

# CONTROLLO DI SISTEMI ROBOTICI

- *Controllo di Robot Antropomorfi*
- *Controllo di Robot Mobili*

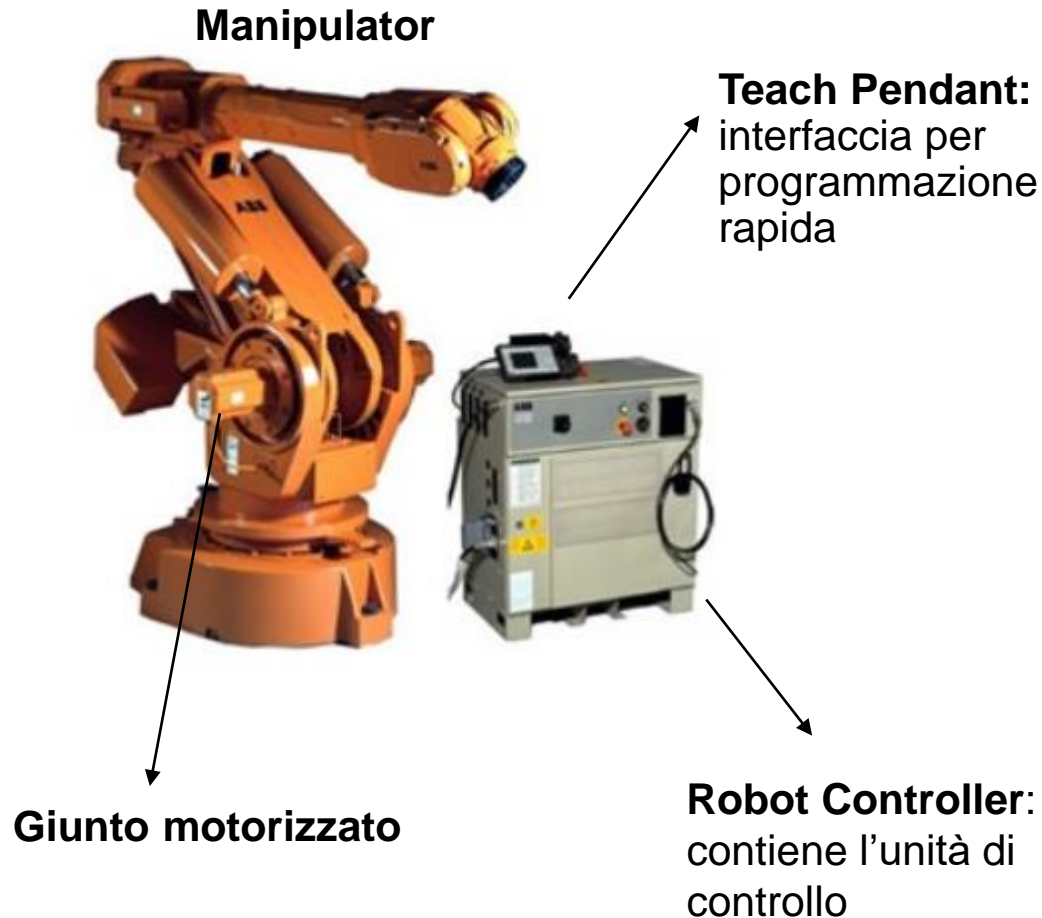
# Testo di approfondimento

- Siciliano, B., Sciavicco L., Villani L., Oriolo G., **Robotica, Modellistica pianificazione e controllo**, Mac Graw-Hill 2008.

## ***Ringraziamenti:***

Si ringrazia il Prof. Cristian Secchi dell'Università di Modena e Reggio Emilia, dalle cui presentazioni è tratto parte del materiale contenuto in queste slides.

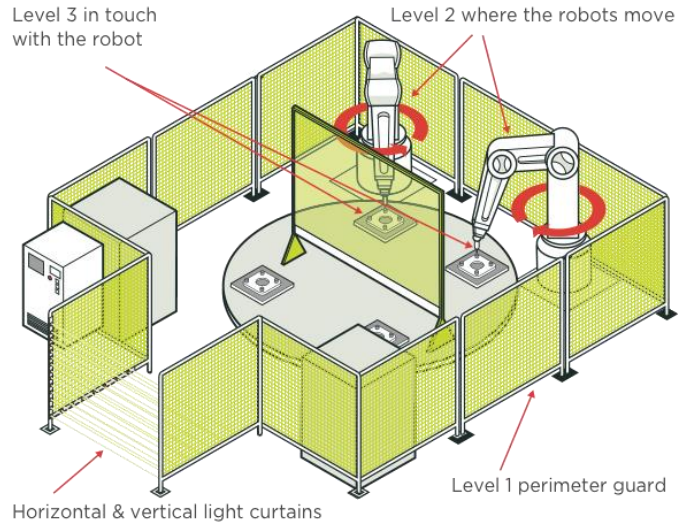
# Robot Antropomorfo



- Robot ABB IRB4400
- Struttura antropomorfa a 6 giunti (6 Degrees Of Freedom DoF)
- Sbraccio circa 2 m
- Ripetibilità nell'ordine del decimo di millimetro
- Velocità max end-effector 2200 mm/s
- Payload 60 Kg
- Applicazioni: movimentazione materiali, pallettizzazione, pressatura, assemblaggio, incollaggio...

# Il rapporto uomo-robot nell'industria

➔ Da così:



➔ esigenze di sicurezza impongono la separazione degli spazi di lavoro

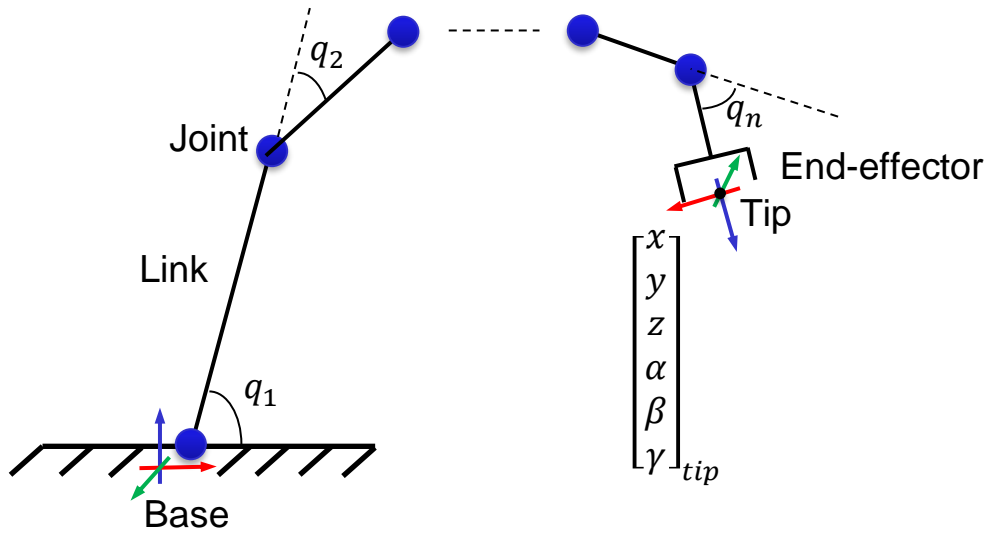
➔ a così (industria 4.0, robotica collaborativa)



