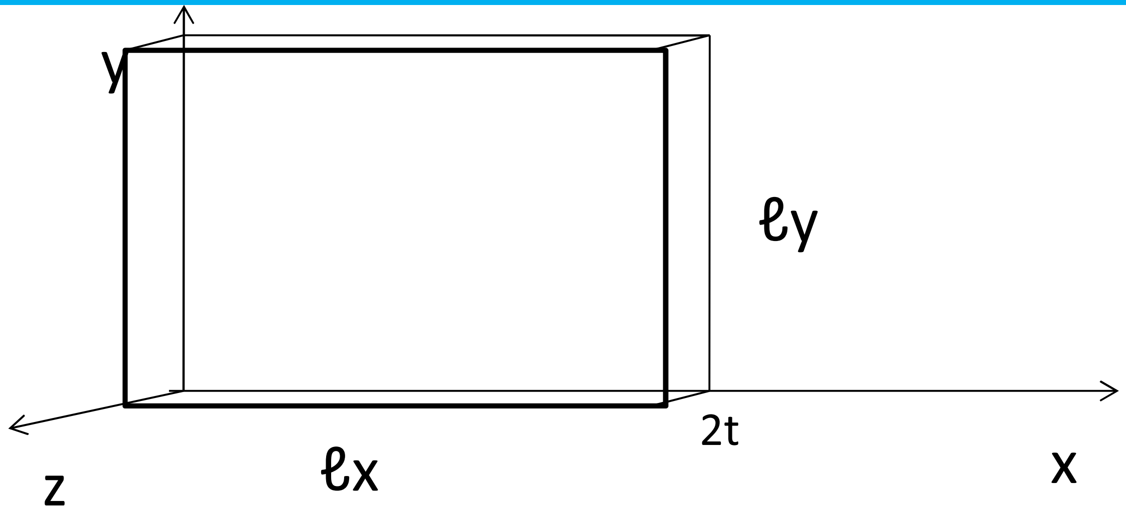
$N_{xy} = \tau_{xy} \, 2t$

Sia $N_0 = \sigma_0 \, 2t$ lo sforzo di piena plasticizzazione

Allora introduciamo le seguenti componenti di sforzo adimensionali

$$\mathbf{n}_x = \frac{N_x}{N_0} = \frac{\sigma_x}{\sigma_0} \qquad \mathbf{n}_y = \frac{N_y}{N_0} = \frac{\sigma_y}{\sigma_0} \qquad \mathbf{n}_{xy} = \frac{N_{xy}}{N_0} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0}$$

problema piano di tensione



Definiamo la potenza esterna (consideriamo solo carichi accidentali, no permanenti; integrale sulla superficie media B

$$\dot{\mathbf{W}}_{\text{ext}} = \mu\left[\int_{\mathbf{B}} (\mathbf{b}_{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{b}_{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{v}})\mathbf{dA} + \int_{\partial\mathbf{B}} (\mathbf{q}_{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{q}_{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{v}})\mathbf{d}\ell\right]$$

Dove μ moltiplicatore carichi accidentali
Potenza dissipata interna è (se def. plastiche uniformi spessore):

$$\mathbf{D}_{\text{int}} = \int_{-\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} (\sigma_{\mathbf{x}}\dot{\varepsilon}_{\mathbf{px}} + \sigma_{\mathbf{y}}\dot{\varepsilon}_{\mathbf{py}} + \tau_{\mathbf{xy}}\dot{\gamma}_{\mathbf{px}})\mathbf{dz} = \mathbf{N}_{\mathbf{x}}\dot{\varepsilon}_{\mathbf{px}} + \mathbf{N}_{\mathbf{y}}\dot{\varepsilon}_{\mathbf{py}} + \mathbf{N}_{\mathbf{xy}}\dot{\gamma}_{\mathbf{pxy}}$$

problema piano di tensione

Le equazioni indefinite di equilibrio si scrivono

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \mathbf{b}_x = 0 \qquad\qquad \mathbf{n}_{x,x} + \mathbf{n}_{xy,y} + \frac{\mathbf{b}_x}{\sigma_0} = 0$$

$$\sigma_{y,y} + \tau_{xy,x} + \mathbf{b}_y = 0 \qquad\qquad \mathbf{n}_{y,y} + \mathbf{n}_{xy,x} + \frac{\mathbf{b}_y}{\sigma_0} = 0$$

