Lezione

PONTI E GRANDI STRUTTURE

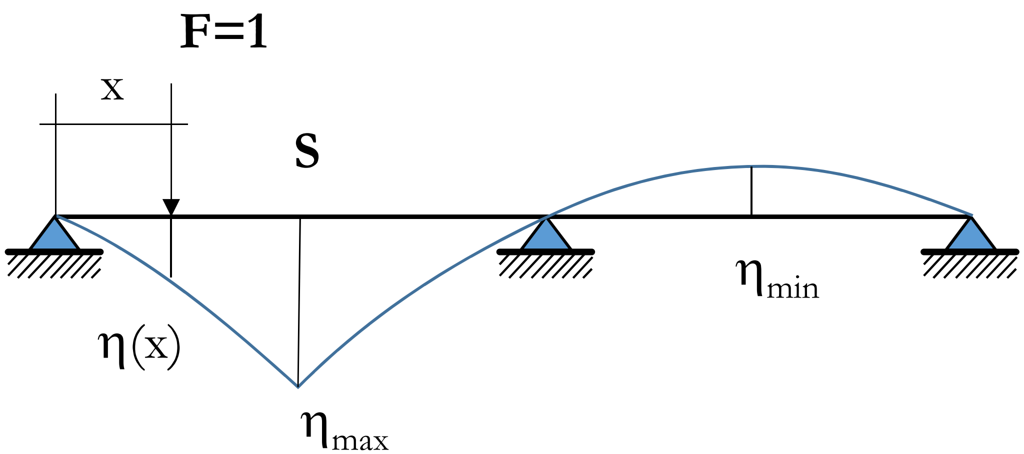
Prof. Pier Paolo Rossi
Università degli Studi di Catania

Linee di influenza

Linea di influenza

Definizione

Dicesi linea di influenza della grandezza G nella sezione S,
Il diagramma che indica con la sua ordinata generica $\eta(x)$
il valore della grandezza in esame in S
quando il carico F=1 agisce nella sezione di ascissa x.

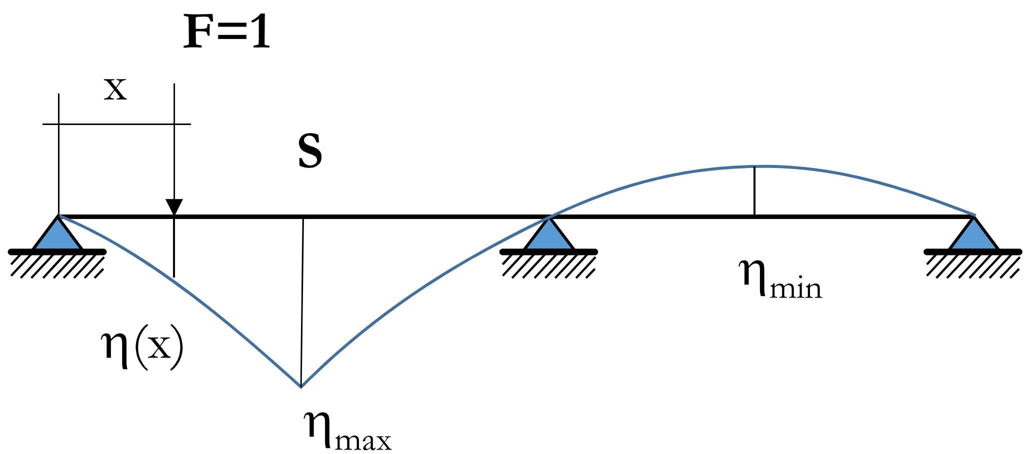


Linea di influenza

Utilizzo

Mediante le linee di influenza è possibile :

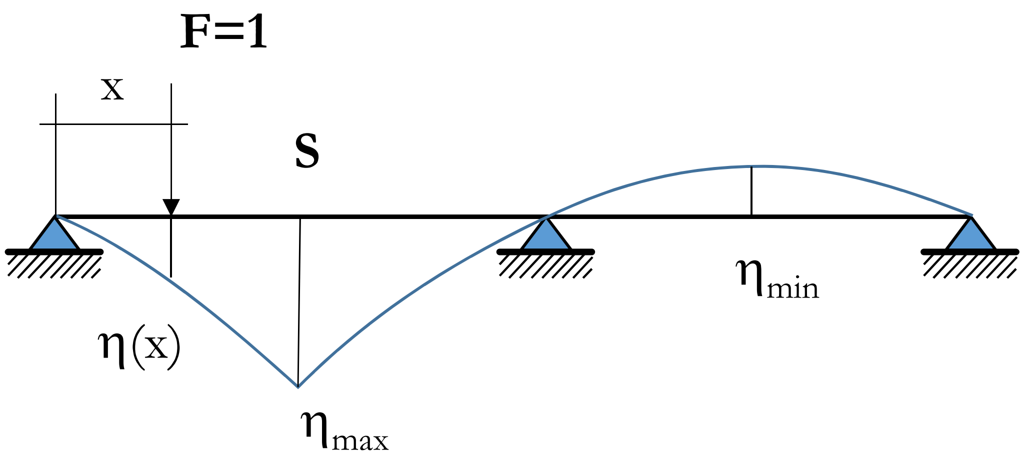
- valutare l'effetto prodotto in una sezione da carichi mobili di vario tipo
- individuare le posizioni dei carichi per le quali si hanno i massimi ed i minimi valori della grandezza G cercata



Linea di influenza

Carico concentrato isolato

- La grandezza G=F η è proporzionale all'intensità del carico.
- La posizione del carico F per ci si ha il massimo (o minimo) valore della grandezza G è unica ed è quella della verticale corrispondente all'ordinata massima (o minima) della linea di influenza.

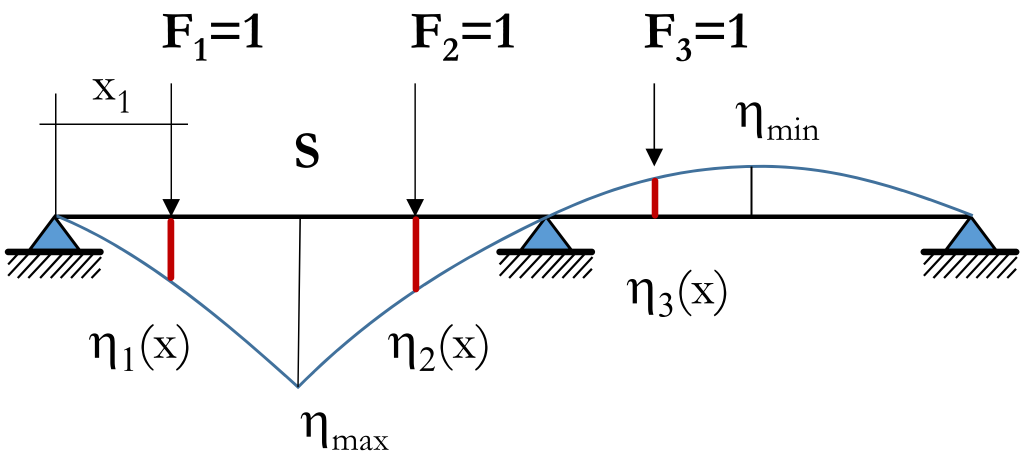


Linea di influenza

Treno di carichi concentrati

- E' possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti per cui se η_1, η_2, η_3 … sono rispettivamente le ordinate sotto i carichi F_1, F_2, F_3 … la grandezza G sarà data da :

$$G = \sum_i F_i \, \eta_i$$



Linea di influenza

Carico distribuito

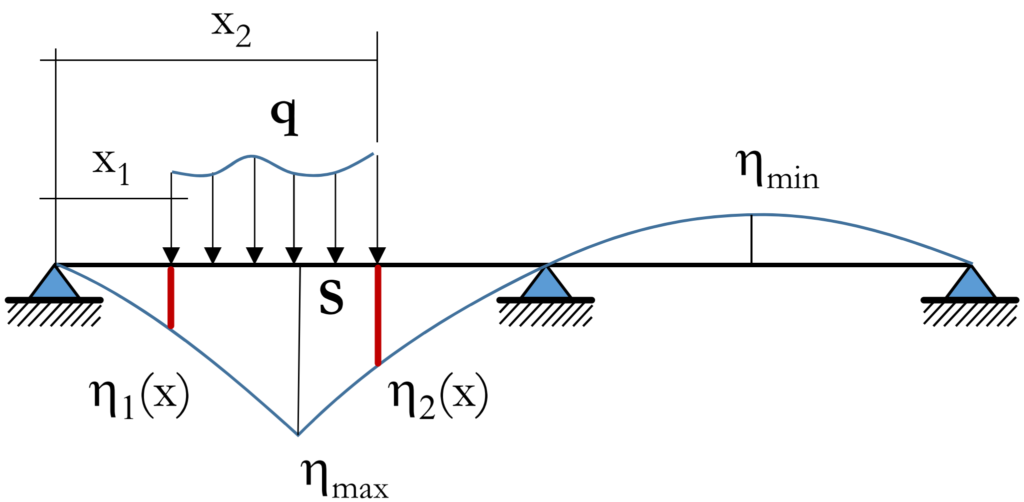
- Nel caso di carico variabile q(x) si ha :

$$G = \int_{x_1}^{x_2} q(x)\,\eta\, dx$$

- Nel caso di carico uniformemente ripartito q si ha :

$$G = q\Omega$$

dove Ω è l'area della linea di influenza sottostante la zona caricata.

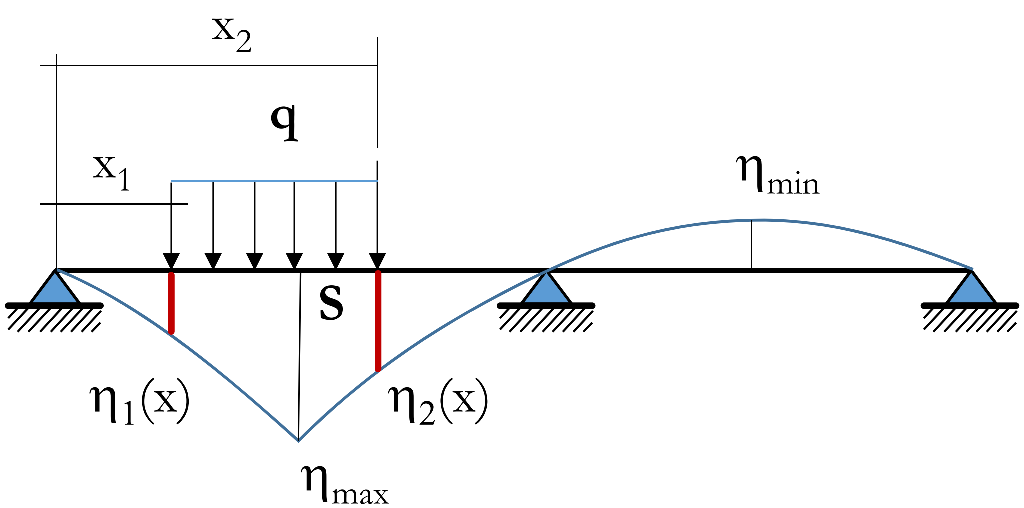


Linea di influenza

Carico uniformemente distribuito

- Nel caso generale di carico uniformemente distribuito q
  è semplice l'individuazione della posizione di q per cui G è massimo.