➔ Hand-guidance

➔ Condivisione di workspace e task

# Robot Antropomorfo



- $q_{1...n}$  : posizioni angolari dei giunti
- $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ : rappresentano posizione  $(x, y, z)$  e orientamento  $(\alpha, \beta, \gamma)$  del sistema di riferimento *Tip* rispetto al sistema di riferimento *Base*

- ➔ Il Robot Antropomorfo è un manipolatore seriale, costituito da una catena cinematica in cui ogni link è connesso al successivo tramite un giunto motorizzato che consente la rotazione relativa dei link attorno ad un asse
- ➔ Alla fine della catena cinematica (end-effector) è presente uno strumento per la manipolazione, per esempio una pinza cui è solitamente associato un sistema di riferimento cartesiano, per esempio centrato nel punto di grasping (Tip)

# Cenni di cinematica

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

→ Vettore delle variabili di giunto

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix}$$

→ Configurazione dell'end-effector nello spazio cartesiano

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}$$

→ *twist* dell'end-effector, composto da velocità lineare  $\dot{\mathbf{p}}$  e velocità angolare  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$

➔ Cinematica diretta e inversa:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

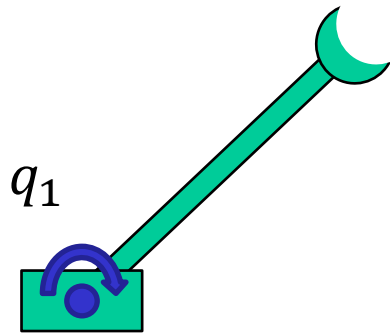
➔ Cinematica differenziale diretta e inversa:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{v} \end{cases} \longrightarrow \mathbf{J}(\mathbf{q}) \text{ Jacobiano del robot}$$

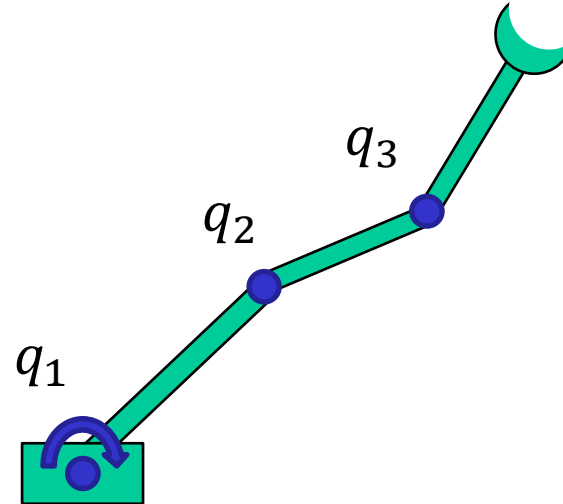
# Cenni di cinematica

- La soluzione del problema cinematico diretto permette di ricavare la configurazione dell'end-effector nello spazio cartesiano (detto anche spazio operativo o task-space) in funzione della configurazione del robot nello spazio dei giunti;
- La soluzione del problema cinematico differenziale diretto permette di ricavare le velocità lineari e angolari dell'end-effector in funzione delle posizioni e delle velocità dei giunti, per mezzo della matrice Jacobiana del manipolatore
- I problemi diretti hanno soluzione univoca
- I problemi inversi:
  - Presentano equazioni non-lineari di cui non è sempre possibile trovare una soluzione analitica;
  - Possono avere soluzioni multiple;
  - Possono avere infinite soluzioni ( $n > 6$  manipolatore ridondante);
  - Possono non esistere soluzioni ammissibili