Le equazioni di equilibrio al bordo si scrivono

$$\sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y = \mathbf{q}_x \qquad\qquad \mathbf{n}_x \alpha_x + \mathbf{n}_{xy} \alpha_y = \frac{\mathbf{q}_x}{\sigma_0}$$

$$\tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y = \mathbf{q}_y \qquad\qquad \mathbf{n}_{xy} \alpha_x + \mathbf{n}_y \alpha_y = \frac{\mathbf{q}_y}{\sigma_0}$$

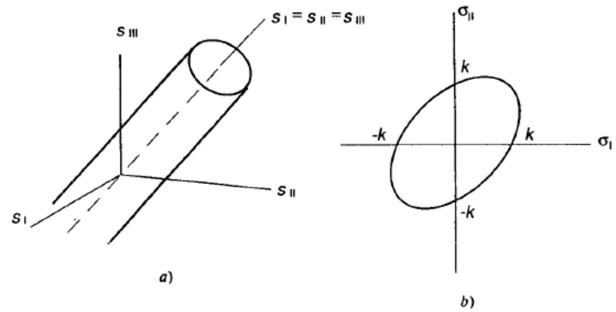
Problema piano di tensione

Condizioni di ammissibilità $$\mathbf{f}(\sigma) \leq 0$$

Per materiali metallici si assume criterio di Huber-Hencky Von Mises

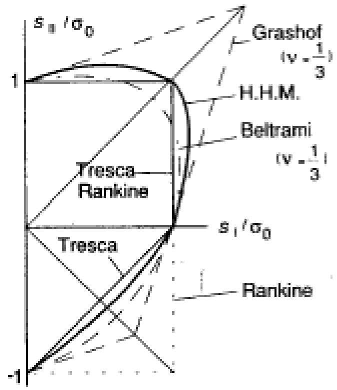
$$\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 \leq \sigma_0^2$$

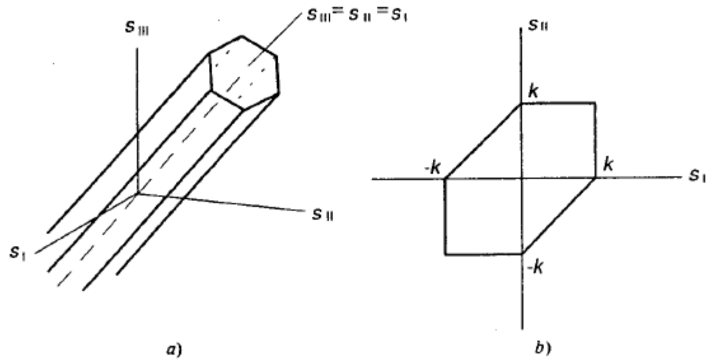
$$n_x^2 - n_x n_y + n_y^2 + 3n_{xy}^2 \leq 1$$