  Se, infatti, si sposta di dx il carico dalla posizione per cui l'effetto
  è massimo, si ha: $d\Omega = \eta(x_1)dx - \eta(x_2)dx$



Dovendosi avere un massimo, dovrà risultare :

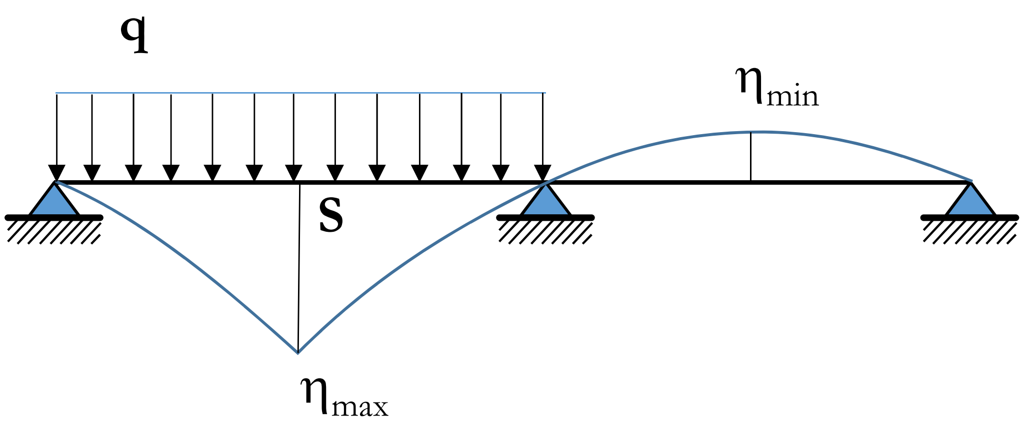
$$\frac{d\Omega}{dx} = 0 \Rightarrow \eta(x_1) = \eta(x_2)$$

ovvero, le ordinate della l.d.i. alle estremità del carico sono uguali.

Linea di influenza

Carico uniformemente comunque segmentabile

Nel caso frequente di carico uniformemente distribuito
è quello di carico comunque segmentabile, cioè di valore q fissato,
ma di estensione arbitraria ed eventualmente a tratti, che dovrà
quindi essere disposto opportunamente in sede di verifica.



Nota !

La disposizione del carico risulterà evidente dall'esame delle linee di influenza, dovendosi caricare tutte le zone dello stesso segno.

Linea di influenza

Tracciamento

Le linee di influenza possono essere tracciate con il metodo :

- DIRETTO
- INDIRETTO

Linea di influenza

Metodo diretto

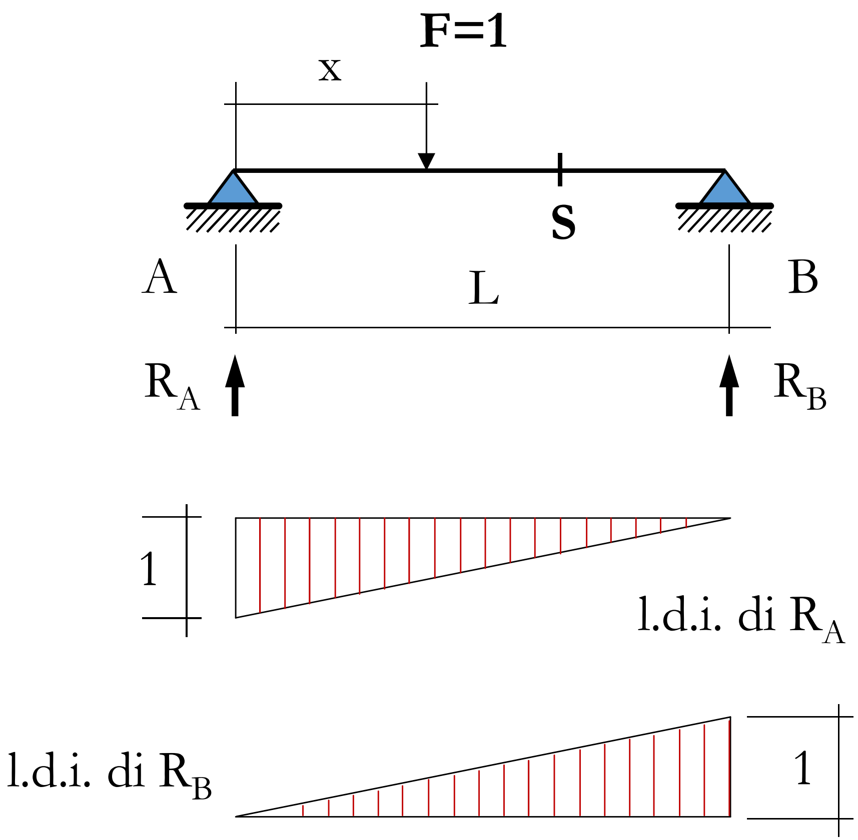
Il metodo diretto consiste nel costruire la linea di influenza per punti,
calcolando G per diverse posizioni del carico.

Più vicini sono i punti cui si dispone il carico e più preciso è l'andamento delle linee di influenza. sezione considerata.

Nota ! Nel caso delle sollecitazioni può essere conveniente determinare dapprima le linee di influenza delle reazioni vincolari e poi calcolare da queste le sollecitazioni nella sezione considerata.

Linea di influenza

Metodo diretto – trave semplicemente appoggiata



La linea di influenza (l.d.i.) delle reazioni vincolari è :

