Tecniche di controllo multivariabile

Introduzione a Matlab e Simulink
(con Control Systems Toolbox)

Department of Engineering Ferrara

Università degli Studi di Ferrara

Matlab e Simulink

Matlab (Matrix Laboratory)

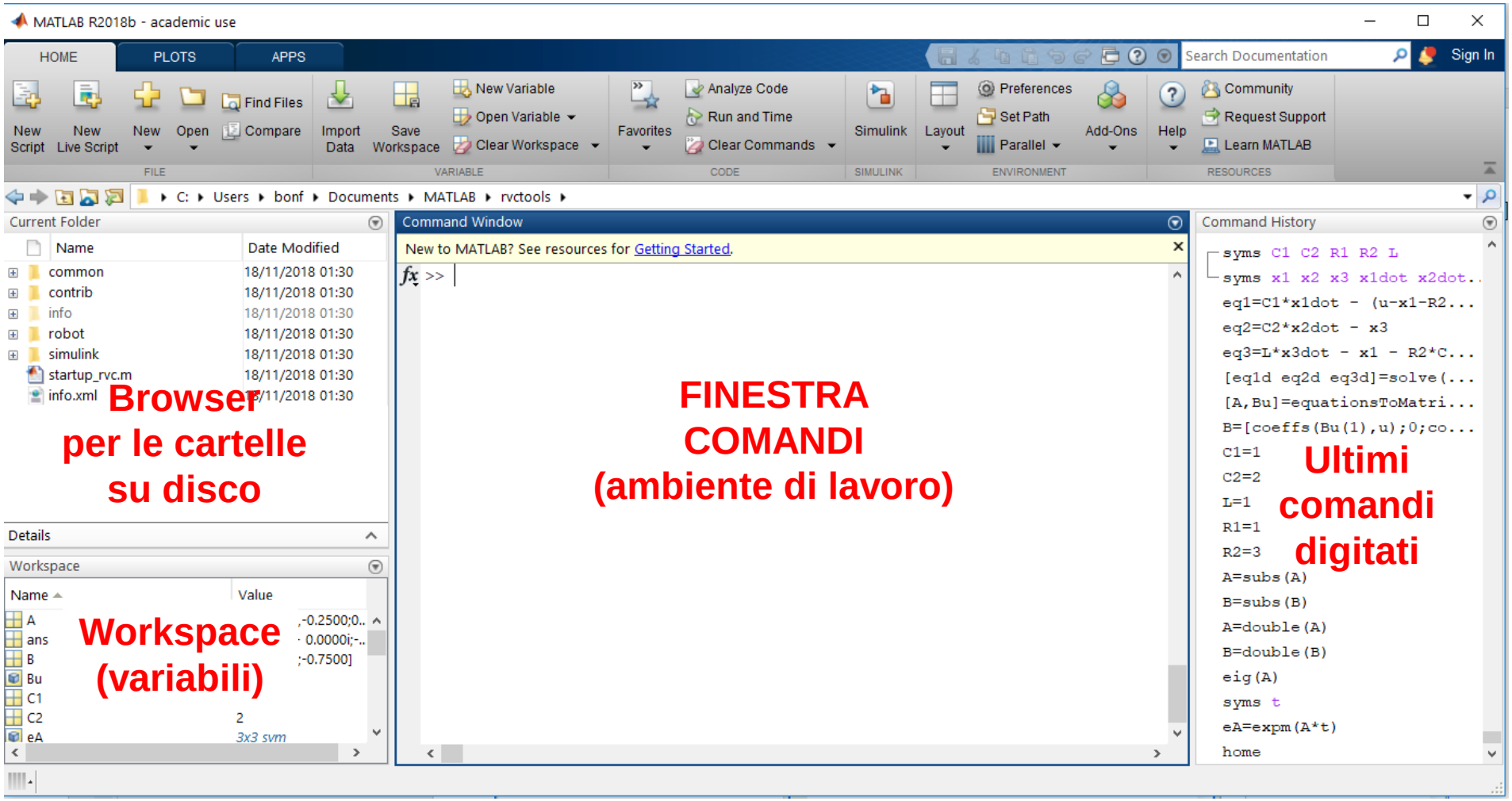
- Ambiente di sviluppo per il calcolo numerico
- Comprende l'omonimo linguaggio di programmazione con interprete dei comandi
- Include svariati toolboxes (collezioni tematiche di funzioni)
- Efficace per analisi, elaborazione e visualizzazione dati

Simulink

- Software per la modellazione e simulazione di sistemi dinamici
- Integrazione e interazione con Matlab
- Programmazione grafica basata su schemi a blocchi

Ampiamente utilizzati nel mondo della ricerca e dell'industria

Matlab: interfaccia principale (R2018b)



Matlab: definizione di variabili, vettori e matrici

Definire variabile scalare

```
>> x = 3
```

Definire vettore riga (1×3)

```
>> x = [1 2 3]
```

Idem, ma senza echo dell'output

```
>> x = [1 2 3];
```

Definire vettore colonna (3x1)

```
>> x = [1; 2; 3]
```

(oppure `>> x = [1 2 3]'`)

Definire matrice 3x4

```
>> A = [1 2 3 4;5 6 7 8;9 10 11 12]
```

Accedere / modificare elemento di riga 2 e colonna 1

```
>> A(2,1) = 0
```

Matlab: operazioni su matrici

- Le "solite" operazioni matematiche: **`+,-,*,/,^`**
- **Es. `>> A^3`** (potenza di matrice, solo se quadrata!)
- Precedute dal punto, sono eseguite elemento per elemento anziché in senso matriciale/vettoriale
- Operazioni specifiche per matrici / vettori:
  - Trasposta: **`A'`**
  - Determinante: **`det(A)`**
  - Inversa: **`inv(A)`**
  - Autovalori: **`eig(A)`**
  - Rango: **`rank(A)`**
  - Polinomio caratteristico: **`poly(A)`**
  - Esponenziale di matrice: **`expm(A)`**
  - Radici di un polinomio: **`roots(x)`** (x vettore dei coeff.)