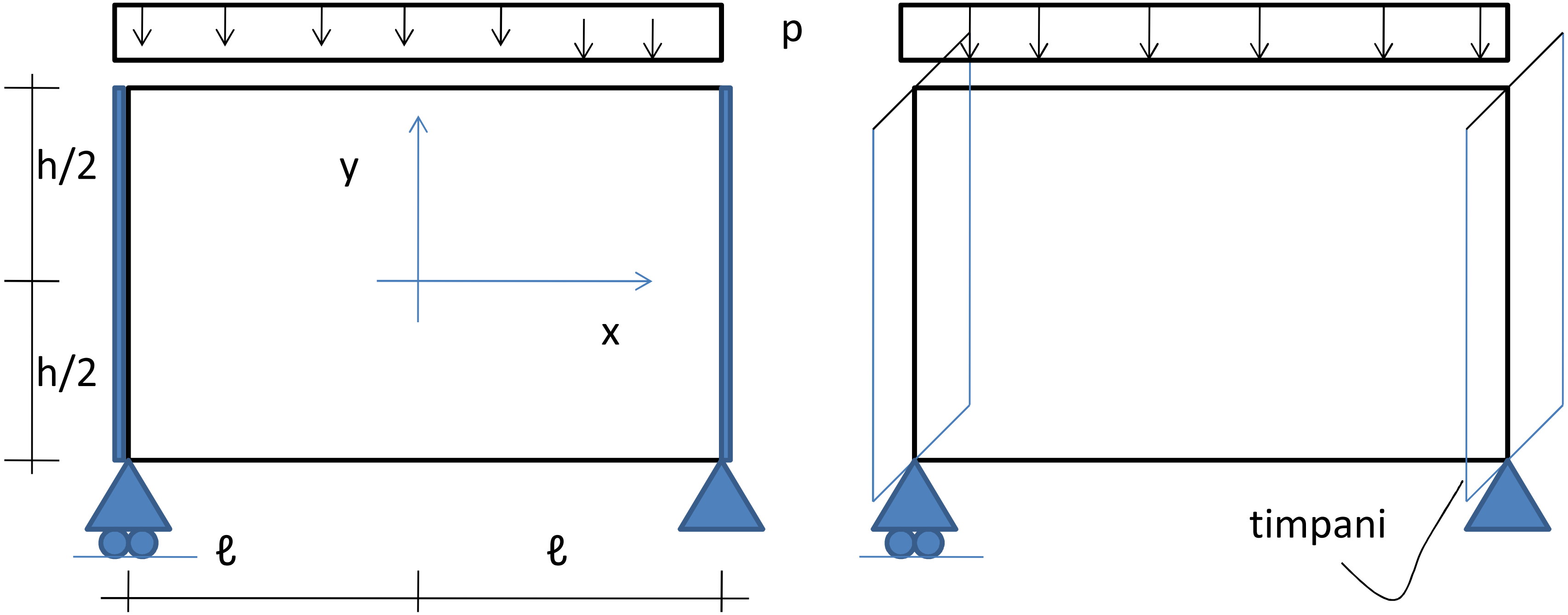
Tresca (se n1, n2 sforzi principali)

$$\max\{\, |n_1|, |n_2|, |\, n_1 - n_2 \,|\, \} \leq 1$$





Problema piano di tensione



Equazioni di equilibrio di campo

$$n_{x,x} + n_{xy,y} = 0$$

$$n_{y,y} + n_{xy,x} = 0$$

Equazioni di equilibrio al bordo

$$n_x = 0, \quad x = \pm\ell$$

$$n_{xy} = 0, \quad n_y = -p, \quad y = h/2$$

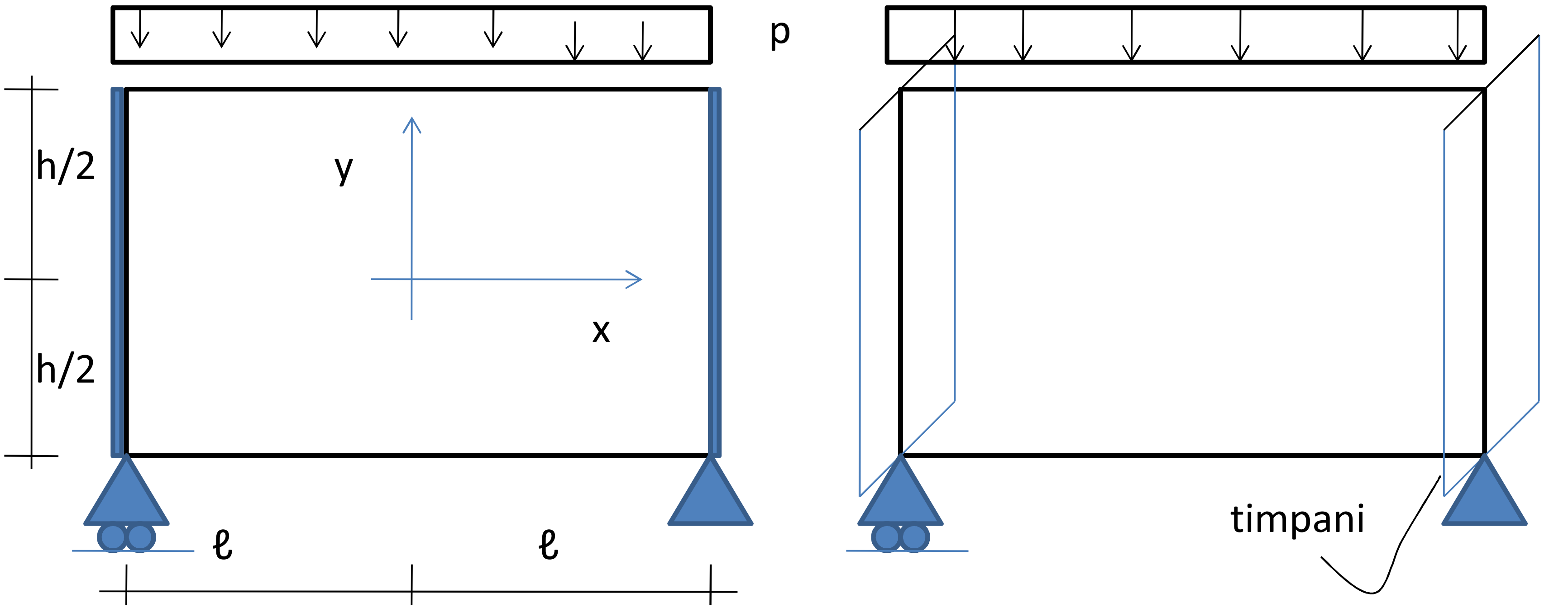
$$n_{xy} = 0, \quad n_y = 0, \quad y = -h/2$$