Equazioni di equilibrio

$$R_A + R_B = 1$$

$$R_B \cdot L - 1 \cdot x = 0$$

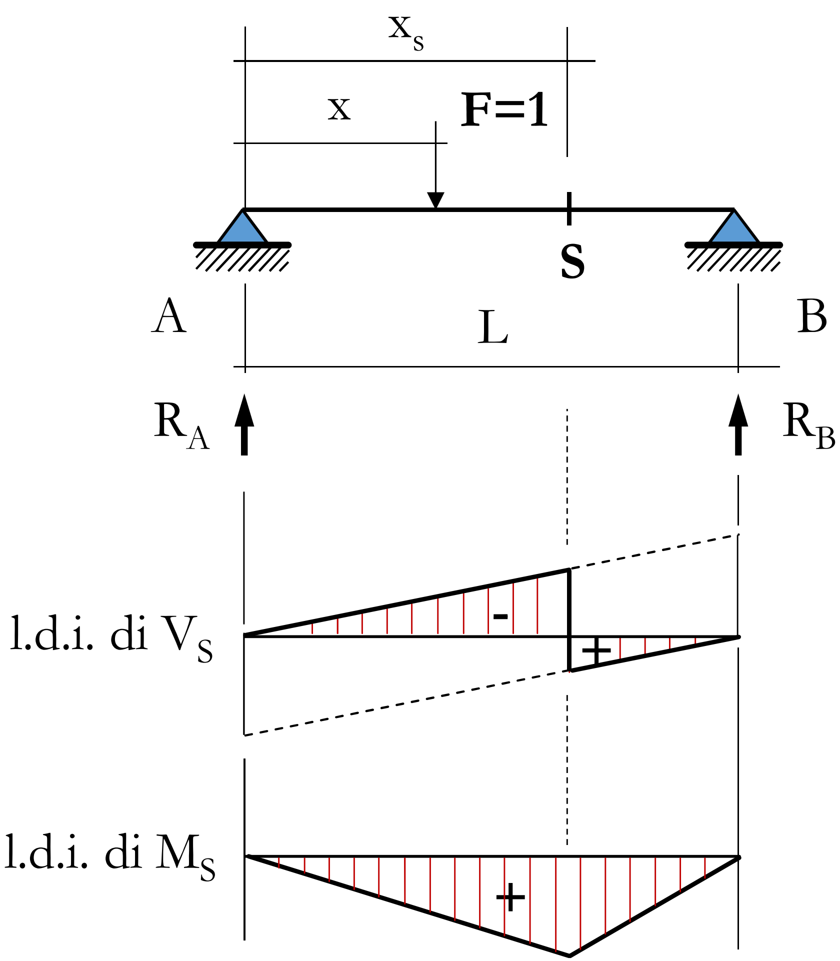
Linea di influenza delle reazioni

$$R_A = 1 - x/L$$

$$R_B = x/L$$

Linea di influenza

Metodo diretto – trave semplicemente appoggiata



Linea di influenza del taglio

$$V_S = R_A = 1 - x/L \qquad x \geq x_S$$

$$V_S = -R_B = -x/L \qquad x < x_S$$

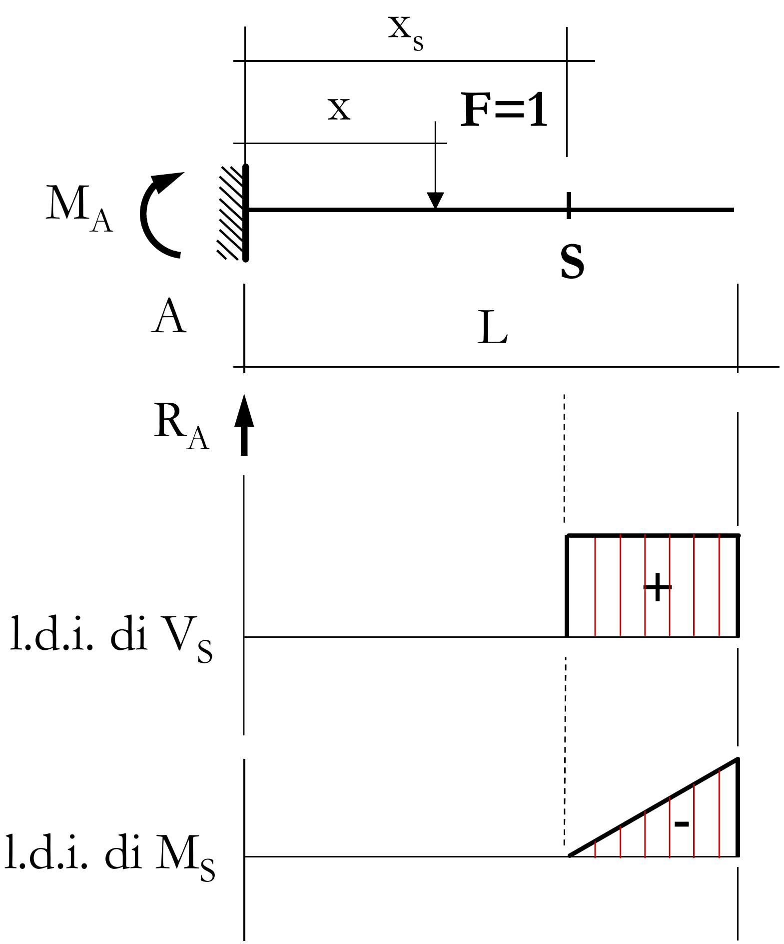
Linea di influenza del momento

$$M_S = \frac{L-x}{L} x_S \qquad x \geq x_S$$

$$M_S = \frac{L-x}{L} x_S - \left(x_S - x\right) \qquad x < x_S$$

Linea di influenza

Metodo diretto – trave a sbalzo



Linea di influenza del taglio

$$V_S = 1 \qquad x \geq x_S$$

$$V_S = 0 \qquad x < x_S$$

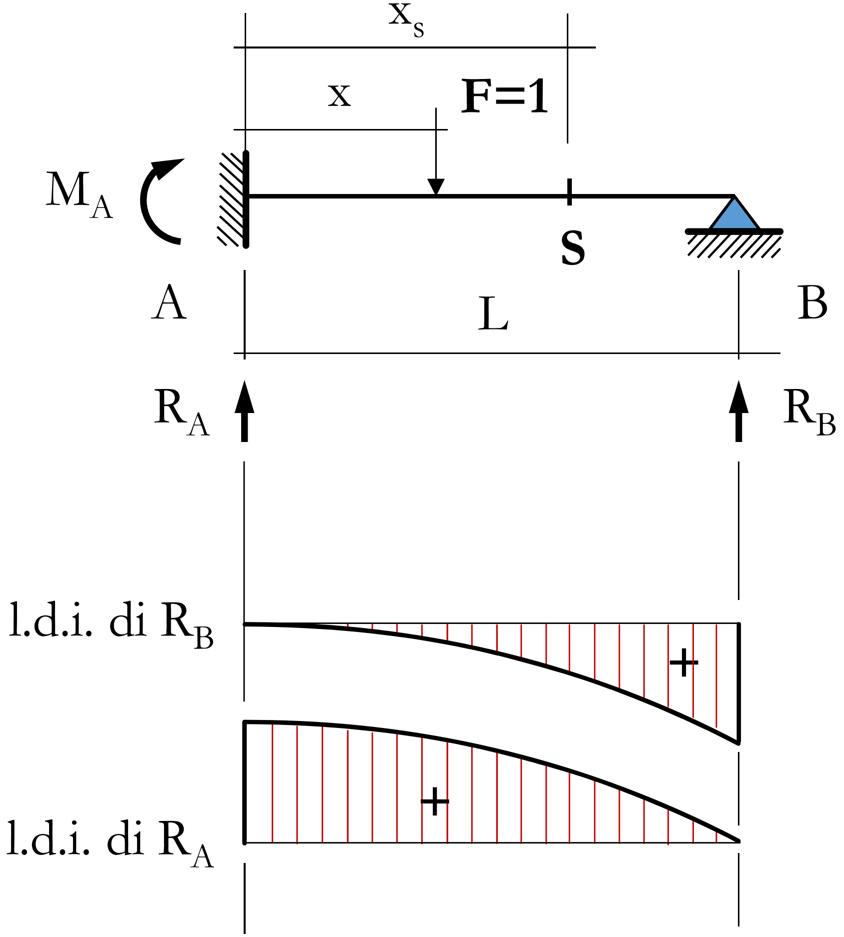
Linea di influenza del momento

$$M_S = -(x - x_S) \qquad x \geq x_S$$

$$M_S = 0 \qquad x < x_S$$

Linea di influenza

Metodo diretto – trave incastrata - appoggiata

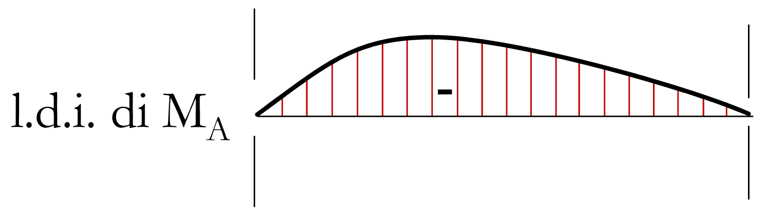


Linea delle reazioni vincolari

$$R_B = \frac{x^3}{L^3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{L-x}{x}\right)$$

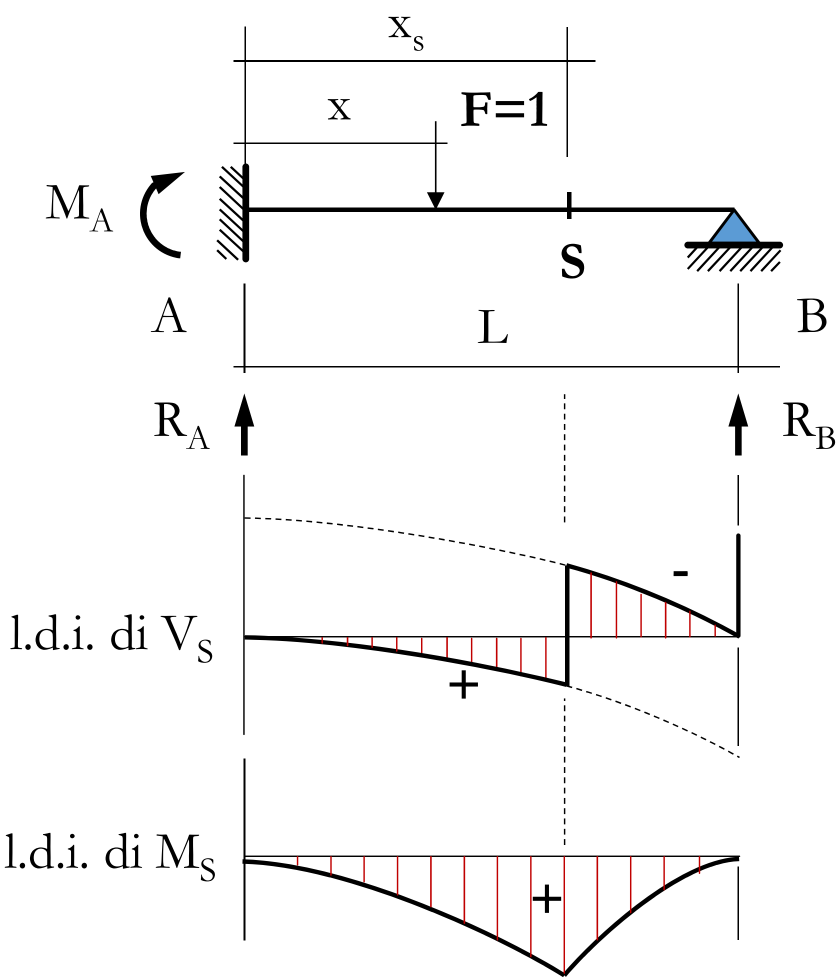
$$R_A = R_B - 1$$

$$M_A = R_B\left(L - x\right)$$



Linea di influenza

Metodo diretto – trave incastrata - appoggiata



Linea di influenza del taglio

$$V_S = R_A \qquad x \geq x_S$$

$$V_S = -R_B \qquad x < x_S$$

Linea di influenza del momento

$$M_S = R_B(L - x_S) - (x - x_S) \qquad x \geq x_S$$

$$M_S = R_B(L - x_S) \qquad x < x_S$$

Linea di influenza

Metodo indiretto

Il metodo indiretto fa uso dei principi di reciprocità

(che sono validi nell'ipotesi di validità del principio di sovrapposizione degli effetti)

Primo principio (teorema di Betti):

«Dati due insiemi di forze agenti separatamente sulla struttura, il lavoro compiuto dal primo insieme per gli spostamenti indotti dal secondo è uguale al lavoro compiuto dalle forze del secondo insieme per gli spostamenti indotti dal primo»

Secondo principio (teorema di Land-Colonnetti):

«Dati due insiemi di forze e distorsioni agenti separatamente sulla struttura, il lavoro mutuo generalizzato è nullo»

Terzo principio (teorema di Volterra):

«Dati due insiemi di distorsioni agenti separatamente sulla struttura, i due lavori mutui generalizzati sono uguali»

Linea di influenza

Metodo indiretto

(teorema di Betti generalizzato):

«Dati due insiemi di forze e distorsioni agenti separatamente sulla struttura, il lavoro compiuto dalle forze e distorsioni del primo insieme per gli spostamenti e sollecitazioni indotti dal secondo insieme è uguale al lavoro compiuto dalle forze e distorsioni del secondo insieme per gli spostamenti indotti dal primo»

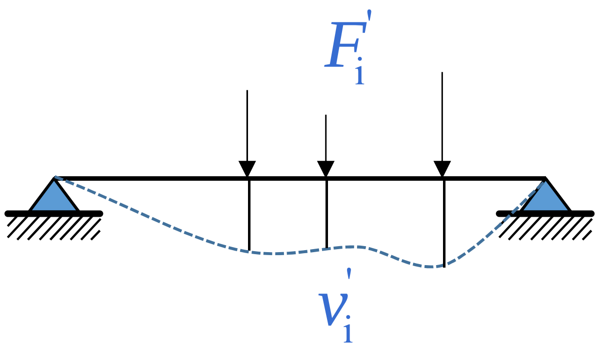
Linea di influenza

Primo principio di reciprocità

Si consideri una struttura, e due insiemi di forze $F_i^{'}$ e $F_j^{''}$ che su di essa possono agire.

1

Si faccia agire prima l'insieme 1 (forze $F_i^{'}$)

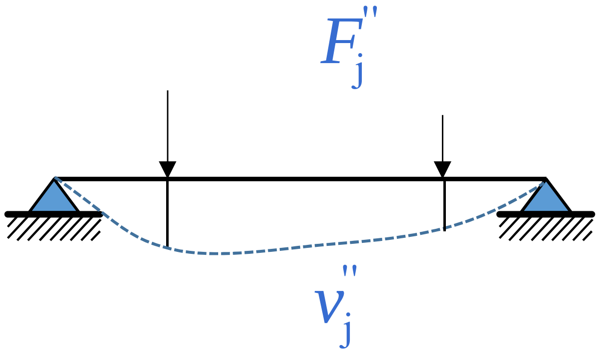


Il lavoro compiuto da tale insieme è :

$$L_1 = \frac{1}{2} \sum_i F_i^{'} v_i^{'}$$

2

Si faccia agire poi l'insieme 2 (forze $F_j^{''}$)



Il lavoro compiuto da tale insieme è :

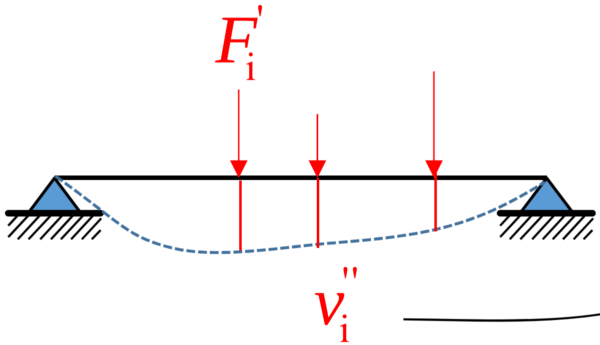
$$L_2 = \frac{1}{2} \sum_j F_j^{''} v_j^{''}$$

Linea di influenza

Primo principio di reciprocità

3

Durante l'azione delle F_j''
le F_i' sono presenti in tutto il loro valore.



spostamenti
indotti dal sistema di forze 2
in corrispondenza dei punti di
applicazione del sistema di forze 1

Quindi le forze F_i' compiono un ulteriore lavoro :

$$L_{12} = \sum_i F_i' \, v_i''$$

Pertanto, il lavoro totale è :

$$L_{1+2} = L_1 + L_2 + L_{12}$$

(se agisce prima il sistema 1 e poi il sistema 2)

Linea di influenza

Primo principio di reciprocità

Se si ipotizza di fare agire prima il sistema 2 e poi il sistema 1 si ha:

$$L_{2+1} = L_1 + L_2 + L_{21}$$

dove :

$$L_{21} = \sum_j F_j^{''} v_j^{'}$$

spostamenti
indotti dal sistema di forze 2
in corrispondenza dei punti di applicazione del sistema di forze 1

Se il sistema è conservativo $L_{1+2}=L_{2+1}$
e quindi :

$L_{21} = L_{12}$, da cui …………………………

Primo principio (teorema di Betti):

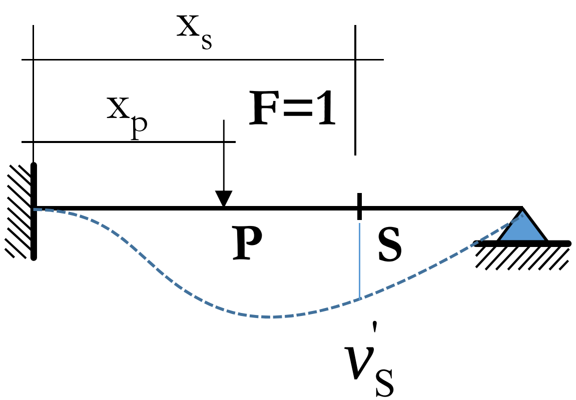
«Dati due insiemi di forze agenti separatamente sulla struttura, il lavoro compiuto dal primo per gli spostamenti indotti dal secondo è uguale al lavoro compiuto dalle forze del secondo insieme per gli spostamenti indotti dal primo»