Matlab: inizializzazione di matrici *standard*

- Comandi che forniscono matrici caratteristiche, utili per inizializzare variabili opportune:
  - Matrice m x n con tutti elementi nulli: **`zeros(m,n)`**

    NOTA: `zeros(m)` fornisce matrice quadrata
  - Matrice m x n con tutti elementi unitari: **`ones(m,n)`**

    NOTA: `ones(m)` fornisce matrice quadrata
  - Identità n x n: **`eye(n)`**
  - Matrice quadrata diagonale (con elementi sulla diagonale nel vettore V): **`diag(V)`**

Matlab: il workspace

- I risultati di tutti i comandi digitati vengono memorizzati nel cosiddetto workspace della sessione
- Il workspace viene cancellato all'uscita dal Matlab!
- Il contenuto del workspace si può salvare (anche parzialmente) e ripristinare:
  - **`save nomefile`** (estensione di default: **.mat**)
  - **`save nomefile variabile1 variabile2`** (salva solo le variabili indicate)
  - **`load nomefile`**
  - **`clear`**: cancella il contenuto del workspace!!

Matlab: script file .m

- File testuale contenente una successione di comandi modificabile tramite l'editor window
- L'esecuzione dello script (pulsante play) consiste nell'esecuzione di un comando alla volta

Cicli

```
for i=1:10
    ...
end


while i<10
    ...
end
```

Condizioni

```
if i<1
...
elseif i<20
...
else
...
end
```

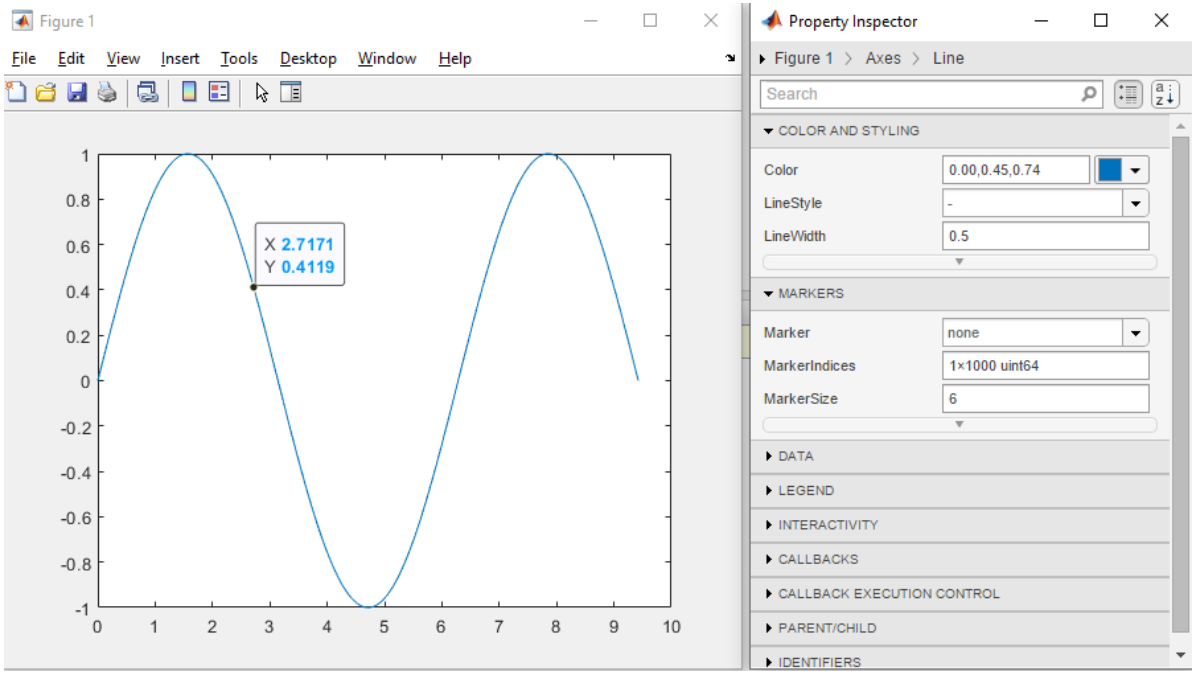
Matlab: visualizzazione dati

- Plot, figure e property inspector

```
>> t=0:0.001:3*pi
>> plot(t,sin(t))
```

Vettore ascisse

Vettore ordinate



Esempio: sistema LTI tempo discreto

- Creare uno script matlab che visualizzi il moto e la risposta del seguente sistema in k passi

$$\begin{cases} x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) = Cx(i) + Du(i) \end{cases}$$

Con:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 3 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = [1\ 0], D = [0\ 1], u \text{ costante}$$

Esempio: script

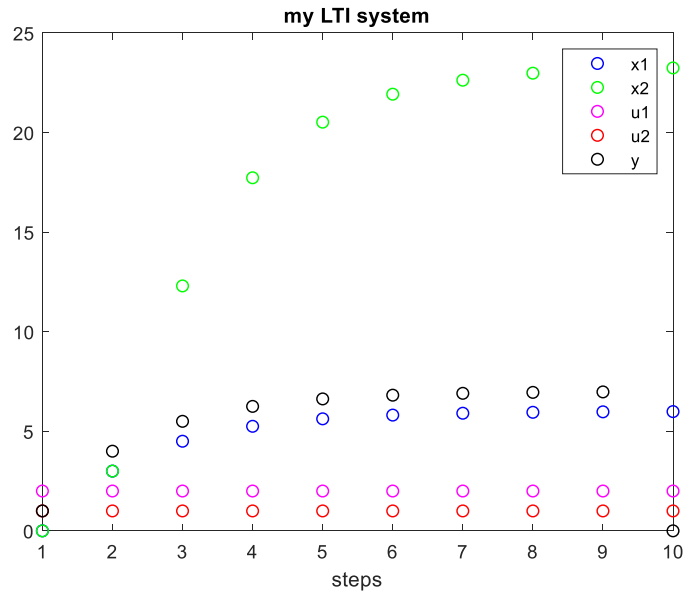
```
%% System
A = [0.5 0;3 0.1];
B = [1 1;1 1];
C = [1 0];
D = [0 1];
k = 10; % number of steps

%% input
u = zeros(2,k); % input
u(1,:) = 2*ones(1,k);
u(2,:) = 1*ones(1,k);

%% init state and output
x = zeros(2,k);
y = zeros(1,k);

%% compute state and output
for i=1:k-1
    x(:,i+1) = A*x(:,i) + B*u(:,i);
    y(i) = C*x(:,i) + D*u(:,i);
end
```

```
%% plot
plot(x(1,:),'bo')
hold on
plot(x(2,:),'go')
plot(u(1,:),'mo')
plot(u(2,:),'ro')
plot(y,'ko')
title('my LTI system')
legend('x1','x2','u1','u2','y')
xlabel('steps')
```