Problema piano di tensione

Continuità del vettore di tensione su una superficie di normale (α_x,α_y)

$$t_{nx} = n_x \alpha_x + n_{xy} \alpha_y$$

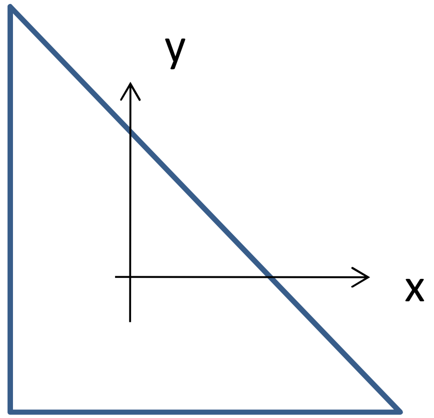
$$t_{ny} = n_{xy} \alpha_x + n_y \alpha_y$$



Soluzione staticamente ammissibile

Cerchiamo una soluzione staticamente ammissibile, ovvero equilibrata e rispettosa della conformità plastica

Consideriamo un elemento finito Constant Strain Triangle (CST) (tensione/ deformazione costante)



$$\sigma_x = c_1^e$$

$$\sigma_y = c_2^e$$

$$\tau_{xy} = c_3^e$$

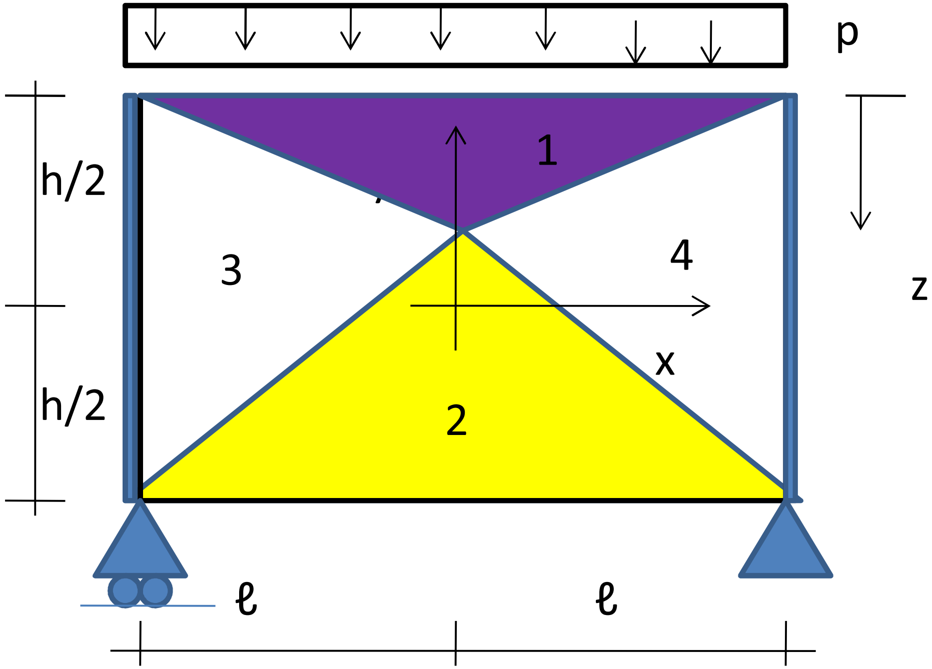
$\Rightarrow$

Equazioni indefinite equilibrio soddisfatte
Div σ+b=0

Basta verificare l'ammissibilità in un punto qualunque dato che la tensione è costante