# Spazio di giunto



$$\mathbf{q} = q_1 \in \mathbb{R}$$



$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

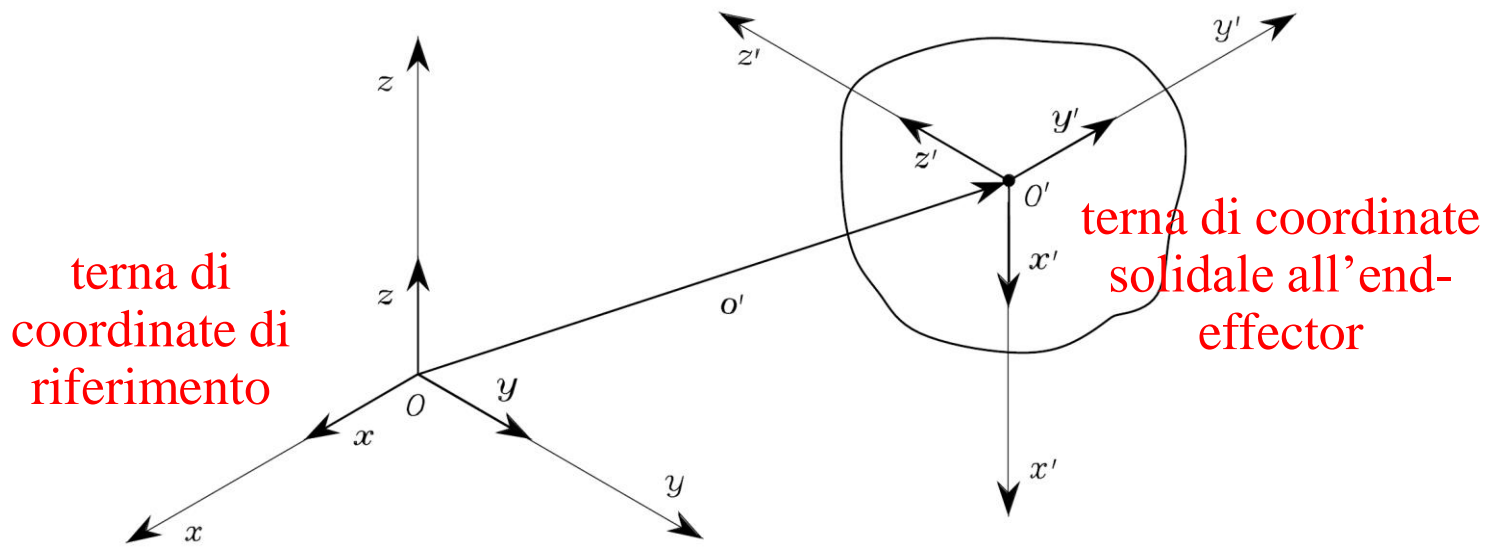


# Spazio Operativo

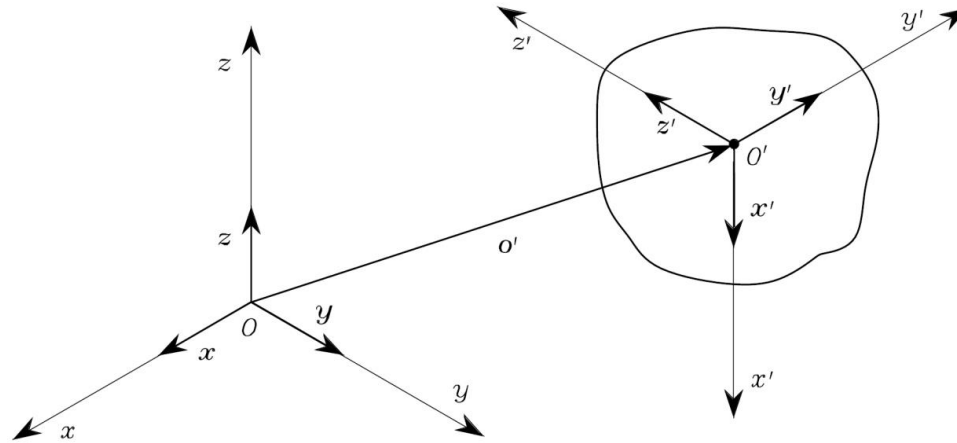
L'obiettivo del robot è però muovere l'end-effector in uno spazio  $\mathbb{R}^3$  ma descritto da 6 parametri:

- 3 per la posizione
- 3 per l'orientamento

Il moto dell'end-effector deve essere completamente descritto nello spazio in termini della sua **posizione** e del suo **orientamento** (**posa o postura**) rispetto a una terna di riferimento.



# Spazio Operativo - Posizione

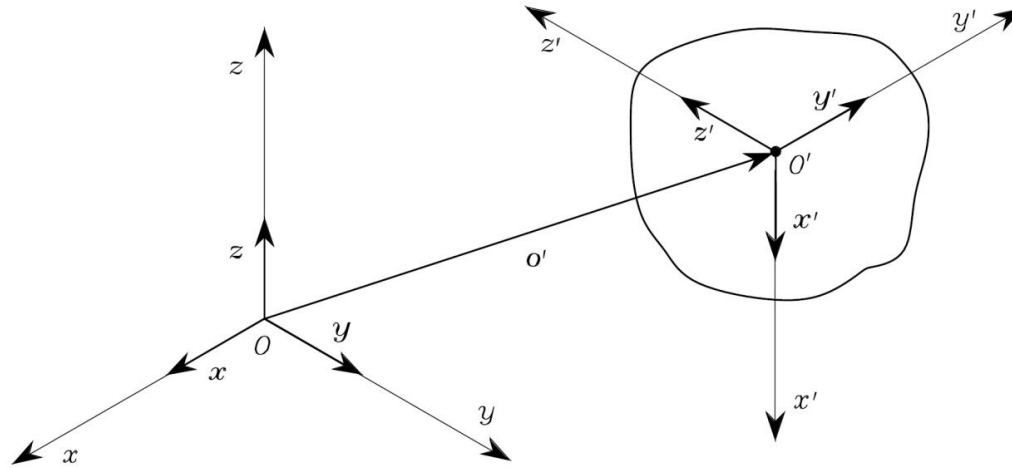


La **posizione** di un punto  $O'$  dell'end-effector rispetto alla terna di coordinate  $O - xyz$  è espressa dalla relazione

$$\mathbf{o}' = o'_x \mathbf{x} + o'_y \mathbf{y} + o'_z \mathbf{z}$$

ove  $o'_x$ ,  $o'_y$ ,  $o'_z$  indicano le componenti del vettore  $\mathbf{o}' \in \mathbb{R}^3$  che descrive la posizione di  $O'$ .

# Spazio Operativo - Orientamento



Per caratterizzare l'**orientamento** dell'end-effector, è opportuno introdurre i versori degli assi della terna  $(x', y', z')$  rispetto alla terna di riferimento. Rispetto alla terna di coordinate  $O - xyz$  tali versori sono espressi dalle equazioni:

$$\mathbf{x}' = x'_x \mathbf{x} + x'_y \mathbf{y} + x'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{y}' = y'_x \mathbf{x} + y'_y \mathbf{y} + y'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{z}' = z'_x \mathbf{x} + z'_y \mathbf{y} + z'_z \mathbf{z}$$

# Orientamento e matrici di rotazione

## Matrice di rotazione

Utilizzando una notazione compatta, i tre versori che esprimono l'orientamento del corpo rispetto alla terna di riferimento possono essere combinati nella matrice  $3 \times 3$

$$\mathbf{R} = [\mathbf{x}' \quad \mathbf{y}' \quad \mathbf{z}'] = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T \mathbf{x} & \mathbf{y}'^T \mathbf{x} & \mathbf{z}'^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{y} & \mathbf{y}'^T \mathbf{y} & \mathbf{z}'^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{z} & \mathbf{y}'^T \mathbf{z} & \mathbf{z}'^T \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

che prende il nome di **matrice di rotazione**.

La matrice  $\mathbf{R}$  è ortogonale e quindi gode della seguente proprietà:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$$

Moltiplicando ambo i membri per la matrice inversa si ottiene

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$$

Infine,  $\det(\mathbf{R}) = 1$  se la terna è levogira, mentre  $\det(\mathbf{R}) = -1$  se la terna è destro-gira

# Orientamento e matrici di rotazione

## Rotazioni elementari

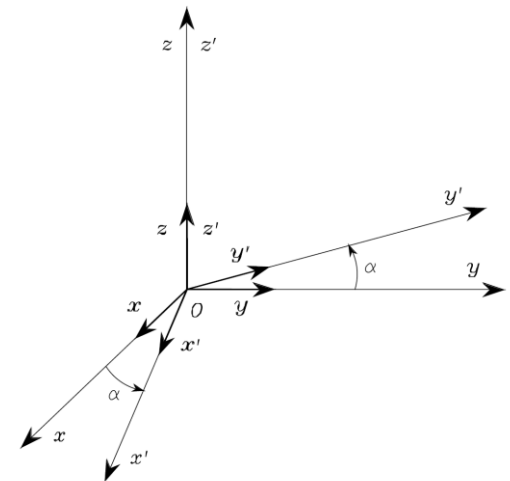
Consideriamo terne ottenibili dalla terna di riferimento mediante delle rotazioni elementari effettuate intorno a un asse coordinato.