Matlab: Control System Toolbox

- Calcolo delle matrici di raggiungibilità e osservabilità

```
>> A = [10 1 ; -1 1];
>> B = [1; 1];
>> C = [0 1];

>> P = ctrb(A,B)

P =

     1    11
     1     0

>> Q = obsv(A,C)

Q =

     0     1
    -1     1
```

Nota: in Matlab è detta matrice di controllabilità, equivale a P = [B A*B]

Nota: equivale a Q = [C ; C*A]

Matlab: Control System Toolbox

- La funzione **`sys=ss(A,B,C,D)`** crea l'oggetto rappresentativo del modello nello spazio degli stati a partire dalle matrici A,B,C,D

```
>> sys = ss([-2 0;-1 -11],[1;0],[0 1],2)

sys =

  A =
        x1   x2
   x1   -2    0
   x2   -1  -11

  B =
       u1
   x1   1
   x2   0

  C =
        x1  x2
   y1    0   1

  D =
        u1
   y1    2

Continuous-time state-space
model.
```

Matlab: Control System Toolbox

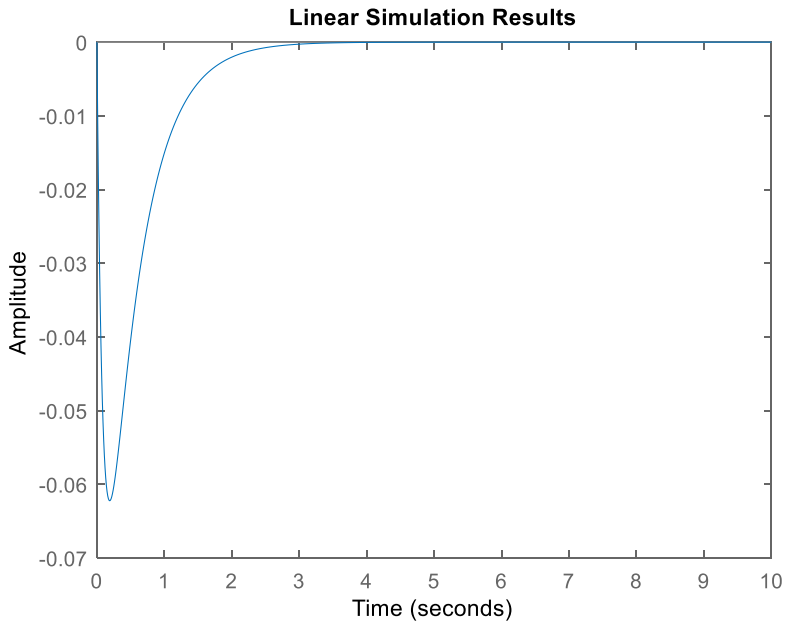
- La funzione **`y=lsim(sys,u,t,x0)`** simula l'andamento nel tempo del sistema a partire dalle condizioni iniziali e ne restituisce l'uscita

```
>> t=[0:0.01:10];
>> u=zeros(size(t));
>> x0 = [1 0];
>> y=lsim(sys,u,t,x0);
```

NOTA: se chiamata così

```
>> lsim(sys,u,t,x0)
```

viene aperta la finestra di analisi grafica per sistemi LTI → → → → →



Matlab: Control System Toolbox

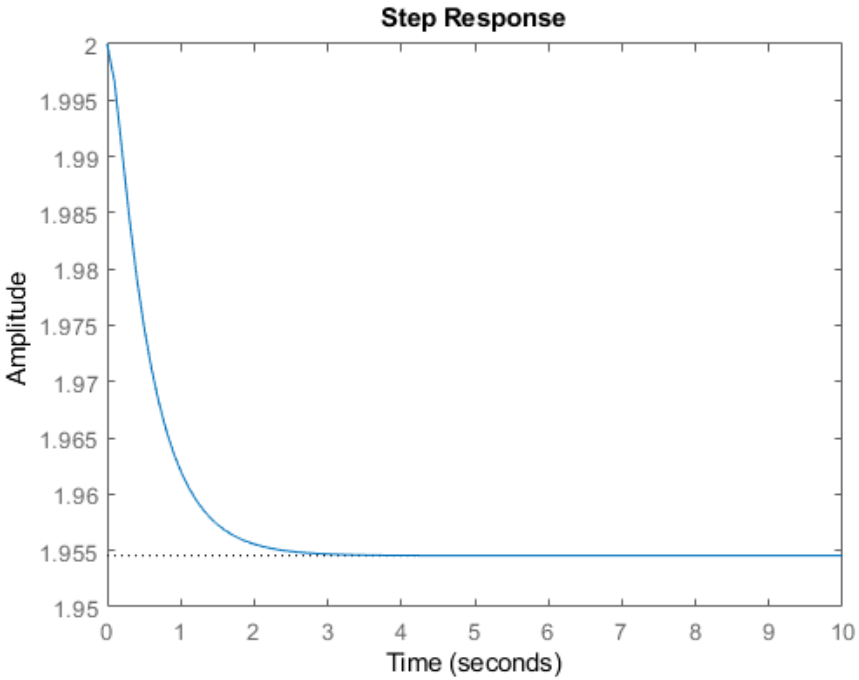
- La funzione **`y=step(sys,t)`** simula l'andamento nel tempo del sistema supponendo che l'ingresso sia un gradino unitario

```
>> t=[0:0.01:10];
>> y=step(sys,t);
```

NOTA: se chiamata così

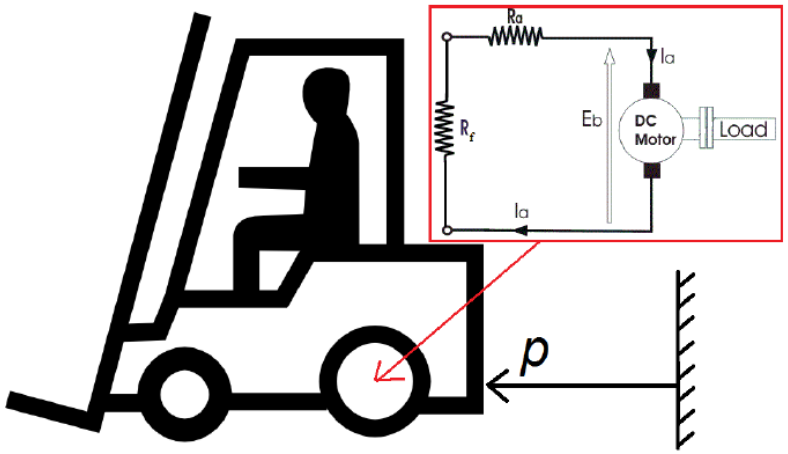
```
>> step(sys,t)
```

viene aperta la finestra di analisi grafica per sistemi LTI → → → → →



Esercizio

- Modello di un carrello elevatore a trazione elettrica in modalità di frenatura



$$m\ddot{p} + b\dot{p} + \frac{k_m^2}{R_a + R_f}\dot{p} = 0$$

$$x_1 = p;\ x_2 = \dot{p};$$

m = 1000; b = 100; R_a = 10; R_f = 90 ; k_m = 300;

