Constraint Programming – Tempo: 1 ora

Prof. Marco Gavanelli

15 giugno 2017

Esercizio 1 (4 punti)

Si consideri il seguente CSP:

```
Sa :: 1..10,
Sb :: 3..11,
Sc :: 2..8,
cumulative([Sa,Sb,Sc],[1,6,8],[1,1,1],1).
```

Si mostri la propagazione del vincolo supponendo che venga effettuato il pruning sulle parti obbligatorie.

Esercizio 2 (4 punti)

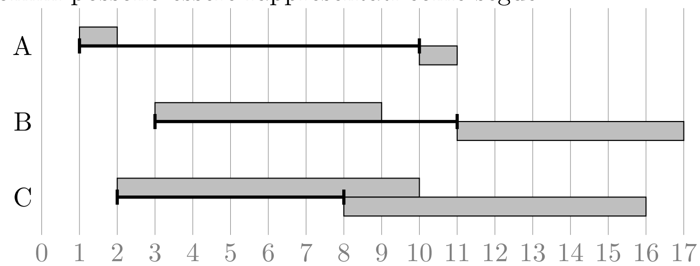
Si consideri il seguente CSP:

```
A:: 1..4, B:: 0..2, C:: 0..3,
A #< B, A #=< C, B #\= C.
```

Si mostri il come il CSP viene convertito in SAT tramite il *support encoding*. Si applichi la unit propagation al SAT risultante e si mostri il risultato.

Soluzione 1

I domini possono essere rappresentati come segue

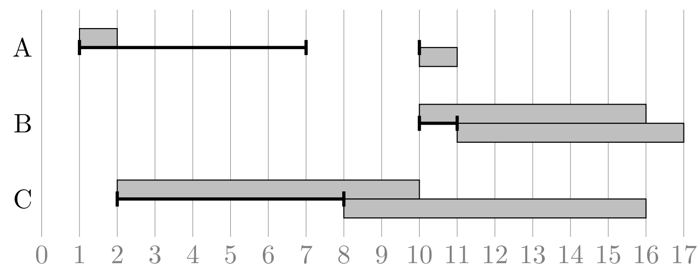


dove i rettangoli rappresentano la posizione più a sinistra e più a destra possibile delle attività.

L'attività C ha una parte obbligatoria dall'istante 8 all'istante 10, di conseguenza l'intervallo [8,10] viene occupato dall'attività C.

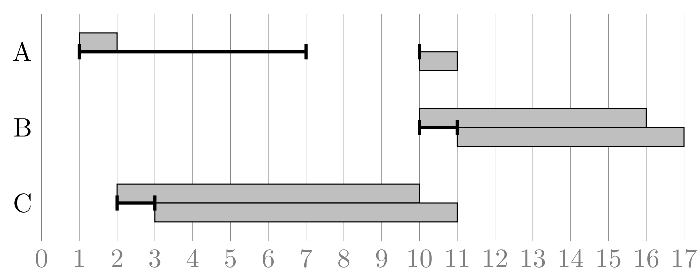
Si hanno le seguenti modifiche dei domini:

- Sa :: 1..7,10
- Sb :: 10..11



Ora l'attività B occupa obbligatoriamente l'intervallo [11..16]. Di conseguenza, viene ridotto il dominio di Sc:

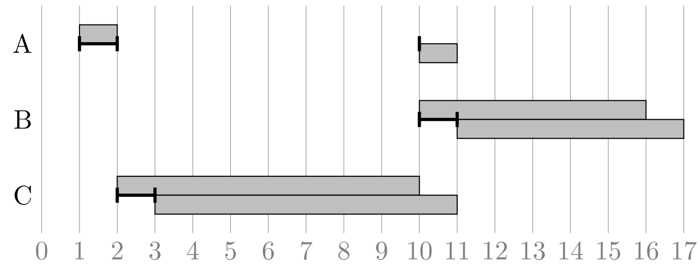
- Sc :: 2..3



Ora la parte obbligatoria di C va da 3 a 10, quindi i domini diventano:

- Sa :: 1..2,10
- Sb :: 10..11

- Sc :: 2..3



Soluzione 2

Codifica di variabili e domini: Per ogni variabile CSP e valore nel corrispondente dominio è presente una variabile SAT. Abbiamo quindi le variabili $a_1, a_2, a_3, a_4,\ b_0, b_1, b_2,\ c_0, c_1, c_2, c_3$.

Clausole At Least One:

$$\begin{array}{l} a_1 \lor a_2 \lor a_3 \lor a_4 \\ b_0 \lor b_1 \lor b_2 \\ c_0 \lor c_1 \lor c_2 \lor c_3 \end{array}$$

Clausole At Most One:

$$\begin{array}{lll} \neg a_1 \lor \neg a_2 & \neg b_0 \lor \neg b_1 & \neg c_0 \lor \neg c_1 \\ \neg a_1 \lor \neg a_3 & \neg b_0 \lor \neg b_2 & \neg c_0 \lor \neg c_2 \\ \neg a_1 \lor \neg a_4 & \neg b_1 \lor \neg b_2 & \neg c_0 \lor \neg c_4 \\ \neg a_2 \lor \neg a_3 & & \neg c_1 \lor \neg c_2 \\ \neg a_2 \lor \neg a_4 & & \neg c_1 \lor \neg c_3 \\ \neg a_3 \lor \neg a_4 & & \neg c_2 \lor \neg c_3 \end{array}$$

Vincoli: $A < B$:

$$\begin{array}{ll} \neg a_1 \lor b_2 & \neg b_0 \\ \neg a_2 & \neg b_1 \\ \neg a_3 & \neg b_2 \lor a_1 \\ \neg a_4 & \end{array}$$

$A \leq C$

$$\begin{array}{ll} \neg a_1 \lor c_1 \lor c_2 \lor c_3 & \neg c_0 \\ \neg a_2 \lor c_2 \lor c_3 & \neg c_1 \lor a_1 \\ \neg a_3 \lor c_3 & \neg c_2 \lor a_1 \lor a_2 \\ \neg a_4 & \neg c_3 \lor a_1 \lor a_2 \lor a_3 \end{array}$$

$B \neq C$

$$\begin{array}{ll} \neg b_0 \vee c_1 \vee c_2 \vee c_3 & \neg c_0 \vee b_1 \vee b_2 \\ \neg b_1 \vee c_0 \vee c_2 \vee c_3 & \neg c_1 \vee b_0 \vee b_2 \\ \neg b_2 \vee c_0 \vee c_1 \vee c_3 & \neg c_2 \vee b_0 \vee b_1 \\ & \neg c_3 \vee b_0 \vee b_1 \vee b_2 \end{array}$$

Unit Propagation: Le clausole con un solo letterale sono:

$$\begin{array}{lll} \neg a_2 & \neg a_3 & \neg a_4 \\ \neg b_0 & \neg b_1 & \\ \neg c_0 & & \end{array}$$

da cui si ha che gli atomi a_2, a_3, a_4, b_0, b_1 e c_0 sono falsi. Dalle clausole at-least-one, si ottiene che a_1 e b_2 sono veri.

Dalla clausola $\neg c_2 \vee b_0 \vee b_1$, si ottiene che c_2 è falso.

Il risultato è equivalente all'Arc-Consistency sul CSP originario, infatti applicando l'Arc-Consistency si ottiene $A = 1, B = 2, C :: [1, 3]$.