**Le rotazioni sono considerate positive se effettuate in senso antiorario intorno al relativo asse.**

**Rotazione della terna di riferimento  $O - xyz$  di un angolo  $\alpha$  intorno all'asse  $z$ :**

I versori degli assi della nuova terna possono essere caratterizzati in termini delle componenti rispetto agli assi della terna di riferimento:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Angoli di *Eulero*: 3 rotazioni elementari (esempio: ZYX)

## Matrice di rotazione $O' - x'y'z'$ rispetto alla terna $O - xyz$ :

- Rotazione della terna di riferimento  $O - xyz$  di un angolo  $\alpha$  intorno all'asse  $z$

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotazione della terna di riferimento  $O - xyz$  di un angolo  $\beta$  intorno all'asse  $y$

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

- Rotazione della terna di riferimento  $O - xyz$  di un angolo  $\gamma$  intorno all'asse  $x$

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

- Per programmare un robot in modo che effettui i movimenti richiesti occorre:
  - **Analisi cinematica diretta:** fissato il vettore delle posizioni di giunto, calcolare la posa dell'end-effector (i.e. le posizioni dei giunti sono misurabili direttamente, da queste assegno i punti nello spazio operativo)

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{q})$$

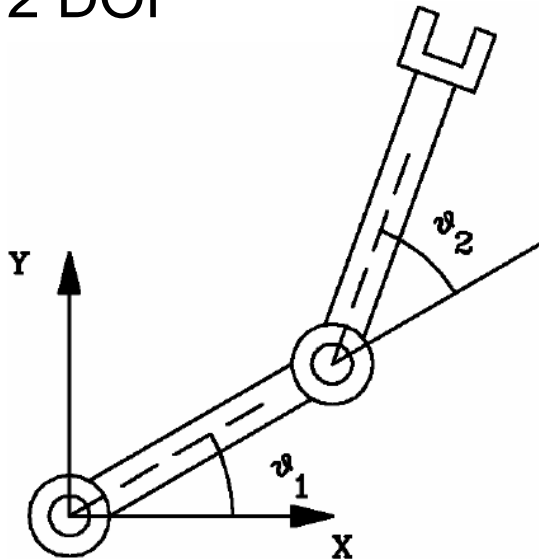
con  $\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_e \\ \boldsymbol{\phi}_e \end{bmatrix}$  ( $\mathbf{p}_e$ : posizione,  $\boldsymbol{\phi}_e$ : orientamento)

- **Analisi cinematica inversa:** fissata la posa desiderata dell'end-effector, calcolare UN corrispondente vettore delle posizioni di giunto

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_e)$$

# Problema cinematico diretto

**Esempio:** manipolatore planare a 2 DOF



**Posizione**

$$\begin{aligned}x &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \\y &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

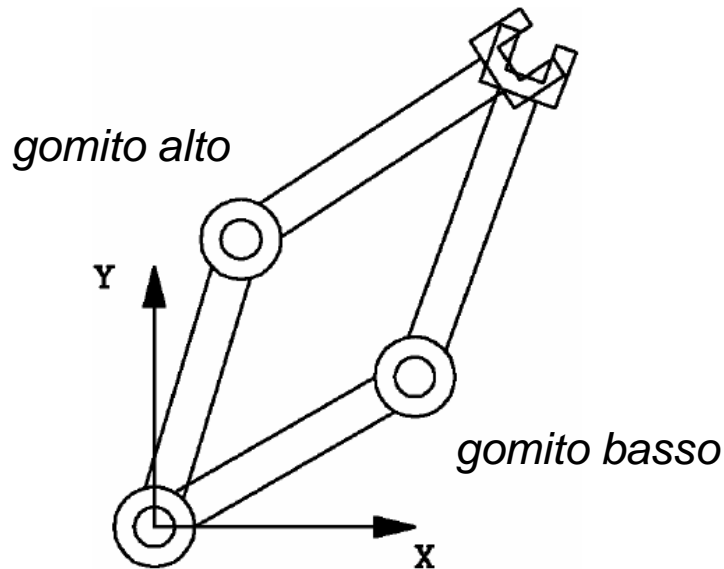
**Orientamento**

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\cos (\theta_1 + \theta_2)}_{\text{versore } \mathbf{x}'} & \underbrace{-\sin (\theta_1 + \theta_2)}_{\text{versore } \mathbf{y}'} \\ \underbrace{\sin (\theta_1 + \theta_2)}_{\text{versore } \mathbf{x}'} & \underbrace{\cos (\theta_1 + \theta_2)}_{\text{versore } \mathbf{y}'} \end{bmatrix}$$



# Problema cinematico inverso

**Esempio:** manipolatore planare a 2 DOF (se si considera solo la posizione dell'end-effector il problema cinematico inverso ha 2 possibili soluzioni, *gomito alto / basso*)



$$\cos \theta_2 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

$$\sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2}$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(\sin \theta_2, \cos \theta_2)$$

$$k_1 = l_1 + l_2 \cos \theta_2, \quad k_2 = l_2 \sin \theta_2$$

$$\sin \theta_1 = \frac{y_0 k_1 - x_0 k_2}{k_1^2 + k_2^2}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{y_0 - k_1 \sin \theta_1}{k_2}$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(\sin \theta_1, \cos \theta_1)$$

# Modello dinamico del robot antropomorfo

- ➔ Il modello dinamico del robot antropomorfo (modello di Eulero-Lagrange) è rappresentato dalla seguente equazione:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_a$$

- ➔ Generalizza le equazioni di Newton per una massa in rotazione attorno ad un asse soggetta alla forza di gravità (pendolo), nel caso di più masse interconnesse.
- ➔ Si tratta di un modello NON LINEARE stazionario in cui:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Lo stato del sistema è dato dalle variabili  $q$ , posizione angolare dei giunti

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$

L'ingresso è dato dalle coppie comandate ai motori dei giunti

# Modello dinamico del robot antropomorfo

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau + J^T(q)F_a$$

- ➔  $M(q)$  Matrice d'inerzia. Tiene conto dell'effetto delle masse dei vari link. Dipende dalla posizione.
- ➔  $C(q, \dot{q})$  Tiene conto degli effetti dinamici introdotti dal moto relativo dei link (forze centrifughe e forze di Coriolis). Dipende dalla posizione e dalla velocità
- ➔  $D$  Tiene conto degli attriti che ostacolano il movimento dei giunti
- ➔  $g(q)$  Tiene conto dell'effetto della gravità. Dipende dalla posizione
- ➔  $J^T(q)F_a$  Contributo delle forze scambiate tra robot e ambiente esterno

# Controllo di Robot Antropomorfi

- **Controllo di posizione:** portare il robot in una determinata posizione target (regolazione) o fargli seguire una certa traiettoria (tracking). Il target può essere espresso nello spazio dei giunti  $q_d$  o nello spazio operativo  $x_d$
- **Controllo di interazione:** controllare il modo in cui il robot interagisce con l'ambiente esterno o l'operatore (physical Human-Robot Interaction, pHRI) attraverso le forze scambiate

## Controllo di posizione

**Controllo decentralizzato** (a giunto indipendente): ogni singolo giunto è considerato un sistema SISO indipendente. Gli effetti degli accoppiamenti tra giunti sono considerati dei disturbi

**Controllo centralizzato:** si tiene esplicitamente conto dell'accoppiamento tra i giunti che implica la dinamica non lineare del robot (sistema MIMO non lineare)

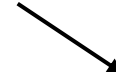
# Controllo centralizzato

- Il controllo centralizzato considera il robot nel suo insieme e affronta i problemi di regolazione e tracking con tecniche di controllo non lineare
- Le performance che si ottengono sono superiori rispetto al controllo decentralizzato. Pertanto il controllo centralizzato diventa indispensabile quando si ha a che fare con applicazioni avanzate (controllo di interazione) o traiettorie molto veloci da seguire.