Problema piano di tensione

Consideriamo la lastra divisa in 4 elementi finiti CST

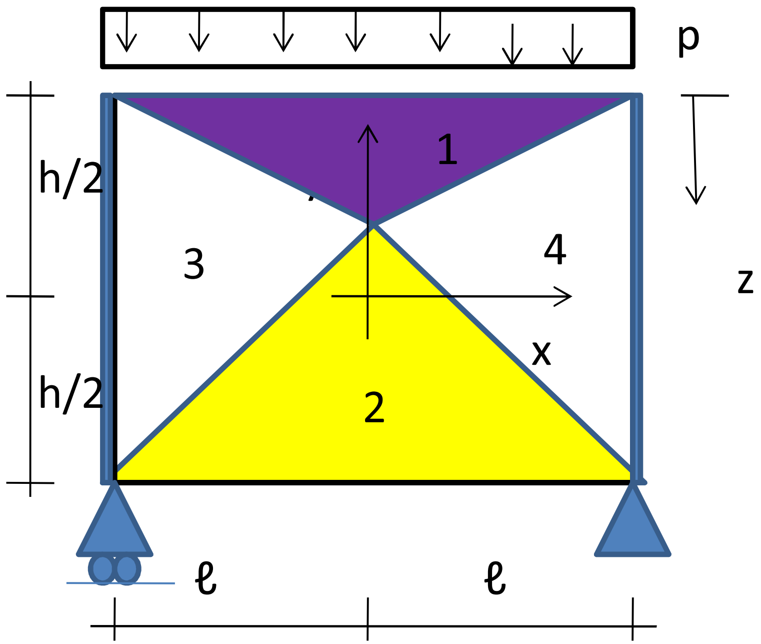


Criterio di Tresca

Si definisce una sequenza di moltiplicatori statici funzioni di z

Abbiamo 3 incognite (c^e_1,c^e_2,c^e_3) per 4 elementi = 12 incognite
Disponiamo di 6 condizioni linearmente indip dall'eq. Bordo
4 condizioni dalla continuità del vettore t_n attraverso i confini elementari
Simmetria dà una condizione
Rimane un'unica incognita in z