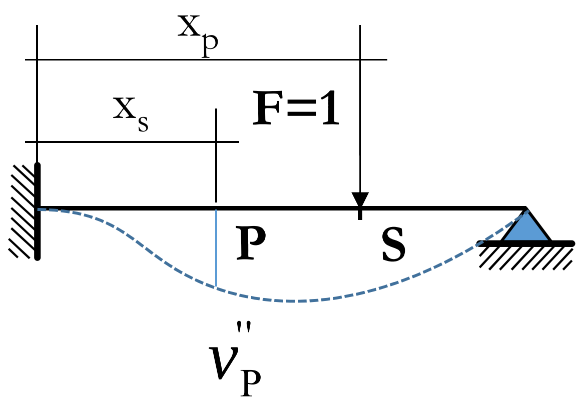
Linea di influenza

Metodo indiretto – linee di influenza degli spostamenti

Per il primo principio di reciprocità (teorema di Betti)
l'abbassamento v_s della sezione S per un carico verticale posto in P
è uguale all'abbassamento v_p della sezione P per il carico posto in S.

$$F'_P \, v''_P = F''_S \, v'_S$$





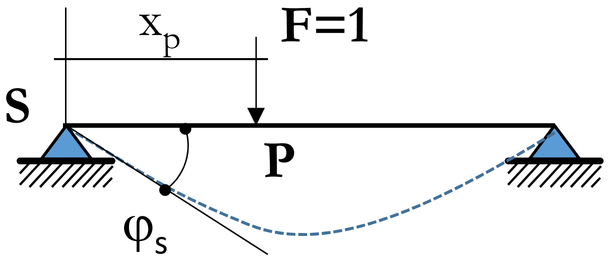
Quindi, il diagramma degli spostamenti *v* in S al variare dell'ascissa del punto di applicazione della forza unitaria in P (l.d.i. dello spostamento *v* in S) sarà uguale al diagramma degli spostamenti prodotti nella struttura dalla forza unitaria in S.

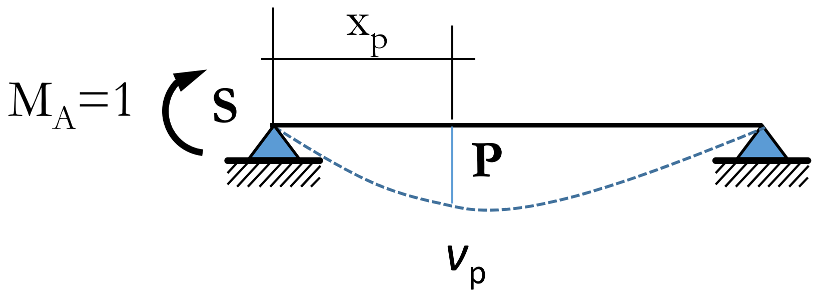
Linea di influenza

Metodo indiretto – linee di influenza degli spostamenti

Per il primo principio di reciprocità (teorema di Betti)
la rotazione φ_{sp} della sezione S per un carico verticale unitario posto in P
è uguale all'abbassamento V_p della sezione P per la coppia unitaria posta in S.

$$F_P' v_P'' = M_S'' \varphi_S'$$





Quindi, il diagramma della rotazione φ in S al variare dell'ascissa del punto di applicazione della forza unitaria in P (l.d.i. della rotazione φ in S) sarà uguale al diagramma degli spostamenti prodotti nella struttura dalla coppia unitaria in S.

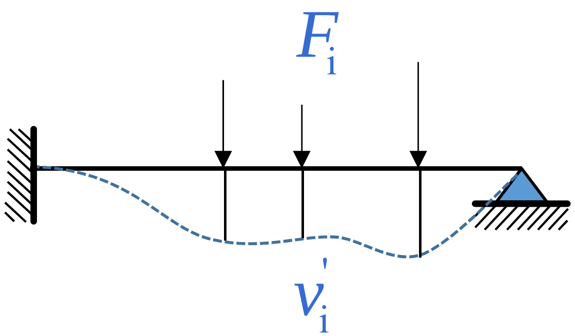
Linea di influenza

Secondo principio di reciprocità

Si consideri una struttura, e due insiemi di forze F_i e distorsioni Δ_k che su di essa possono agire.

1

Si faccia agire prima l'insieme 1 (forze F_i)

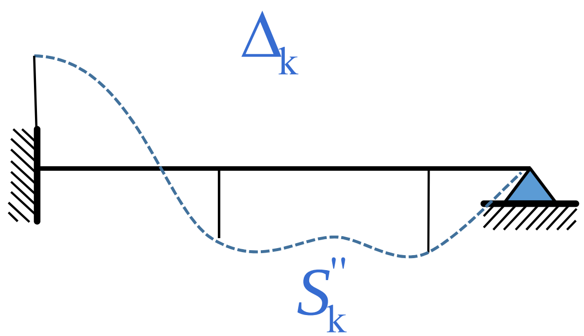


Il lavoro compiuto da tale insieme è :

$$L_1 = \frac{1}{2}\sum_i F_i v_i'$$

2

Si faccia agire poi l'insieme 2 (Δ_k)



Il lavoro compiuto da tale insieme è :

$$L_2 = -\frac{1}{2}\sum_k \Delta_k S_k''$$

Linea di influenza

Secondo principio di reciprocità

Per il teorema di Betti generalizzato

$$\sum_{i} F_i^{'} v_i^{''} - \sum_{k} S_k^{'} \Delta_k^{''} = \sum_{j} F_j^{''} v_j^{'} - \sum_{h} S_h^{''} \Delta_h^{'}$$

Dunque, essendo $F_j^{''} = 0$ e $\Delta_h^{'} = 0$ deve essere :

$$\sum_{i} F_i^{'} v_i^{''} - \sum_{k} S_k^{'} \Delta_k^{''} = 0$$

ovvero :

$L_{12} = 0$, da cui ....

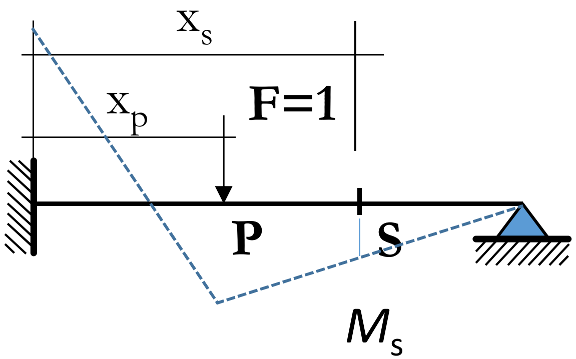
Secondo principio
(teorema di Land-Colonnetti):

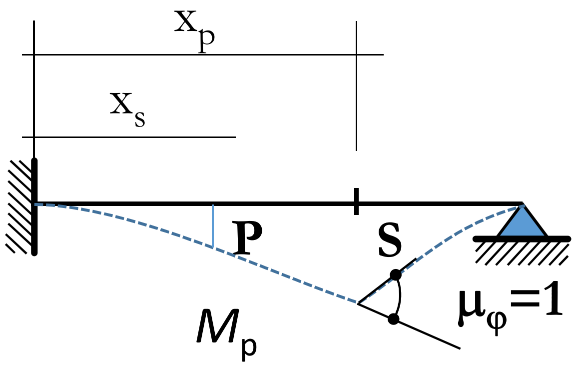
«Dati due insiemi di forze e distorsioni agenti separatamente sulla struttura, il lavoro mutuo generalizzato è nullo»

Linea di influenza

Metodo indiretto – linee di influenza delle sollecitazioni

Per il secondo principio di reciprocità (teorema di Land-Colonnetti) la sollecitazione (N, M, V) nella sezione S per un carico verticale posto in P è uguale all'abbassamento v_p della sezione P per una distorsione (che compie lavoro per la caratteristica cercata) posta in S.



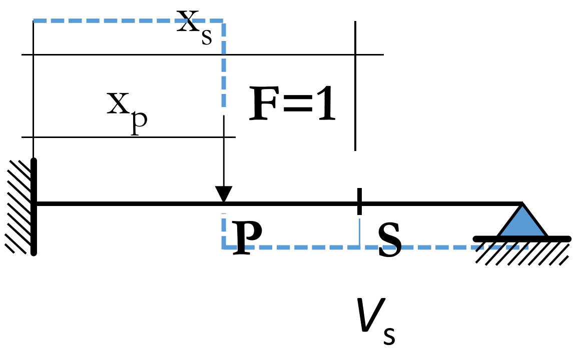


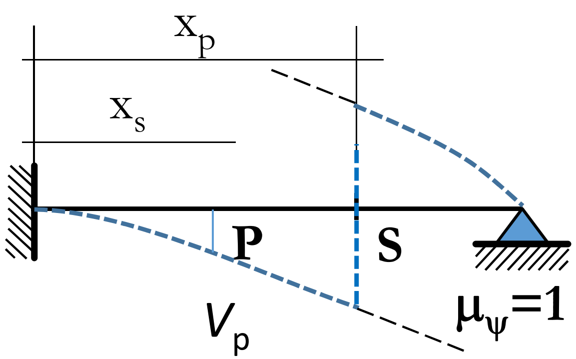
Quindi, il diagramma del momento flettente *M* in S al variare dell'ascissa del punto di applicazione della forza unitaria in P (l.d.i. di *M* in S) sarà uguale al diagramma degli spostamenti prodotti nella struttura dalla distorsione angolare unitaria in S.

Linea di influenza

Metodo indiretto – linee di influenza delle sollecitazioni

Per il secondo principio di reciprocità (teorema di Land-Colonnetti) la sollecitazione (N, M, V) nella sezione S per un carico verticale posto in P è uguale all'abbassamento v_p della sezione P per una distorsione (che compie lavoro per la caratteristica cercata) posta in S.