## Controllo centralizzato



PD + compensazione di gravità



Controllo a dinamica inversa

# Controllo PD con compensazione di gravità

- Si utilizza per applicazioni in cui è richiesto il raggiungimento di una specifica posa dell'end-effector, per esempio applicazioni *pick-and-place* (afferrare un oggetto in una posizione e rilasciarlo in un'altra)
- Combina l'azione di un controllore PD con un termine il cui scopo è compensare le non linearità introdotte dagli effetti della gravità nel modello dinamico
- Risolve il problema di regolazione: porta il manipolatore in una configurazione globalmente asintoticamente stabile.

# Controllo PD con compensazione di gravità

- Modello dinamico considerato (il manipolatore si muove liberamente nell'ambiente allora il contributo delle forze ambientali è nullo  $F_a = \mathbf{0}$  )

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + D\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

- L'obiettivo è quello di raggiungere una configurazione desiderata nello spazio dei giunti  $\mathbf{q}_d = [q_{1d}, \dots, q_{nd}]^T$
- Il controllore deve garantire che lo stato  $\mathbf{q}_d$  sia un punto di equilibrio asintoticamente stabile
- L'idea è quella di costruire  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}$  in modo che compensi l'effetto della gravità nella dinamica del sistema e introduca un'azione che porti il sistema nella configurazione desiderata

# Controllo PD con compensazione di gravità

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau$$

$$\tau = g(q) - K_p(q - q_d) - K_d(\dot{q} - \dot{q}_d)$$

- ➔  $K_p$  è una matrice definita positiva con elementi scelti dal progettista, interpretabile come l'introduzione di effetti elastici (molle) virtuali. Incide sulla stabilità
- ➔  $K_d$  è una matrice definita positiva con elementi scelti dal progettista, interpretabile come l'introduzione di attriti (smorzatori) virtuali. Incide sulla velocità di convergenza verso la stabilità

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + K_p(q - q_d) + K_d\dot{q} = 0$$

- ➔ Per questa dinamica la condizione  $q(t) = q_d$  costante è una condizione di equilibrio.
- ➔ Per risolvere il problema di regolazione bisogna dimostrare che  $q_d$  è asintoticamente stabile
- ➔ Ciò è dimostrabile utilizzando il secondo metodo di Lyapunov



# Dimostrazione della stabilità globale asintotica

- ➔ Si consideri la variabile  $\bar{q} = q_d - q$  con  $\dot{\bar{q}} = -\dot{q}$
- ➔ La funzione rappresentativa dell'energia del sistema è globalmente definita positiva:

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T M(q) \dot{\bar{q}}}_{\text{Energia cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2} \bar{q}^T K_p \bar{q}}_{\text{Energia potenziale elastica}}$$

Energia cinetica

Energia potenziale elastica

- ➔ La sua derivata lungo le traiettorie del sistema è globalmente definita negativa:

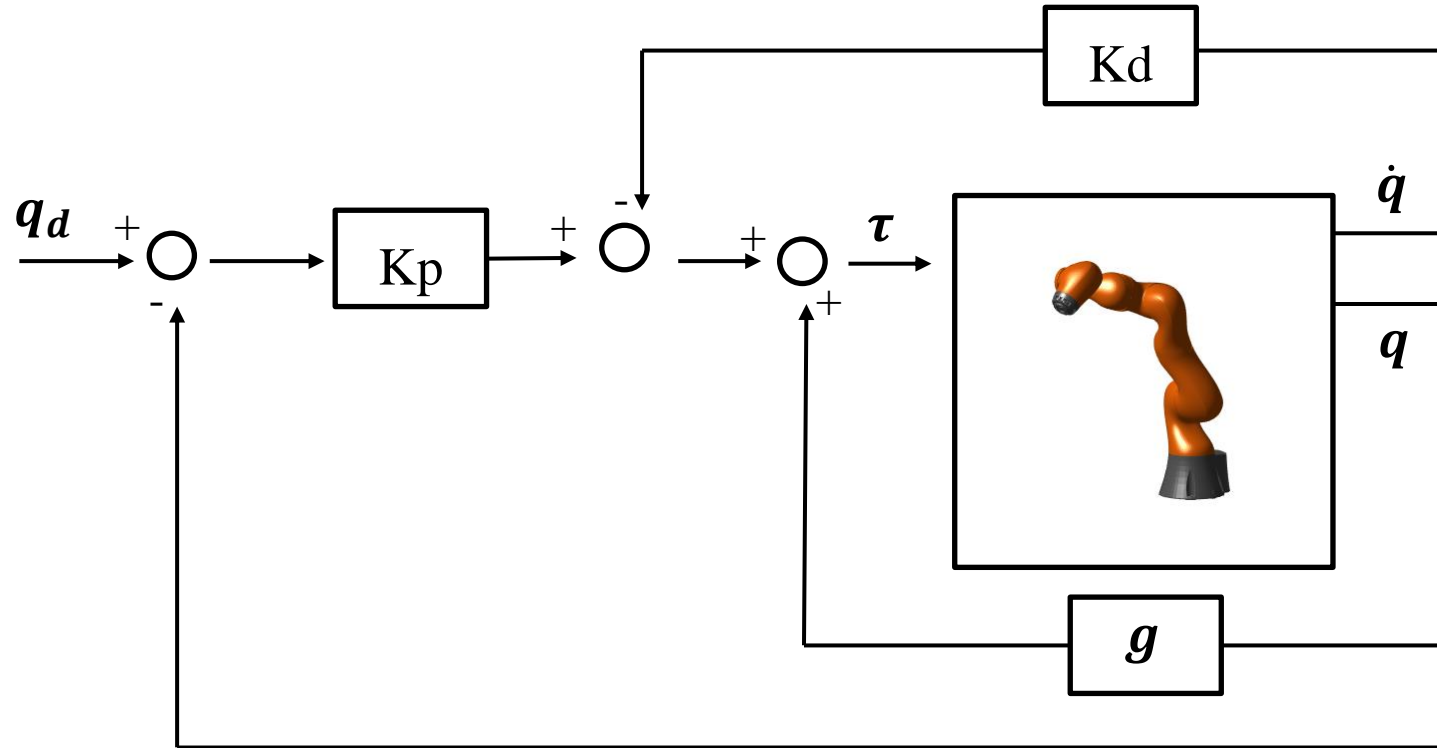
$$\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = -\dot{\bar{q}}^T (D + K_d) \dot{\bar{q}}$$