Problema piano di tensione



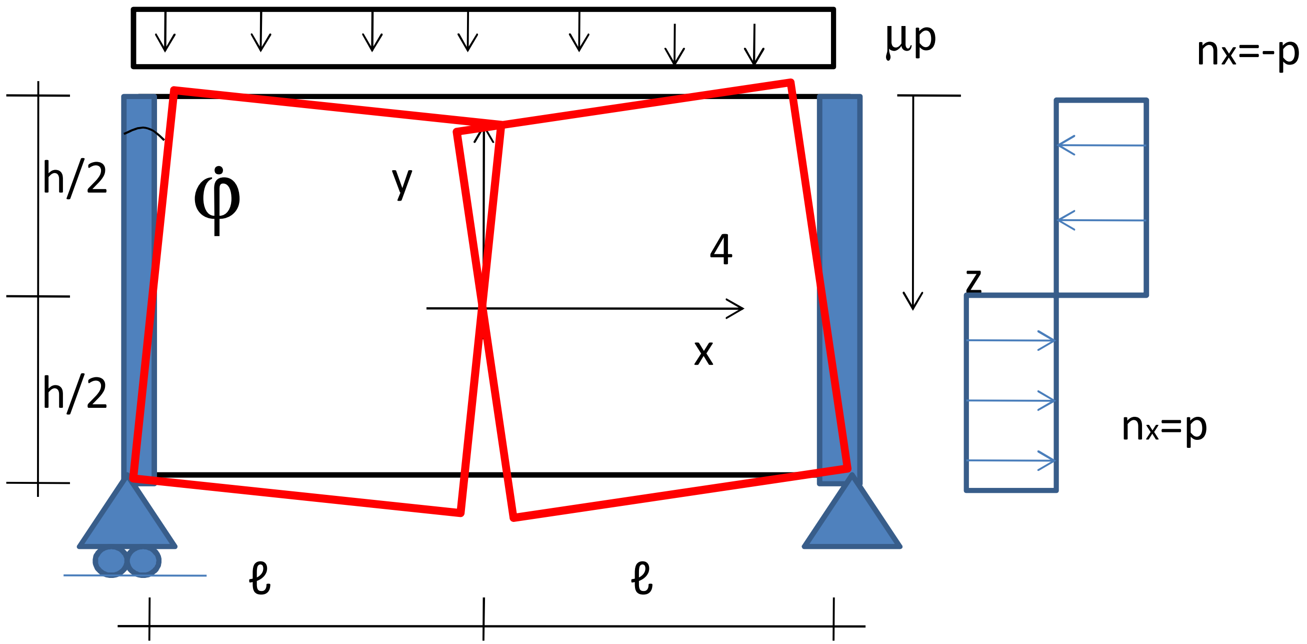
La soluzione varia al variare di h/ℓ

Per $0<h/\ell<=0.972 \rightarrow \mu_s=(h/\ell)^2/2$

Per $0.972<=h/\ell<=2.058 \rightarrow \mu_s=0.486h/\ell$

Per $2.058 <=h/\ell<\infty \rightarrow \mu_s=1$ (schiacciamento)

Teorema cinematico



Potenza dissipata

$$D = \int_0^{h/2} p \times 2\dot{\varphi} y dy - \int_{-h/2}^{0} p \times 2\dot{\varphi} y dy = p\dot{\varphi}\frac{h^2}{2}$$

Lavoro esterno

$$L_e = 2\int_0^{\ell} p\dot{\varphi}(\ell - x)dx = 2p\dot{\varphi}(\ell^2 - \frac{\ell^2}{2}) = p\dot{\varphi}\ell^2$$

PLV

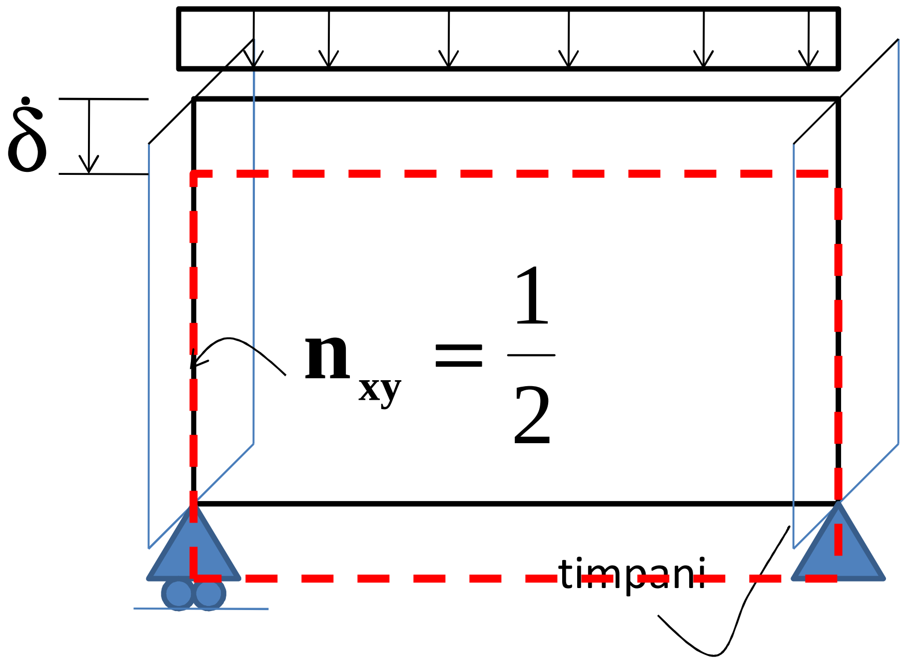
$$\mu_c = \frac{D}{L_e} = \frac{h^2}{2\ell^2}$$

$$\Rightarrow \mu_c = \frac{h^2}{2\ell^2}$$

Teorema cinematico

Meccanismo per tranciamento della connessione ai timpani per sopraggiunta crisi in n_{xy}