Si determini lo spazio percorso e la velocità raggiunta in 12 secondi dal veicolo (i.e. x(t) con t=12) in modalità di frenata, considerando una velocità iniziale di 5m/s, vale a dire:

$$x(0) = [0 \quad 5]^T$$

Soluzione esercizio

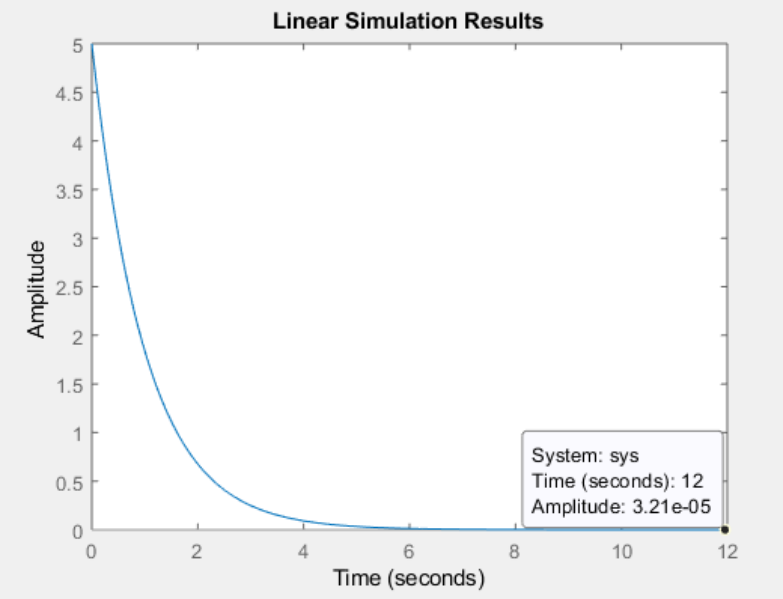
```
%% parameters
m = 1000;
b = 100;
Ra = 10;
Rf = 90;
Km = 300;

%% system
A = [0,1;
     0, -(Km^2 + Ra*b +
Rf*b)/(m*(Ra + Rf))] ;

B = [0;0];
% velocity as output
C = [0 1];
D = 0;
```

```
sys = ss(A,B,C,D);
t = linspace(0,12,300);
u = zeros(size(t)); % no input
x0 = [0;5];

%% simulate LTI system
lsim(sys,u,t,x0)
```



Soluzione alternativa esercizio

- Risolvere l'esercizio in forma numerica

```
>> x0 = [0;5];
>> tf = 12;

x_12 = expm(A*tf)*x0

x_12 =

    5.0000
    0.0000
```

NOTA: il risultato è arrotondato, di default Matlab mostra solo 4 cifre dopo il punto decimale. Per mostrare più cifre:

```
>> format long
>> x_12
x_12 =
   4.999969278938233
   0.000030721061767
```

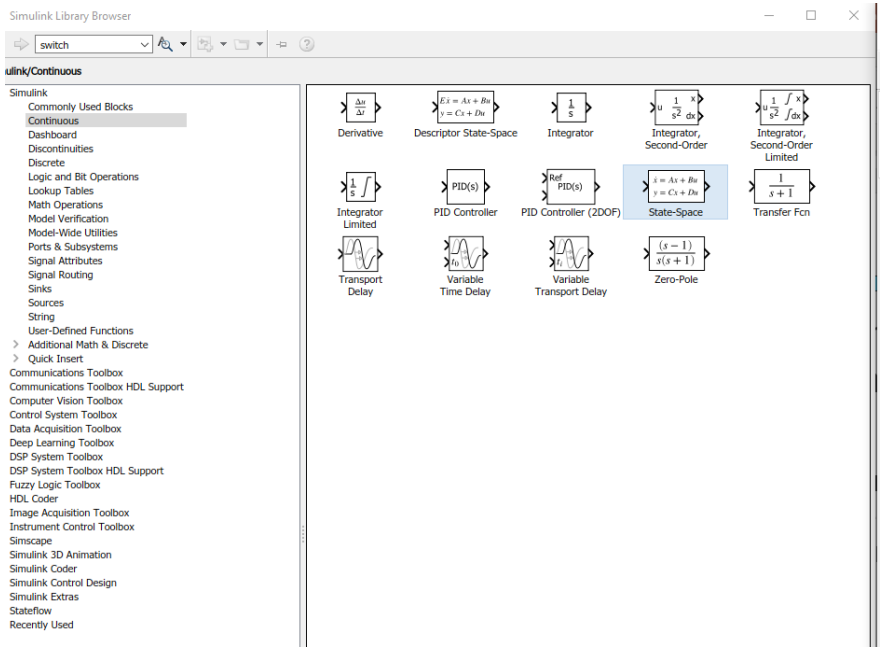
Simulink

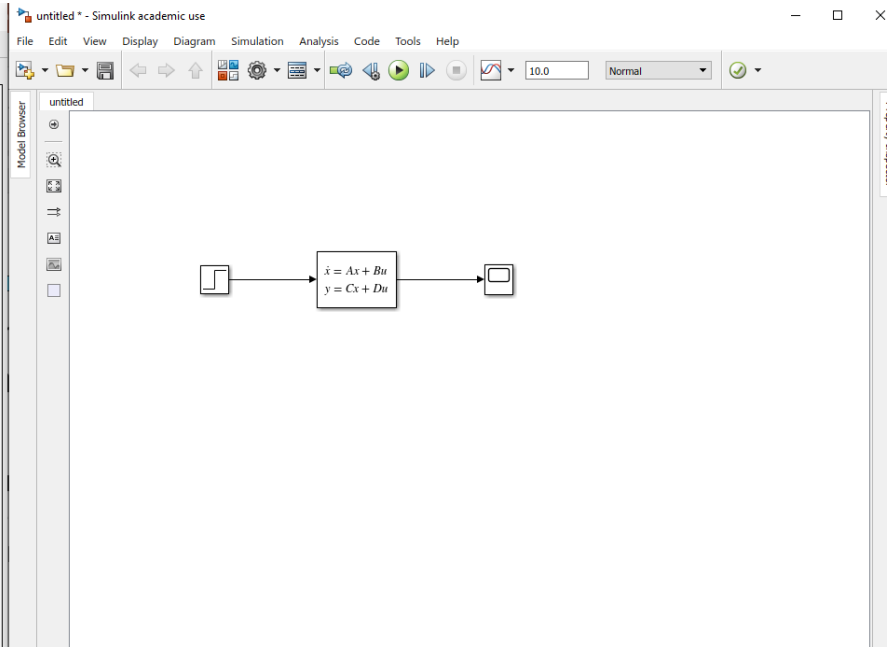
La simulazione di un sistema dinamico con Simulink consiste in due fasi fondamentali:

- **Modellistica**: Creazione di un modello grafico del sistema da simulare, inserendo e connettendo blocchi rappresentativi di sistemi multivariabile tempo continuo, tempo discreto, lineari e non lineari

- **Simulazione** del comportamento del sistema durante una sua evoluzione temporale su un arco di tempo definito. Simulink in questa fase utilizza le informazioni contenute nel modello grafico per generare le equazioni dinamiche ad esso associate e risolverle numericamente

Simulink: interfaccia principale



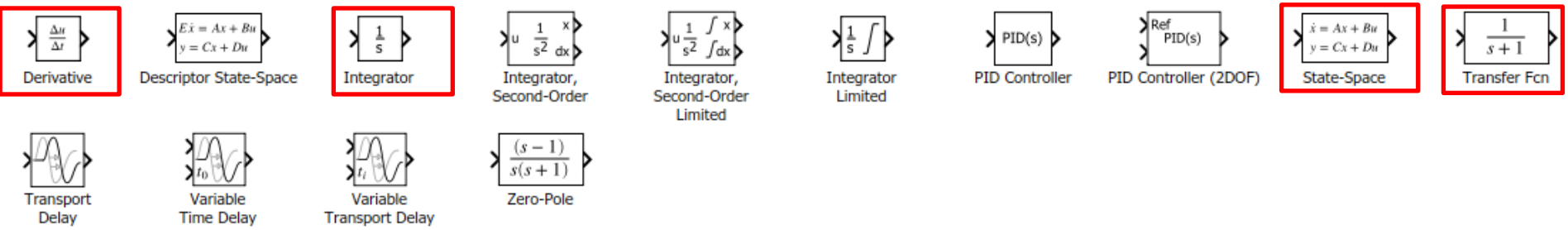


Library browser

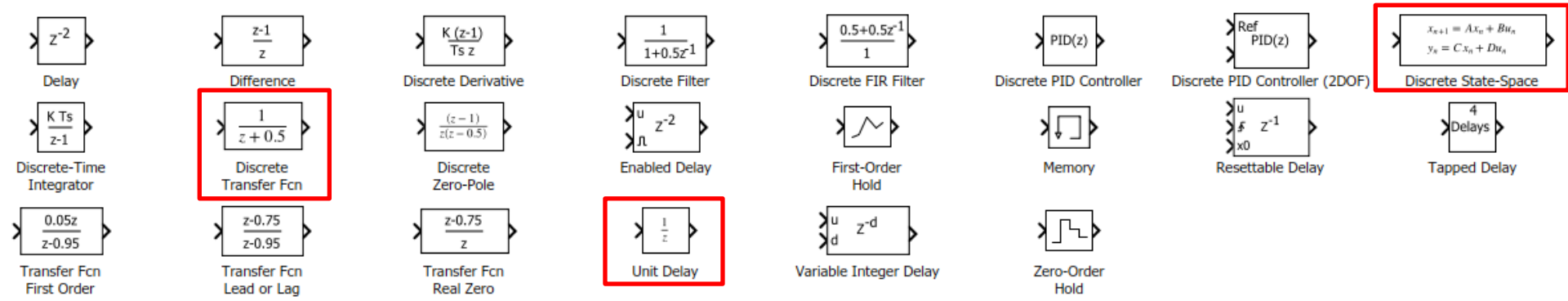
Model editor

Simulink: blocchi principali

- Continuous:

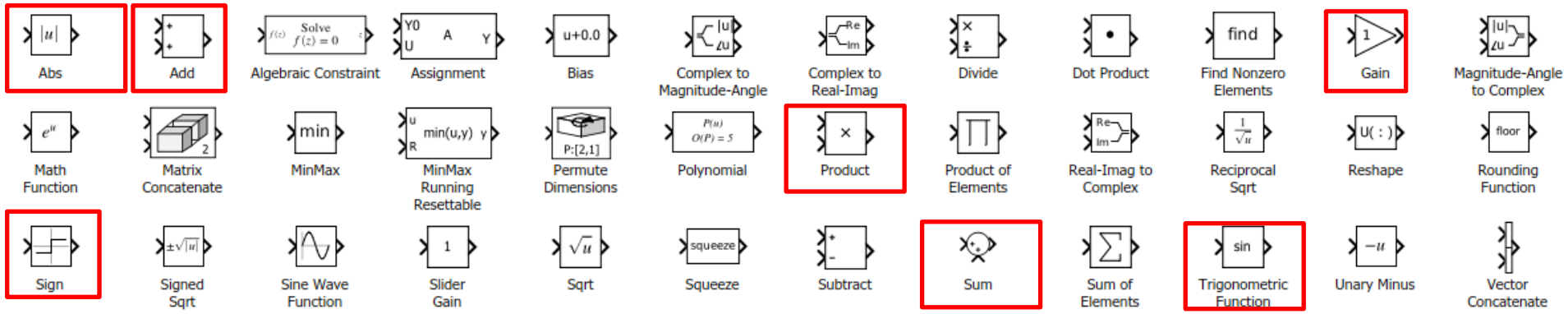


- Discrete:



Simulink: blocchi principali

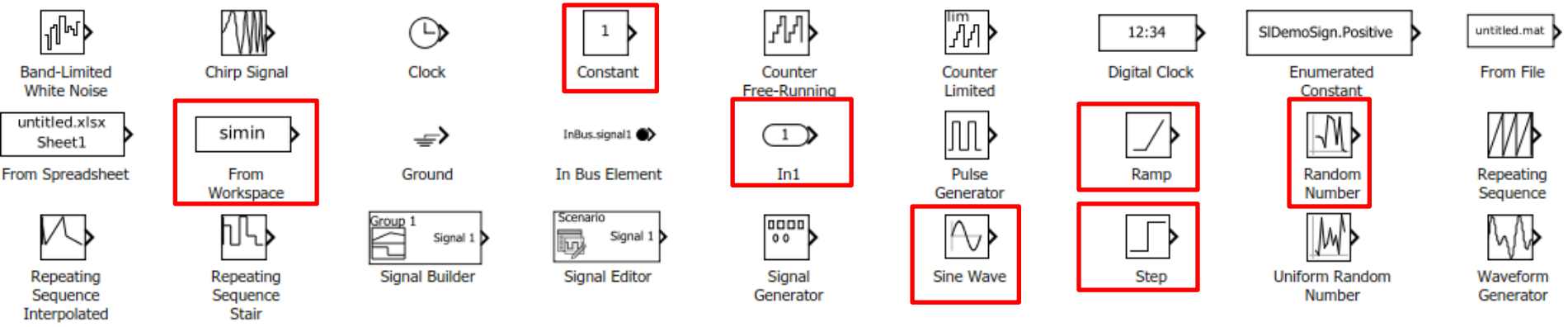
- Math:



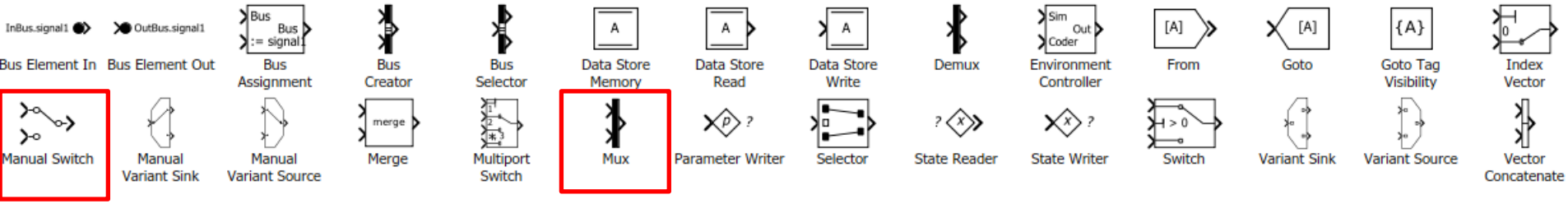
- Sinks:

Simulink: blocchi principali

- Sources:



- Signal routing:

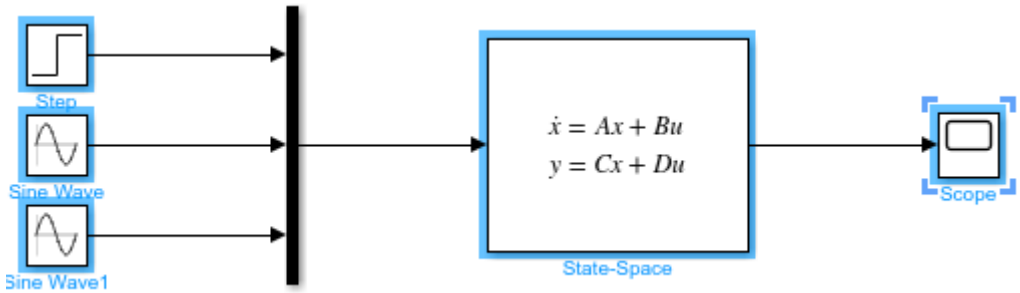


Esempio: Sistema LTI multivariabile

- Inizializzazione parametri:

```
>> A = [-1 0; -2 -2];
>> B = [1 1 0;0 0 1];
>> C = [1 0; 1 1];
>> D = [1 0 0;0 0 1];
```

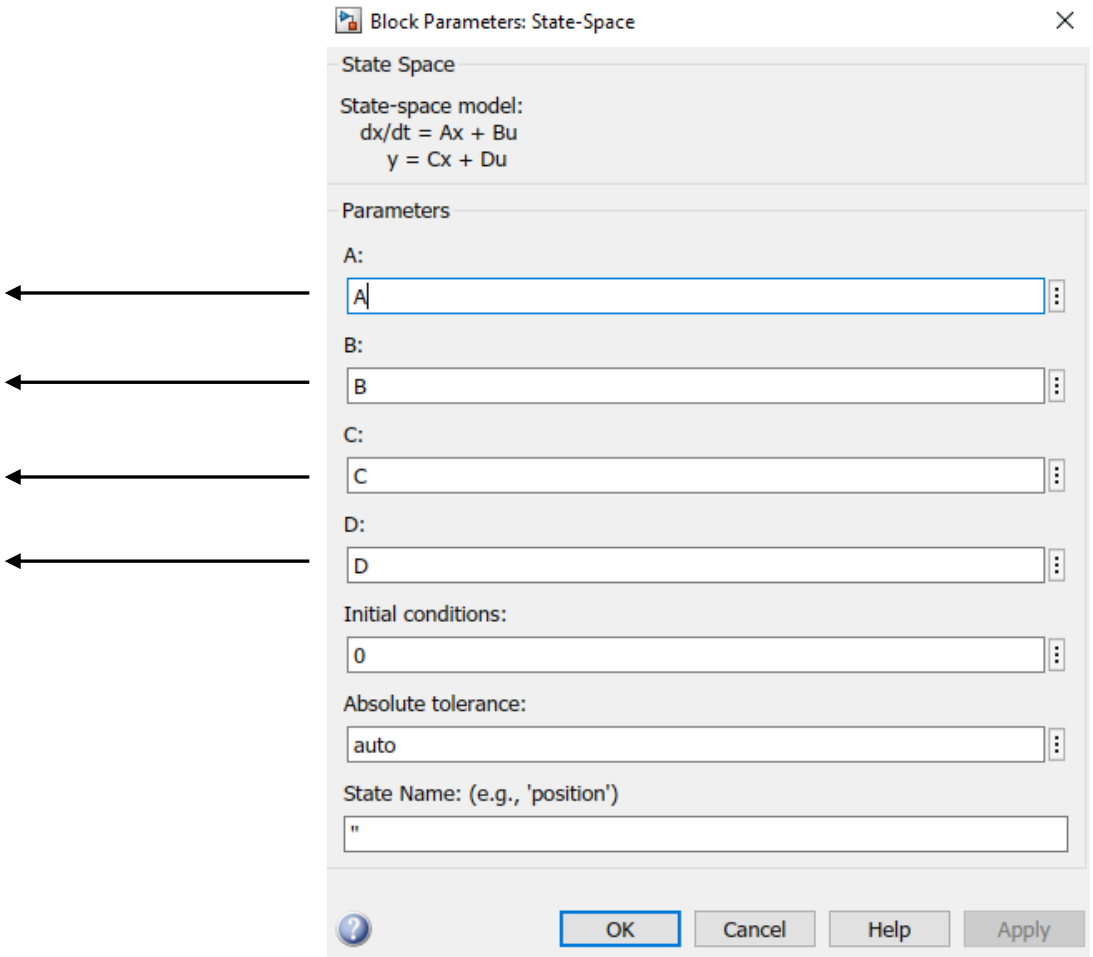
- Simulink model:



Esempio: Sistema LTI multivariabile

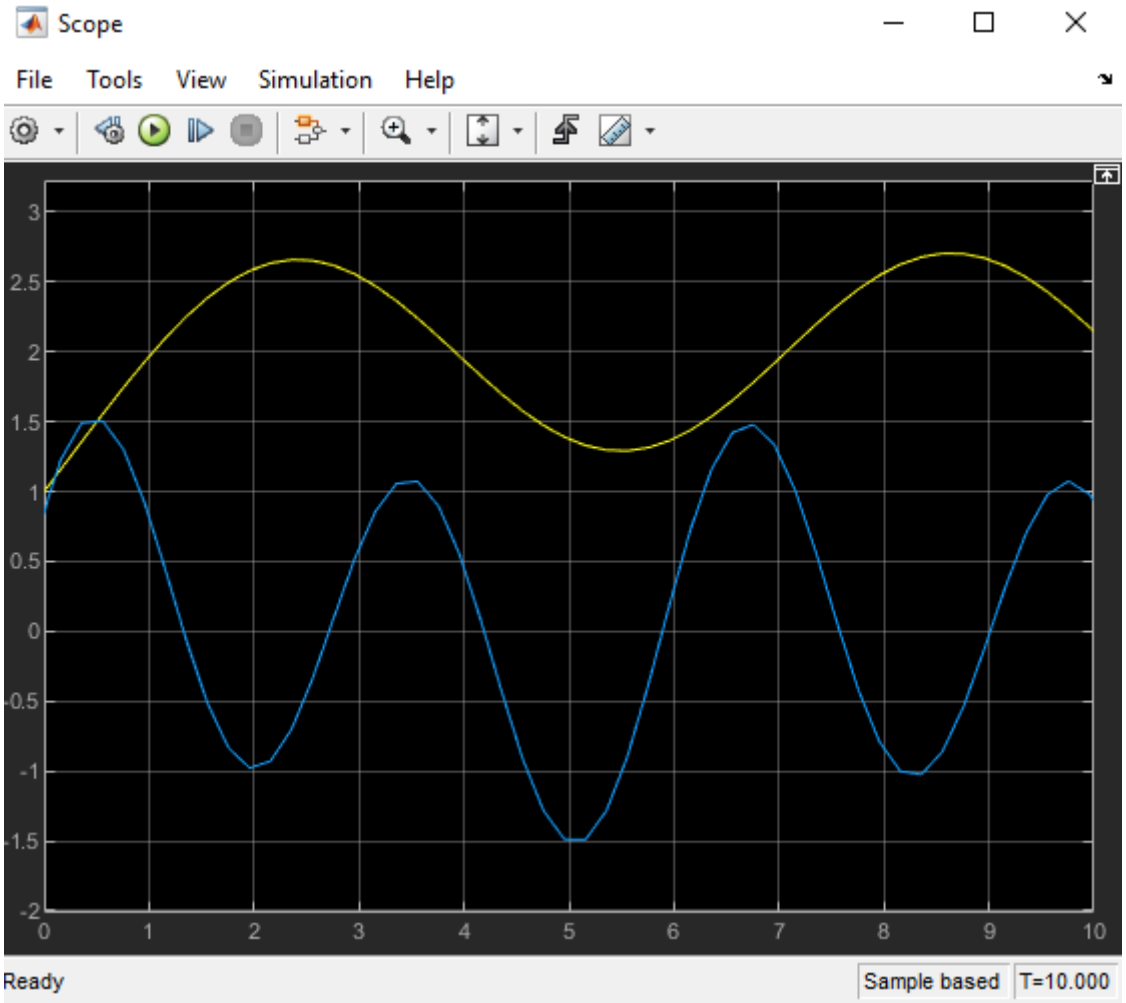
- Configurazione blocco state-space

Variabili caricate dal workspace di Matlab



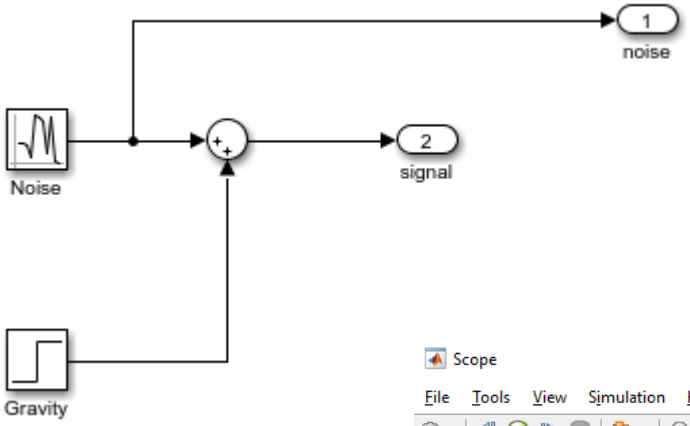
Esempio: Sistema LTI multivariabile

- Simulazione (ingressi parametrizzati a piacere)