- ➔ Inoltre vale:

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \rightarrow \infty \text{ per } \|\bar{q}, \dot{\bar{q}}\| \rightarrow \infty$$

- ➔ La configurazione  $\bar{q}, \dot{\bar{q}} = \mathbf{0}$  è globalmente asintoticamente stabile

# Schema di controllo



➔ Azione di controllo:

$$\tau = g(q) - K_p(q - q_d) - K_d \dot{q}$$

# Controllo a dinamica inversa

- ➔ Si tratta di una strategia di controllo centralizzata
- ➔ Risolve il problema di tracking di una traiettoria desiderata
- ➔ **Richiede una conoscenza accurata del modello dinamico del manipolatore**
- ➔ Utilizza la tecnica di cancellazione delle non linearità tramite feedback (feedback linearization)

# Controllo a dinamica inversa

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau$$

$$\tau = M(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) \Rightarrow M(q)\ddot{q} = M(q)v$$

- ➡ N.B. : **La matrice d'inerzia è sempre invertibile** (proprietà notevole dei robot manipolatori). Allora, moltiplicando entrambi i termini per  $M^{-1}(q)$  si ottiene:

$$\ddot{q} = v$$

- ➡ Tale azione di controllo consente di linearizzare il sistema robot globalmente, trasformandolo in un sistema LTI MIMO
- ➡  $v$  rappresenta un nuovo vettore d'ingresso, il cui valore potrà essere determinato per risolvere il problema di tracking di una traiettoria desiderata  $q_d(t)$

# Controllo a dinamica inversa

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

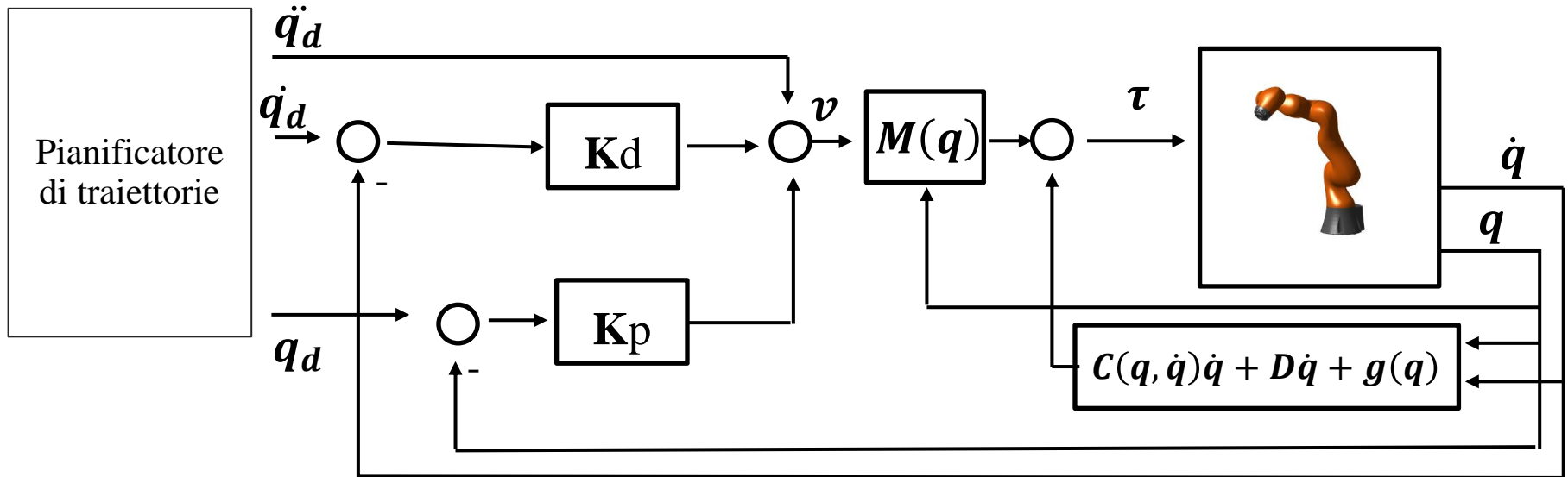
- ➔ Il nuovo sistema è lineare e disaccoppiato rispetto a  $\mathbf{v}$ , cioè la componente  $i$ -esima dell'ingresso influenza l'evoluzione unicamente della  $i$ -esima variabile di stato
- ➔ Ora ponendo:

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d) - \mathbf{K}_p(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) \quad \nearrow \quad \mathbf{q} - \mathbf{q}_d = \mathbf{e}$$

- ➔ Con  $\mathbf{K}_p$  e  $\mathbf{K}_d$  matrici definite positive, si ottiene la dinamica globalmente asintoticamente stabile, la cui velocità di convergenza può essere arbitrariamente scelta, nei limiti delle capacità degli attuatori

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

# Schema di controllo



$$\tau = M(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q)$$

$$v = \ddot{q}_d - K_d(\dot{q} - \dot{q}_d) - K_p(q - q_d)$$

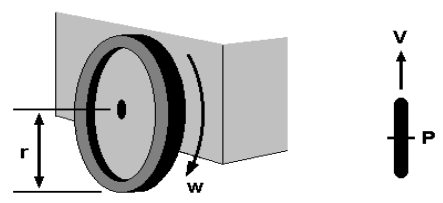
# Robot Mobili

- ➔ I robot mobili sono strutture meccaniche capaci di muoversi **autonomamente** in ambienti terrestri, marini, aerei
- ➔ La caratteristica principale dei robot mobili è la presenza di una base mobile che consente al robot di spostarsi più o meno liberamente (considerando vincoli sul moto) nell'ambiente in cui opera
- ➔ L'ambiente può essere:
  - ➔ Strutturato: se si conoscono la tipologia e le caratteristiche geometriche dell'ambiente e degli ostacoli (ambienti domestici, industriali)
  - ➔ Non strutturato: non si conoscono a priori le caratteristiche dell'ambiente e degli ostacoli (ambienti outdoor con possibilità di trovare fango, dislivelli, gradini...)