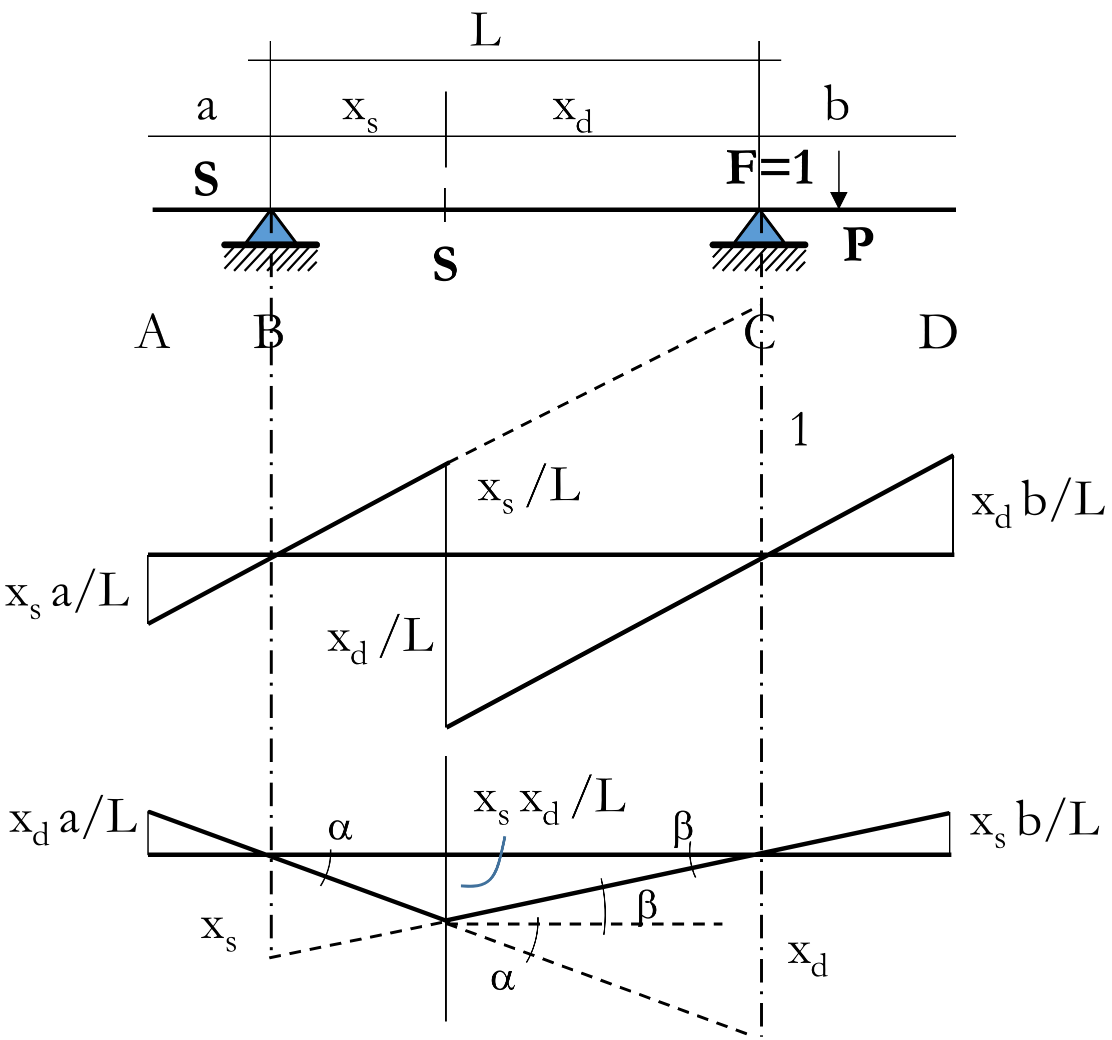




Quindi, il diagramma del taglio V in S al variare dell'ascissa del punto di applicazione della forza unitaria in P (l.d.i. di *M* in S) sarà uguale al diagramma degli spostamenti prodotti nella struttura dalla distorsione trasversale unitaria in S.

Linea di influenza

Metodo indiretto – linee di influenza delle sollecitazioni



Esempio

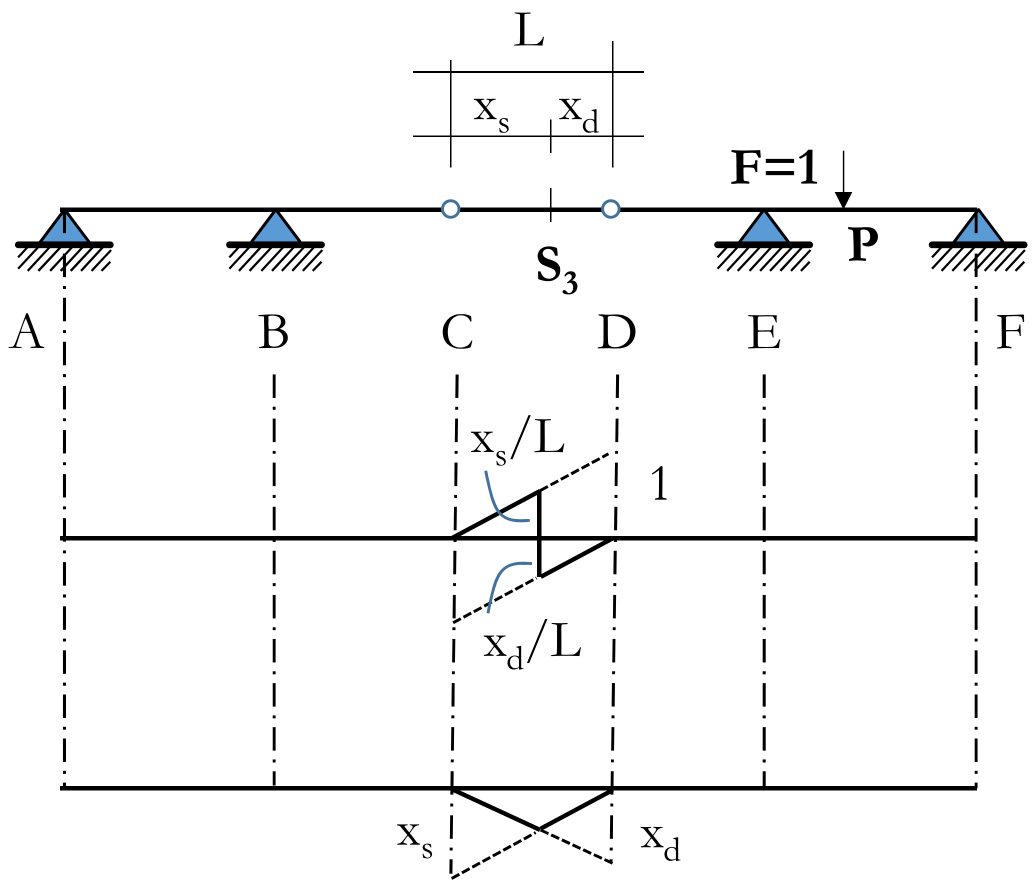
Trave appoggiata con sbalzo.