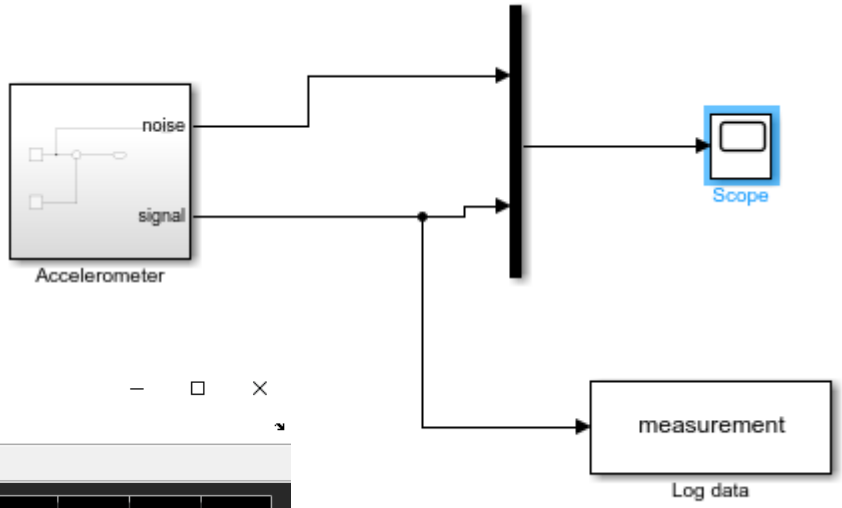


Esempio: l'accelerometro

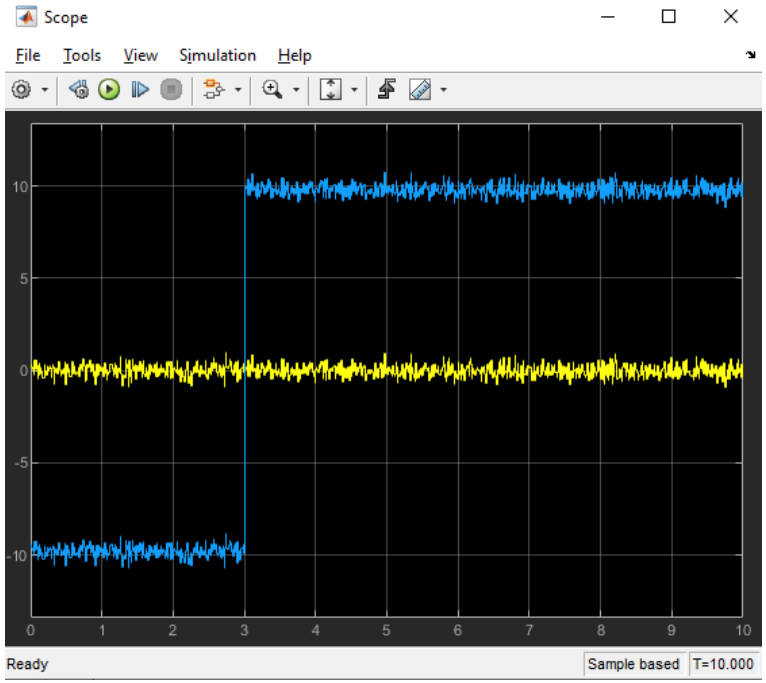
- Subsystem:



- System:



- Scope:



Esercizio: retroazione stato - ingresso

- Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

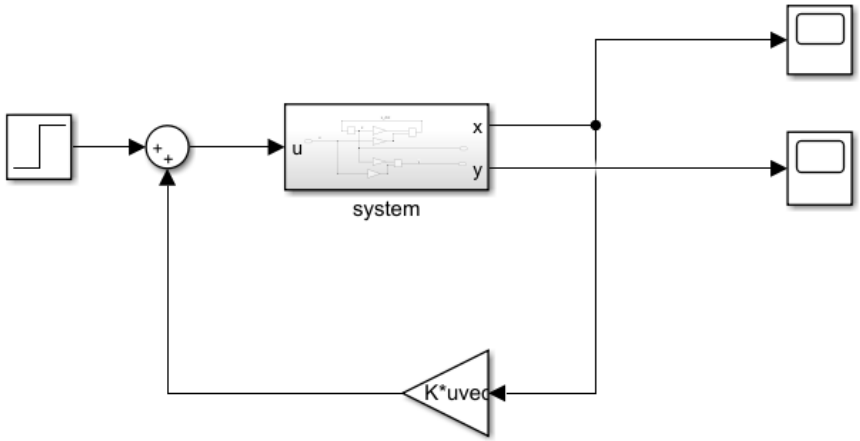
Con:

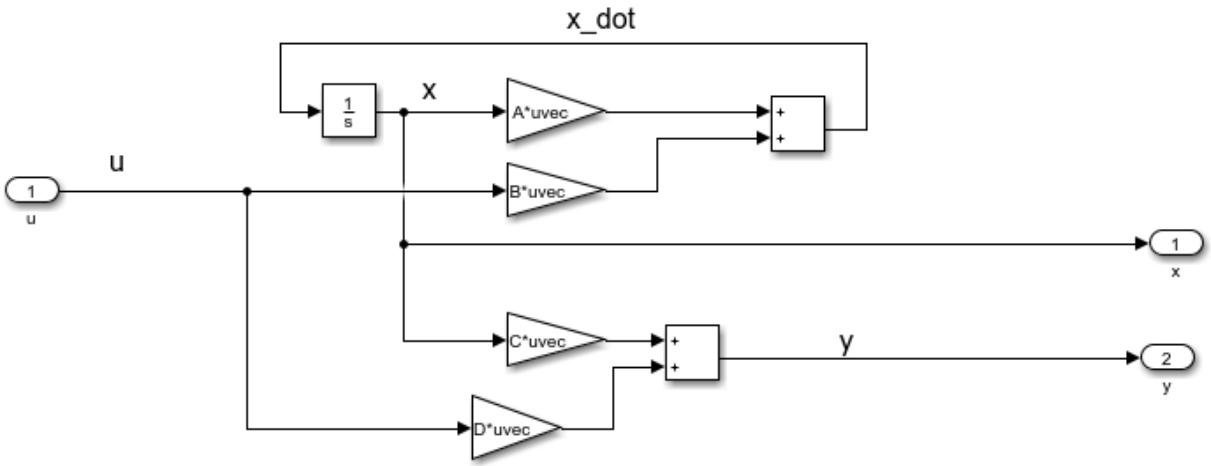
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -20 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 2 \quad 0] \quad D = 0$$

- Costruire il modello Simulink del sistema controllato tramite opportuna retroazione stato-ingresso che stabilizzi il sistema
- Simulare e visualizzare l'andamento di stato e uscita a fronte di un ingresso a gradino

Esercizio: retroazione stato - ingresso

- Soluzione





Esercizio: retroazione stato - ingresso

- Script di inizializzazione:

```
A = [-2 -20 -2;0 0 1;1 -5 -1];
B = [20;0;0];
C = [0 2 0];
D = 0;

H = -place(A,B,[-1;-2;-3]);
```

Autovalori desiderati (**attenzione**: immettere sempre un vettore di autovalori desiderati con valori differenti tra loro)

Comando che risolve il problema dell'assegnamento degli autovalori di A – B*H

INTRODUZIONE A MATLAB e SIMULINK

FINE