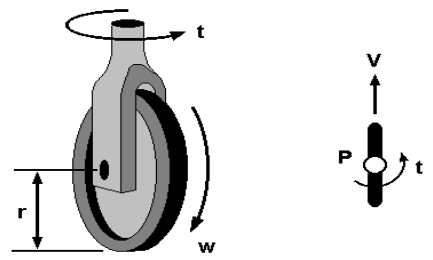
# Robot Mobili su ruote

- ➔ Dal punto di vista meccanico un robot mobile è costituito da uno o più corpi rigidi dotati di un sistema di **locomozione** (generalmente **ruote** o gambe)
- ➔ Tipologie di ruote:

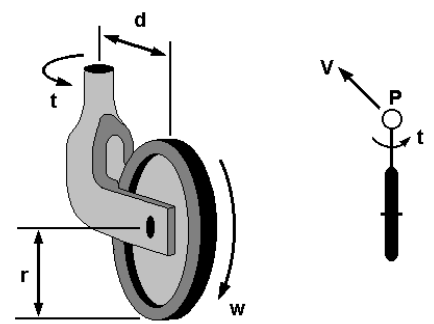
**Ruota Fissa**



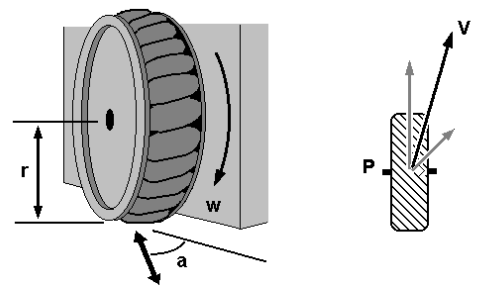
**Ruota Centrata Orientabile**



**Ruota Scentrata e Orientabile (Ruota Castor)**



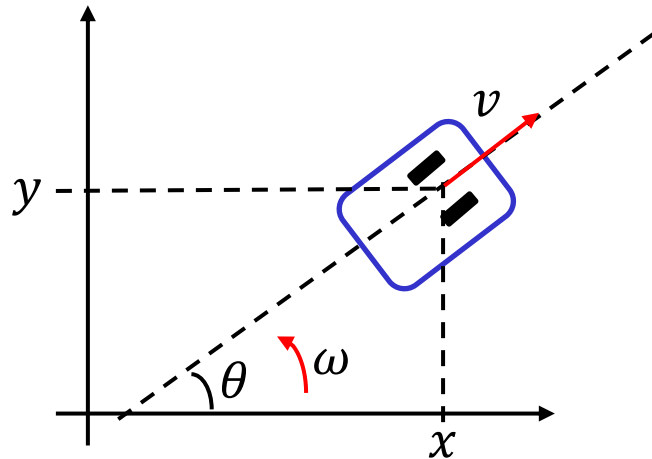
**Ruota Svedese: proprietà omnidirezionali**





# Spazio delle configurazioni

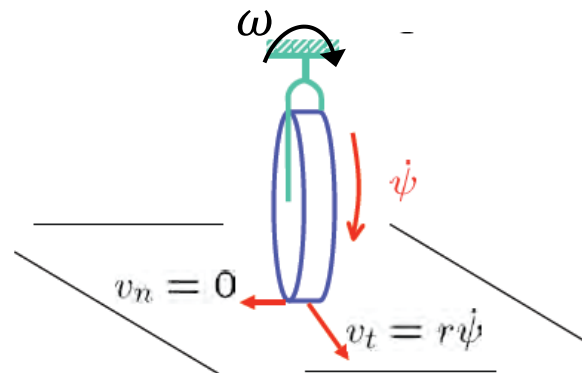
- ➔ Lo spazio delle configurazioni (stato) per un robot mobile che si muove su un piano è dato dal vettore  $q$
- ➔  $v$  è la velocità lineare del robot lungo la direzione di avanzamento
- ➔  $\omega$  è la velocità di rotazione del robot attorno all'asse verticale



$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

# Vincoli Anolonomi

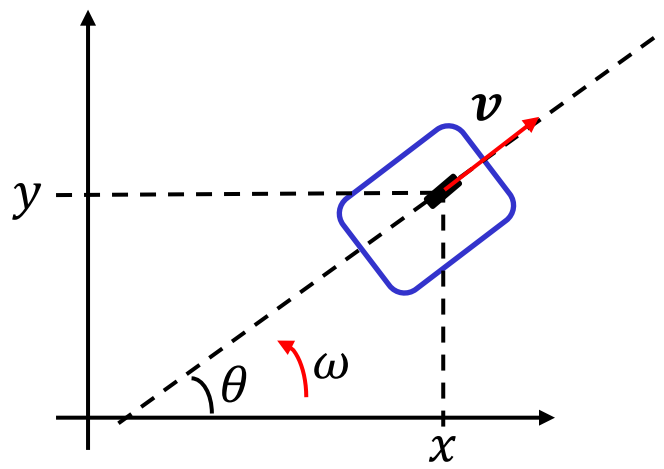
- Vincolo di puro rotolamento: la ruota rotola senza slittare né longitudinalmente né lateralmente



- L'impossibilità di traslare istantaneamente nella direzione dell'asse della ruota introduce un vincolo nel movimento (di tipo anolonomo)
- Tali vincoli limitano la mobilità istantanea del robot senza precludere la possibilità di raggiungere configurazioni arbitrarie (es. parcheggio automobile)

# Modello cinematico dell'uniciclo

➔ L'uniciclo è un robot mobile avente una sola ruota orientabile



$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

Posizione e orientamento del robot

$$v$$

Velocità lineare del robot lungo la direzione di avanzamento

$$\omega$$

Velocità angolare del robot attorno all'asse verticale

$$\dot{q} = f(q, u) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) \\ v \sin(\theta) \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

$u$  Ingresso cinematico  
 $G(q)$

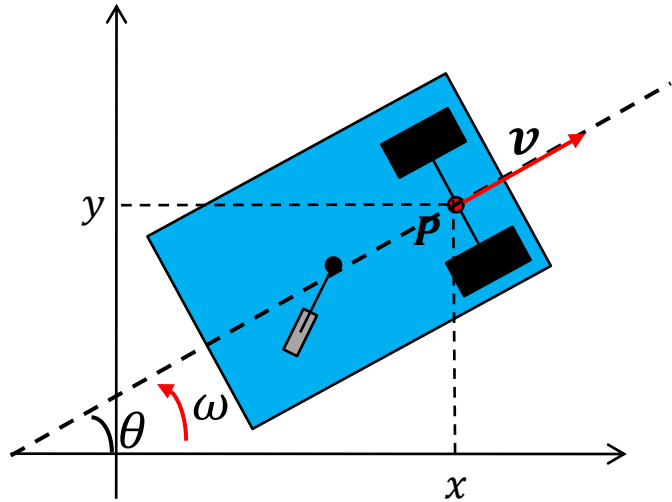
# Modello cinematico dell'uniciclo

- ➔ L'uniciclo ha gravi problematiche di stabilità e bilanciamento



- ➔ Si può ricorrere a una struttura cinematicamente equivalente ma meccanicamente più stabile: l'uniciclo a trazione differenziale (**differential drive**)

# Uniciclo differential-drive



- ➡ L'uniciclo differential drive è costituito da due ruote fisse co-assiali entrambe motorizzate e una ruota castor passiva il cui scopo è di mantenere il robot in equilibrio.
- ➡ Le due ruote fisse sono controllate separatamente (le loro velocità possono essere imposte arbitrariamente e indipendentemente l'una dall'altra)