Linea di influenza di V per la sezione S

Linea di influenza di M per la sezione S

Linea di influenza

Metodo indiretto – linee di influenza delle sollecitazioni



Esempio

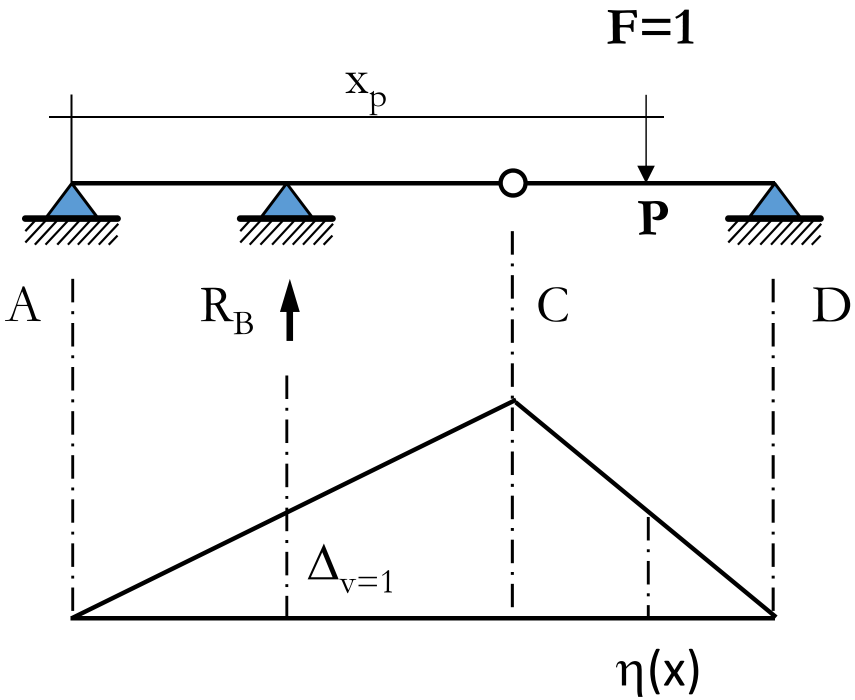
Trave Gerber

Linea di influenza di V per la sezione S_3

Linea di influenza di M per la sezione S_3

Linea di influenza

Metodo indiretto – linee di influenza delle reazioni



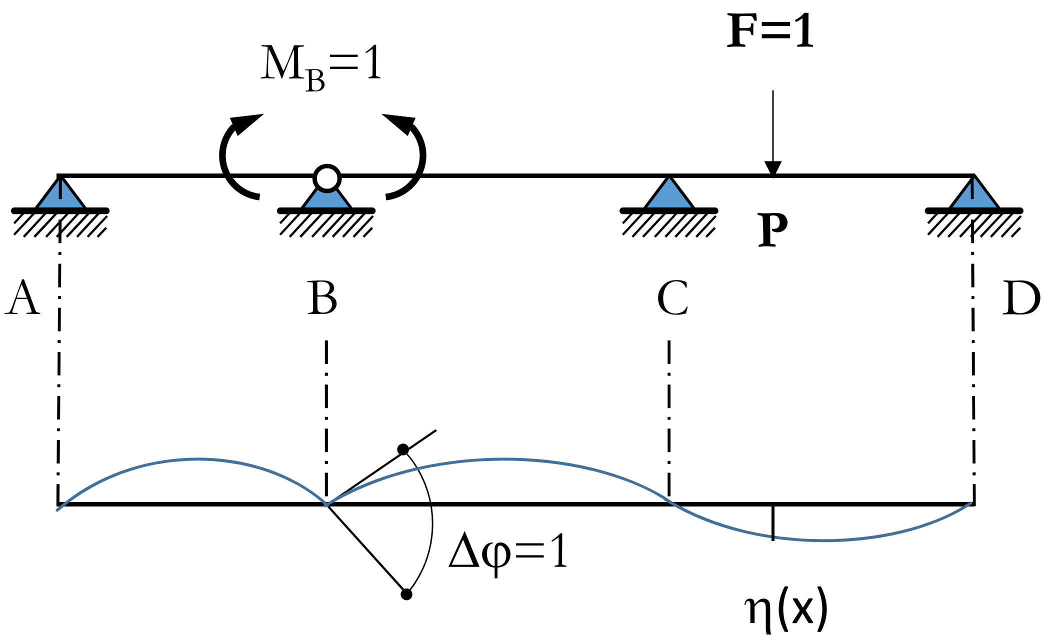
Esempio

Trave isostatica

Linea di influenza della reazione R_B

Linea di influenza

Metodo indiretto – linee di influenza delle reazioni



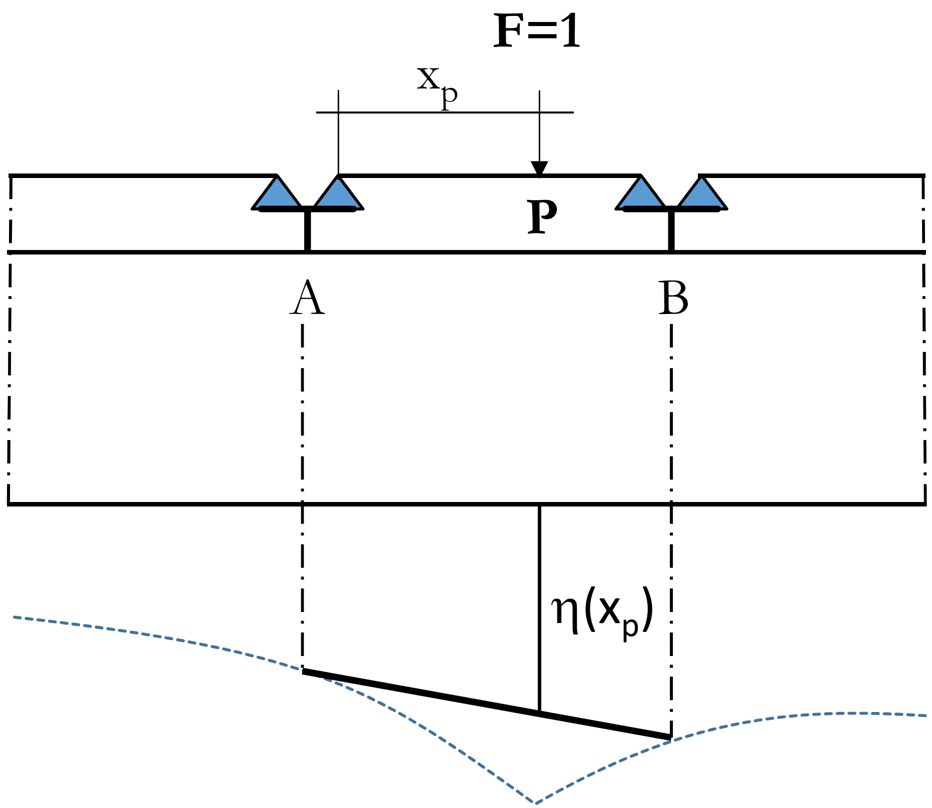
Esempio

Trave continua

Linea di influenza della reazione M_B

Linea di influenza

Metodo indiretto – linee di influenza delle reazioni



Carichi indiretti

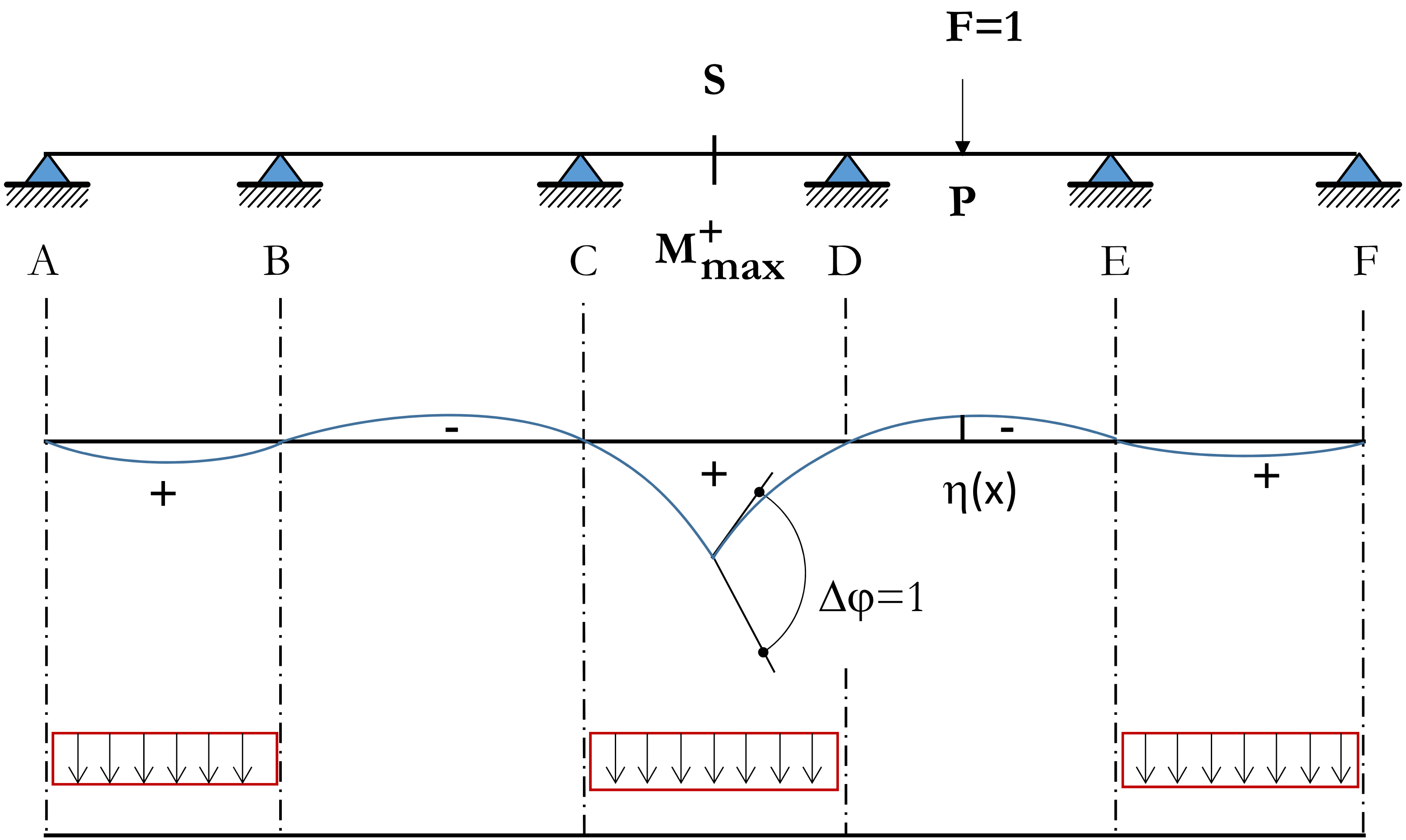
Quando le strutture secondarie sono costituite da travi semplicemente appoggiate, la l.d.i. cercata di ottiene da quella della struttura principale supposta direttamente caricata congiungendo con tratti rettilinei tutte le ordinate di detta linea posti sulla verticale per i punti di applicazione del carico.
Infatti :

$$\eta = R_A\, \eta_A + R_B\, \eta_B$$

Poiché R_A e R_B variano linearmente, anche η seguirà la stessa legge essendo una combinazione lineare dei primi due.