In particolare per il criterio di Tresca
Si ha che n_{xy} =1/2



Potenza dissipata

$$D = 2p\frac{1}{2}\dot{\delta}h = p\dot{\delta}h$$

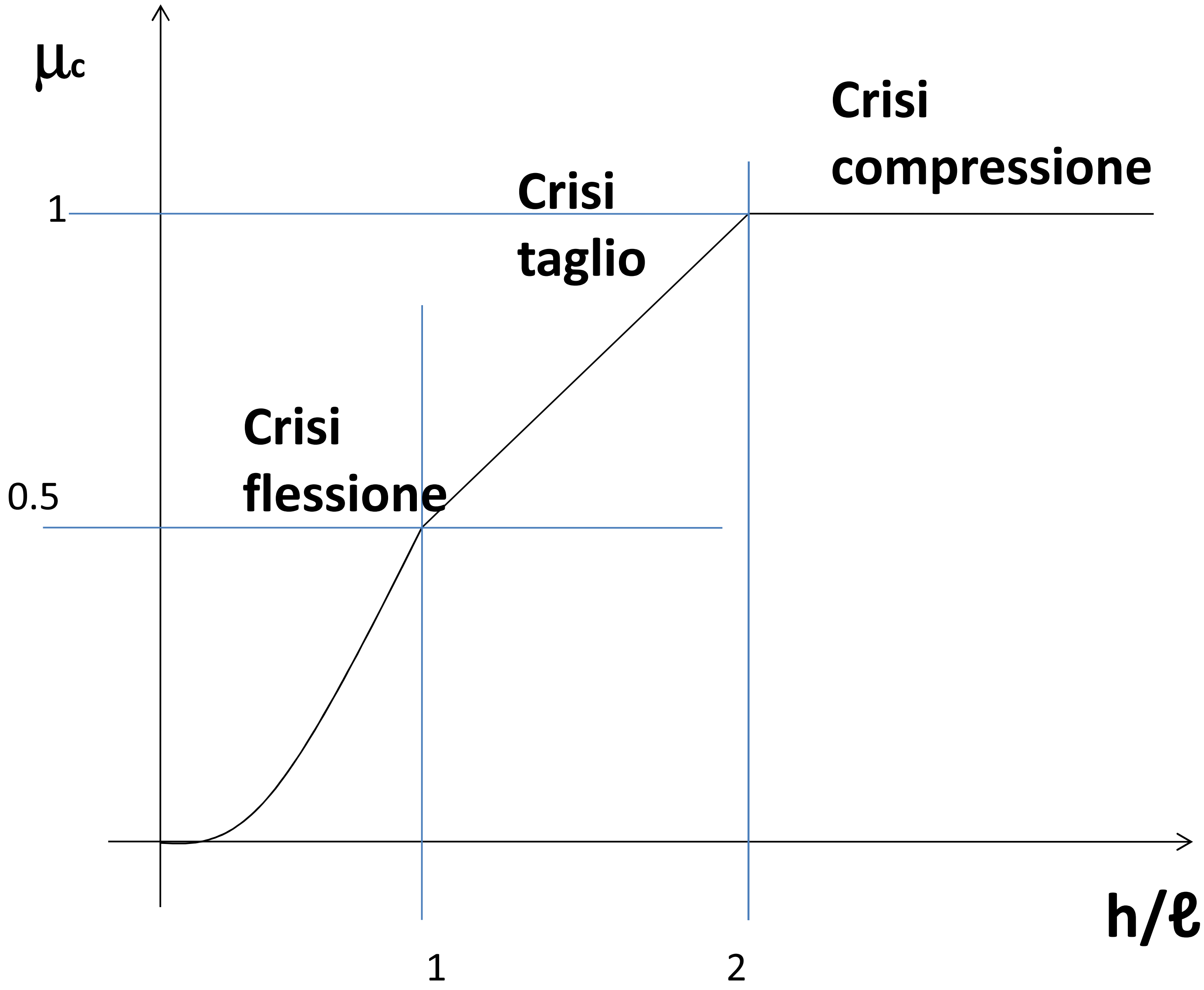
Lavoro esterno

$$L_e = 2p\dot{\delta}\ell$$

PLV

$$\mu_c = \frac{h}{2\ell} \Rightarrow \mu_c = \frac{h}{2\ell}$$

Teorema cinematico



Altre Soluzioni note

Lastre forate

Lastre con fori rinforzati

Tubi spessi

Lamiere chiodate