- ➡ La differenza di velocità delle ruote genera la rotazione del robot attorno all'asse verticale. Per esempio se le due ruote hanno velocità angolare uguale in modulo ma con verso opposto il robot ruota sul posto
- ➡ Questo tipo di robot mobile è cinematicamente equivalente all'uniciclo. Il punto  $P$  ( $x,y$ ) rappresenta il punto medio dell'asse delle ruote

# Uniciclo differential-drive

- ➔ Il modello cinematico è quello dell'uniciclo

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) \\ v \sin(\theta) \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

- ➔ Le velocità lineare e angolare del robot sono legate in maniera biunivoca alle velocità di rotazione delle ruote

$$\begin{cases} v = \frac{(\omega_r + \omega_l)r}{2} \\ \omega = \frac{(\omega_r - \omega_l)r}{d} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_r = \frac{2v + d\omega}{2r} \\ \omega_l = \frac{2v - d\omega}{2r} \end{cases}$$

$\omega_r, \omega_l$       velocità di rotazione delle ruote  
destra e sinistra

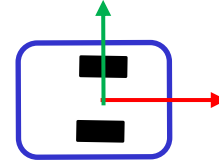
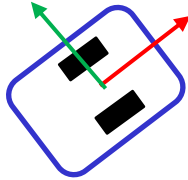
$r$               raggio delle ruote

$d$               distanza tra le due ruote

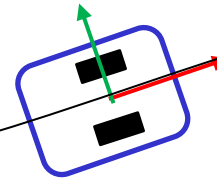
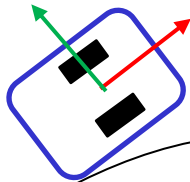
$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\theta) & \frac{r}{2} \cos(\theta) \\ \frac{r}{2} \sin(\theta) & \frac{r}{2} \sin(\theta) \\ \frac{r}{d} & -\frac{r}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

# Task elementari dei robot mobili

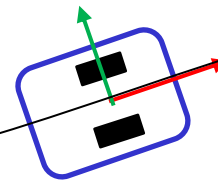
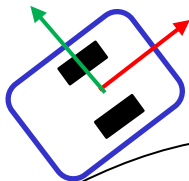
- Parcheggio: raggiungere  $q_d$  desiderata



- Path following: seguire un percorso geometrico  $p_d(s)$

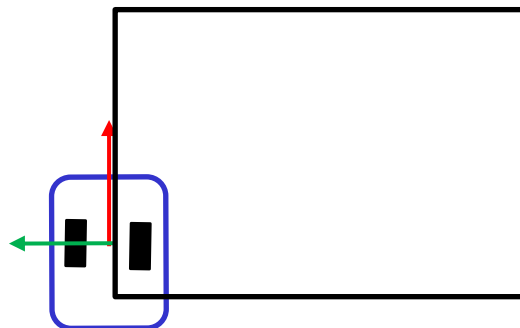


- Trajectory tracking: seguire un percorso geometrico nel tempo  $p_d(t)$



# Inseguimento di traiettoria

- Inseguimento di traiettoria (trajectory tracking) il robot mobile deve seguire asintoticamente una traiettoria desiderata  $\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} x_d(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix}$  a partire da una configurazione iniziale  $\mathbf{q}_0(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}$  che può essere o non essere agganciata alla traiettoria desiderata
- Dipende dal punto preso come riferimento per il robot mobile
- Il punto centrale dell'asse delle ruote NON è una buona scelta, in quanto risente del vincolo anolonomo di puro rotolamento (impossibilità di traslare lungo la direzione dell'asse)

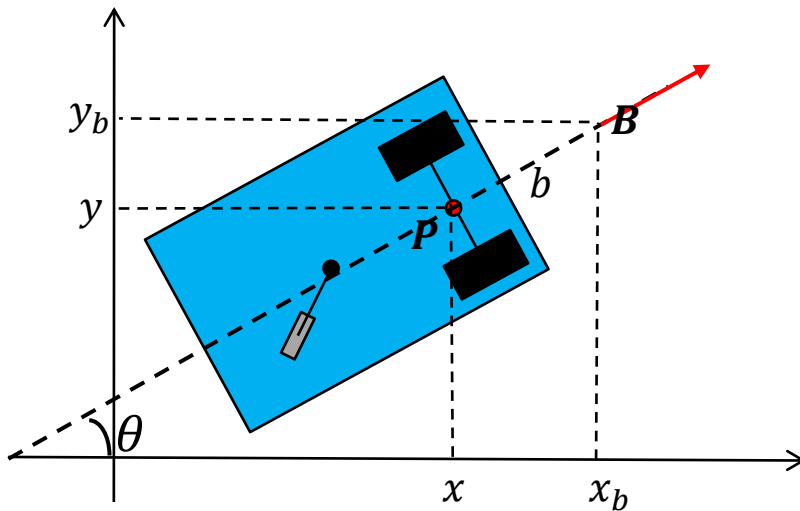


- Per esempio per percorrere traiettorie ad angolo retto il robot dovrebbe fermarsi e ruotare sul posto



# Inseguimento di traiettoria

- ➡ Si definisce come punto di riferimento un punto B fuori dall'asse delle ruote, distante b dal punto centrale dell'asse P



$$\begin{cases} x_B = x + b\cos(\theta) \\ y_B = y + b\sin(\theta) \end{cases}$$

- ➡ Tale punto non è soggetto a vincoli cinematici, può muoversi istantaneamente anche lateralmente

# Inseguimento di traiettoria tramite FL

- ➡ Il modello dell'uniciclo differential-drive riferito al punto B diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}_B = \dot{x} - b\omega\sin(\theta) = v\cos(\theta) - b\omega\sin(\theta) \\ \dot{y}_B = \dot{y} + b\omega\cos(\theta) = v\sin(\theta) + b\omega\cos(\theta) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

- ➡ Con uscita  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$  si trova la seguente dinamica:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -b\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & b\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta)\mathbf{u}$$

diffeomorfismo (sempre invertibile) realizzato tramite feedback

- ➡ Che viene linearizzata tramite la seguente trasformazione dell'ingresso:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta)\mathbf{u} \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{u}^* \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}$$

dinamica lineare con ingressi-uscite disaccoppiate

# Inseguimento di traiettoria tramite FL

- ➡ Il seguente controllore garantisce la convergenza a 0 dell'errore cartesiano di inseguimento della traiettoria desiderata. Si noti che l'orientamento non è controllato

$$\begin{cases} u_1^*(t) = \dot{x}_d(t) - k_1(x_B(t) - x_d(t)) \\ u_2^*(t) = \dot{y}_d(t) - k_2(y_B(t) - y_d(t)) \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad k_1, k_2 > 0$$

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) + k_1 e_x(t) \rightarrow 0 \\ \dot{e}_y(t) + k_2 e_y(t) \rightarrow 0 \end{cases}$$

- ➡ Le direzioni x,y del punto B sono controllate in modo indipendente

# Schema di controllo