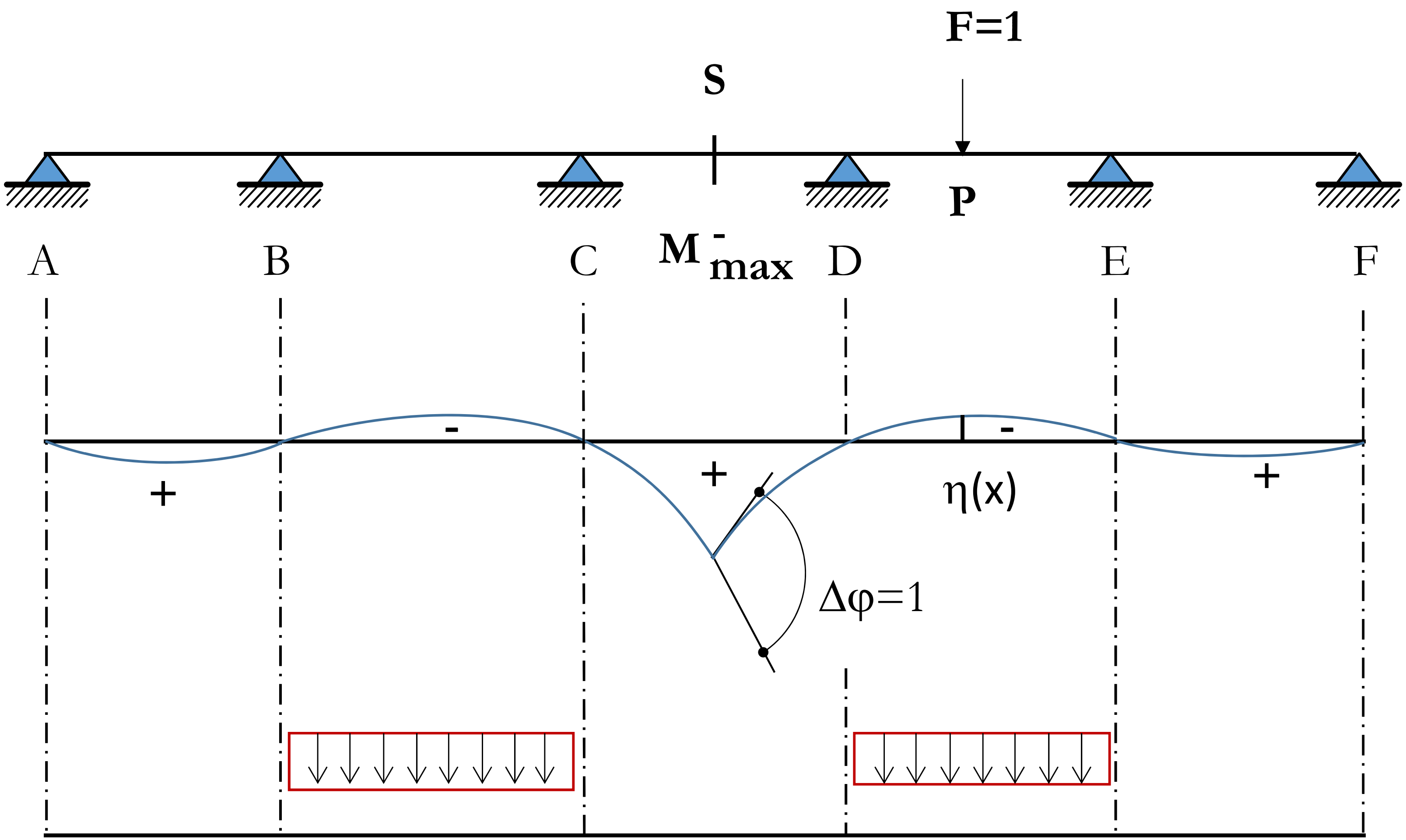
Linea di influenza

Metodo indiretto – sollecitazioni massime e minime



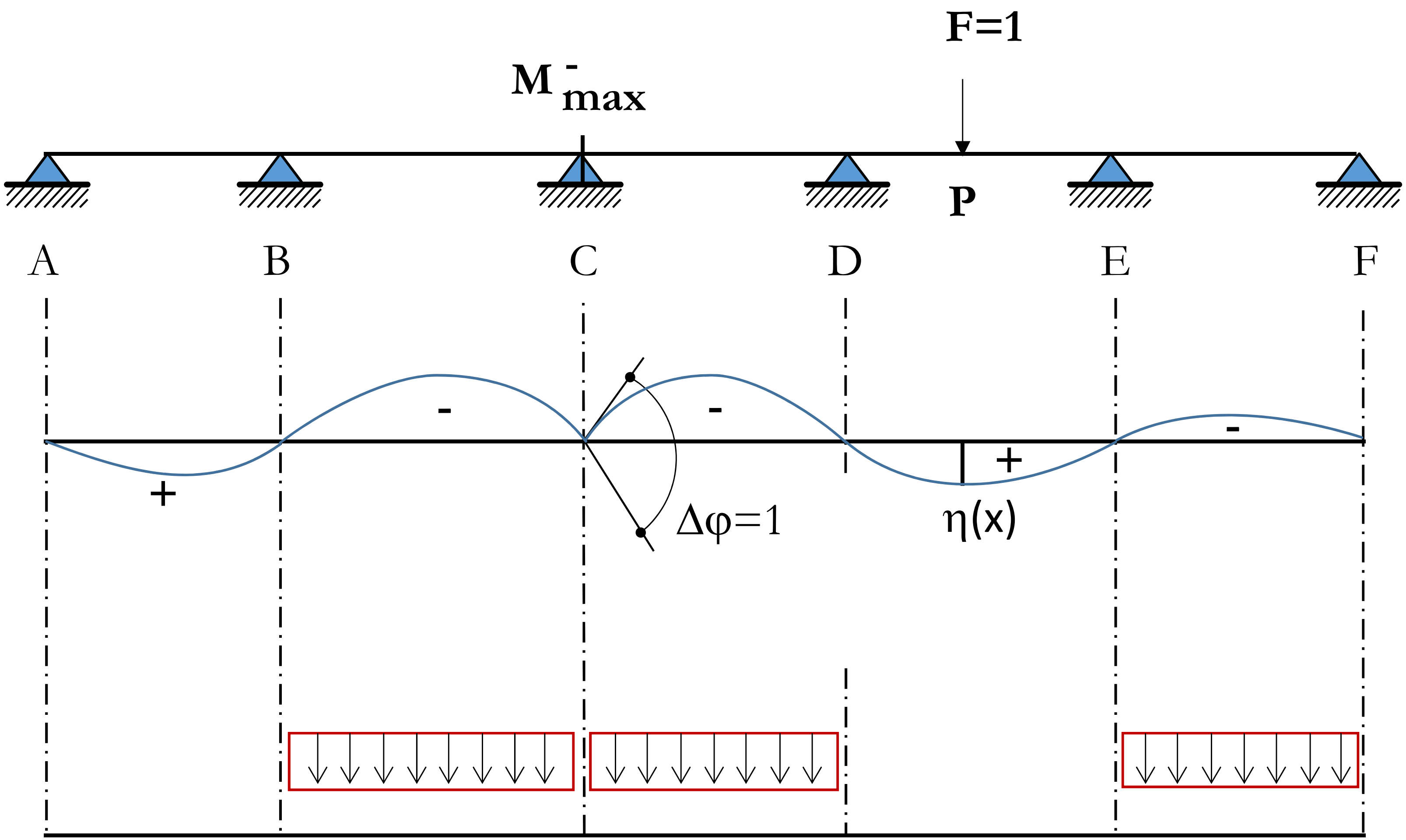
Linea di influenza

Metodo indiretto – sollecitazioni massime e minime



Linea di influenza

Metodo indiretto – sollecitazioni massime e minime



Linea di influenza

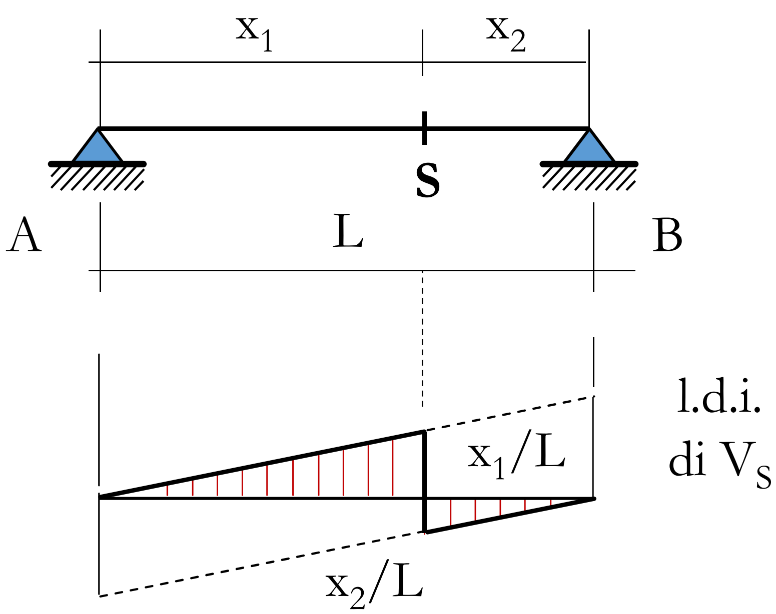
Metodo indiretto – sollecitazioni massime e minime

Calcolando le l.d.i. per un certo numero di sezioni e riportando in corrispondenza di ciascuno di queste sezioni il valore massimo o minimo dell’ente si hanno i diagrammi

dei massimi e dei minimi relativi a quel carico variabile.

Se a questi diagrammi si sommano quelli relativi ai carichi permanenti si hanno i diagrammi

dei massimi e dei minimi assoluti.



Carico uniforme segmentabile

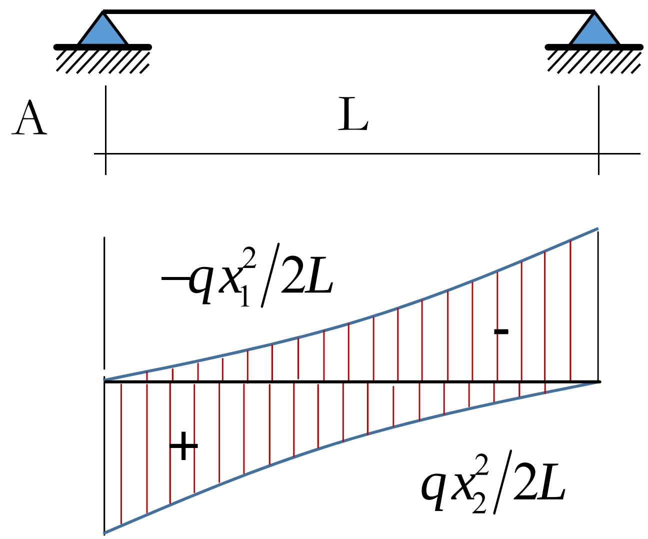


Diagramma dei massimi e minimi di V_S

Superfici di influenza

Linea di influenza

Superfici di influenza

Tutte le superfici di influenza si possono ottenere con opportune derivazioni dalla funzione di influenza della freccia di inflessione w, calcolata nel punto (x_0,y_0) in cui si vogliono eseguire le verifiche.

Per esempio : $$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

dove : $D = \dfrac{E s^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ (rigidezza flessionale della piastra)

Linea di influenza

Superfici di influenza

Il problema quindi si riconduce al calcolo della deformata w(x,y,)
per un carico unitario posto in (x_0,y_0).

La deformata si ottiene risolvendo l'equazione differenziale del 4° ordine :

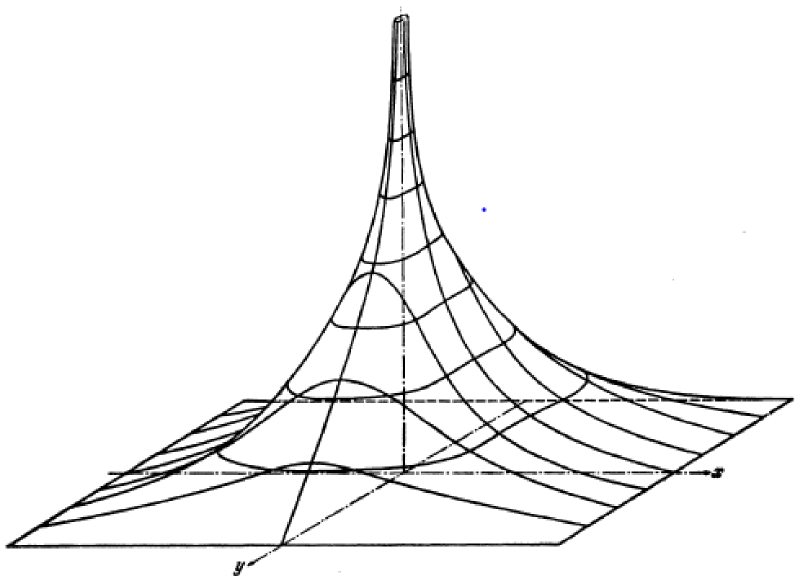
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D}$$

dove : $D=\dfrac{Es^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ (rigidezza flessionale della piastra)

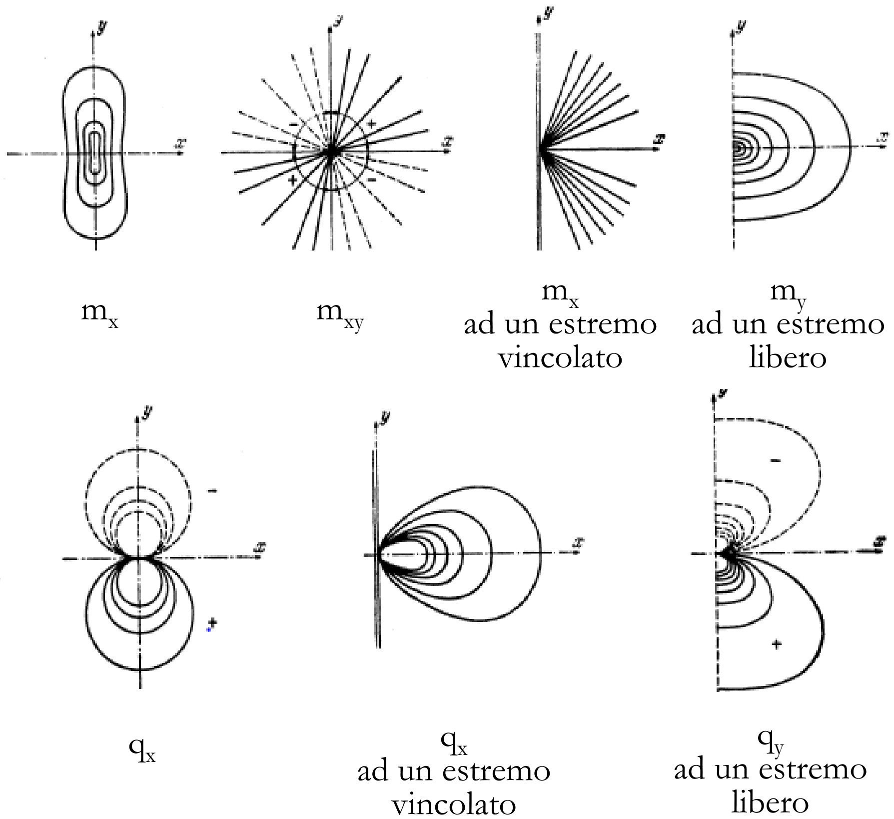
I vari metodi di calcolo delle superfici di influenza si differenziano nel modo di risolvere questa equazione.

Linea di influenza

Superfici di influenza



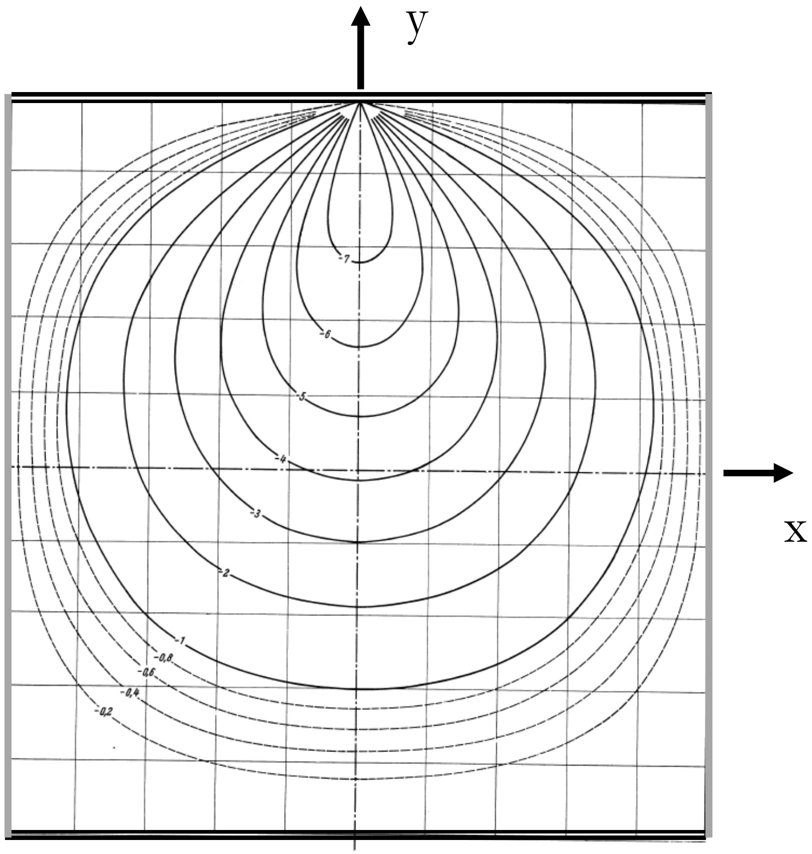
Proiezione isometrica
di una superficie di influenza del momento



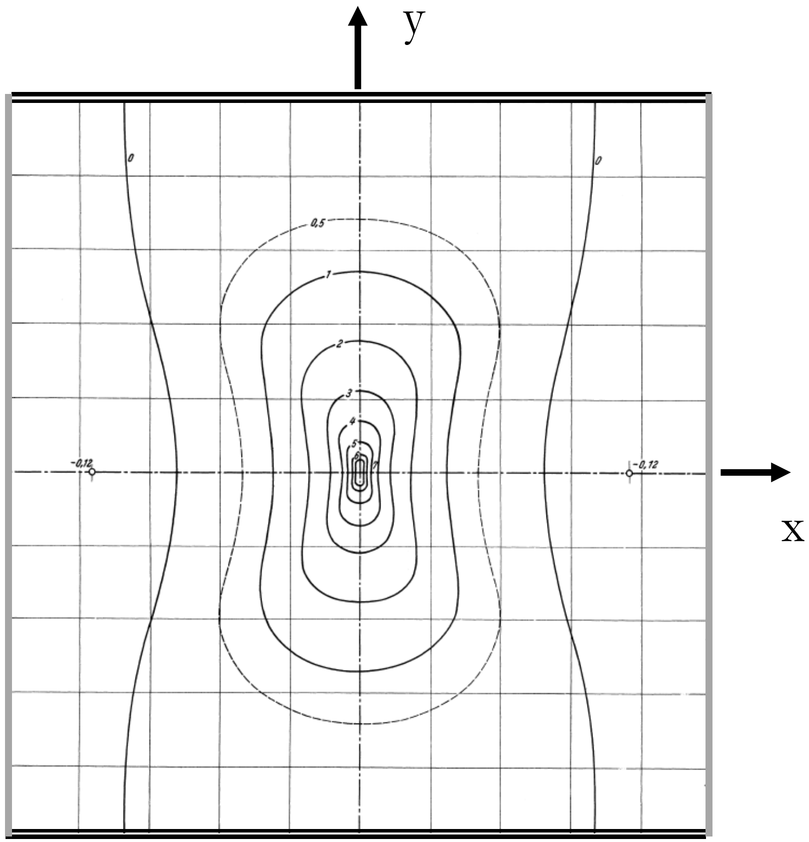
tratto da: Pucher (1964), *Influence surfaces of elastic Plates*, Springer Verlag, Wien, New York.

Linea di influenza

Superfici di influenza



Superficie di influenza del momento flettente m_y all'appoggio di una piastra quadrata appoggiata sui lati opposti



Superficie di influenza del momento flettente m_x al centro di una piastra quadrata appoggiata sui lati opposti

tratto da: Pucher (1964), *Influence surfaces of elastic Plates*, Springer Verlag, Wien, New York.

Linea di influenza

Superfici di influenza

Tra tutti i metodi si ricorda quello di Pucher che ha fornito le superfici di influenza per piastre rettangolari con diversi rapporti dei lati e diversamente vincolate.

L’utilizzazione pratica delle superfici di influenza è legata al fatto che esse sono le stesse per piastre di dimensioni diverse purché aventi lo stesso rapporto tra i lati.

Una volta in possesso di tabelle o grafici che forniscano le superfici di influenza per una piastra di riferimento di lati l_x^0 e l_y^0 tale che sia $l_y / l_y^0 = l_x / l_x^0$
si dovrà calcolare il rapporto di similitudine :

$$k = l_y / l_y^0 = l_x / l_x^0$$

e ridurre in scala il carico. Il carico lineare avrà nella piastra di riferimento la lunghezza s/k mentre il carico ripartito graverà su una superficie ridotta pari a A/k^2.

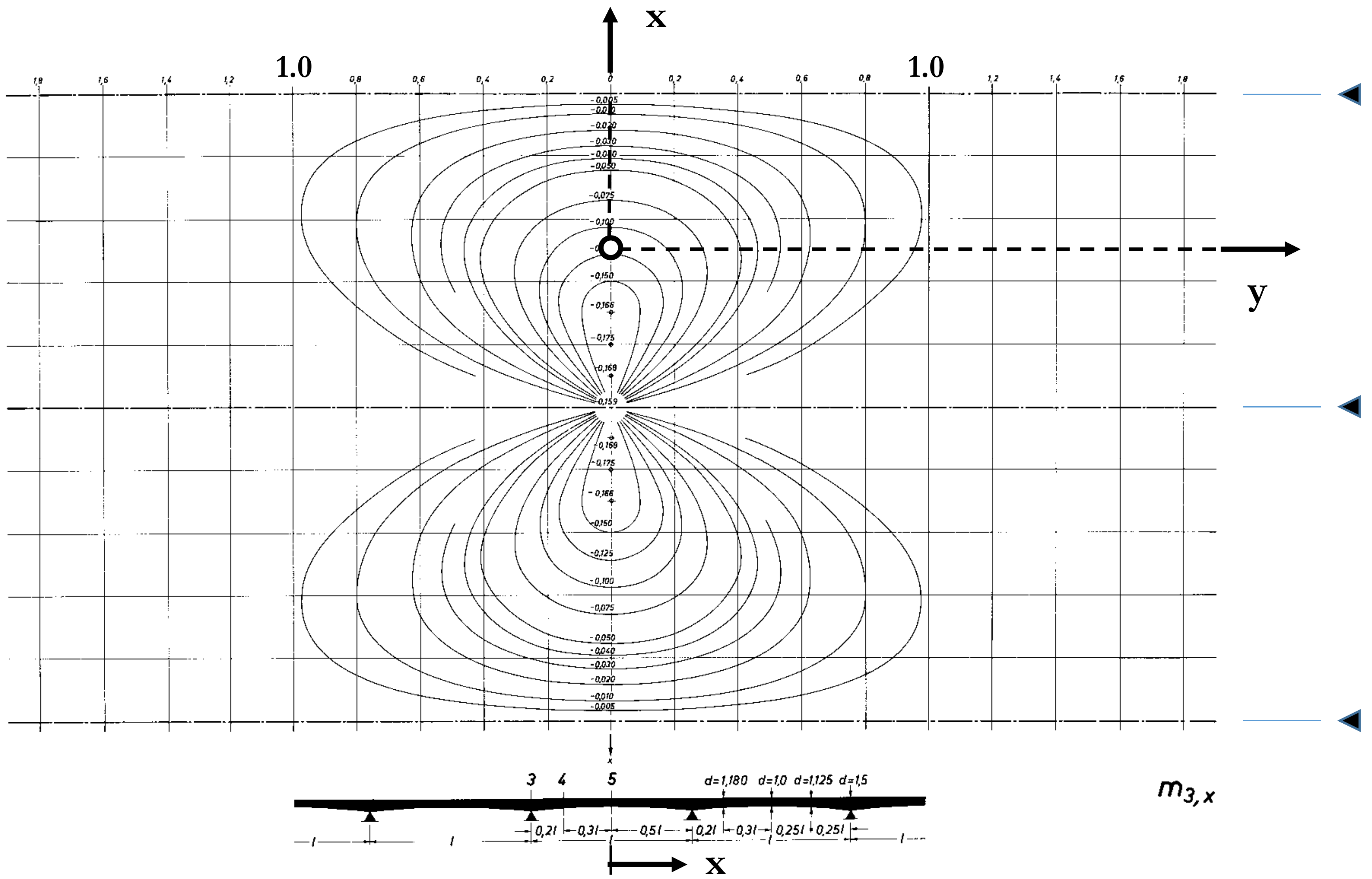
Linea di influenza

Superfici di influenza

Successivamente a Pucher,
Homberg e Ropes hanno fornito superfici di influenza piastre di lunghezza infinita continue su più appoggi e a spessore variabile.

Linea di influenza

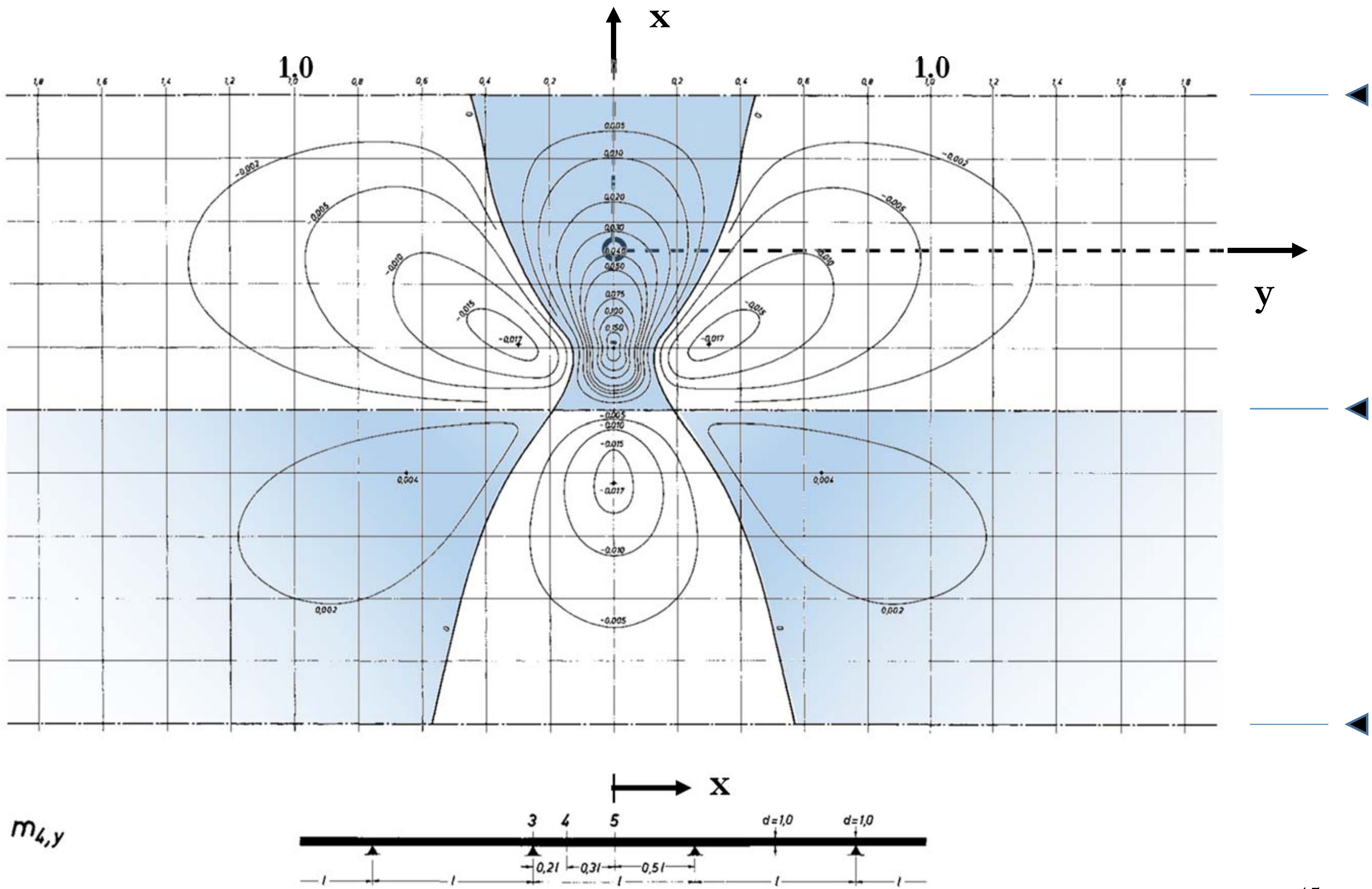
Superfici di influenza



tratto da: Homberg, H. (1965), Fahrbahnplatten mit Veränderlicher Dicke, Springer Verlag

Linea di influenza

Superfici di influenza



tratto da: Homberg, H. (1965), Fahrbahnplatten mit Veränderlicher Dicke, Springer Verlag

FINE