



# TECNICHE DI CONTROLLO MULTIVARIABILE

*- Feedback Linearization per sistemi in  
forma canonica di controllabilità*

# Regolazione del pendolo non smorzato

➔ Modello considerato:

$$mR^2\ddot{\theta} + mgR \sin(\theta) = \tau$$

➔ Legge di controllo:

$$\tau = -K_p\theta - K_d\dot{\theta} + mgR \sin(\theta)$$

➔ Dinamica linearizzata:

$$mR^2\ddot{\theta} + K_d\dot{\theta} + K_p\theta = 0$$

# Script di inizializzazione

```
%% Parametri pendolo
```

```
m = 2;
```

```
R = 1;
```

```
g = 9.81;
```

```
x0 = [0.2;0.1]; % theta0, thetaDot0
```

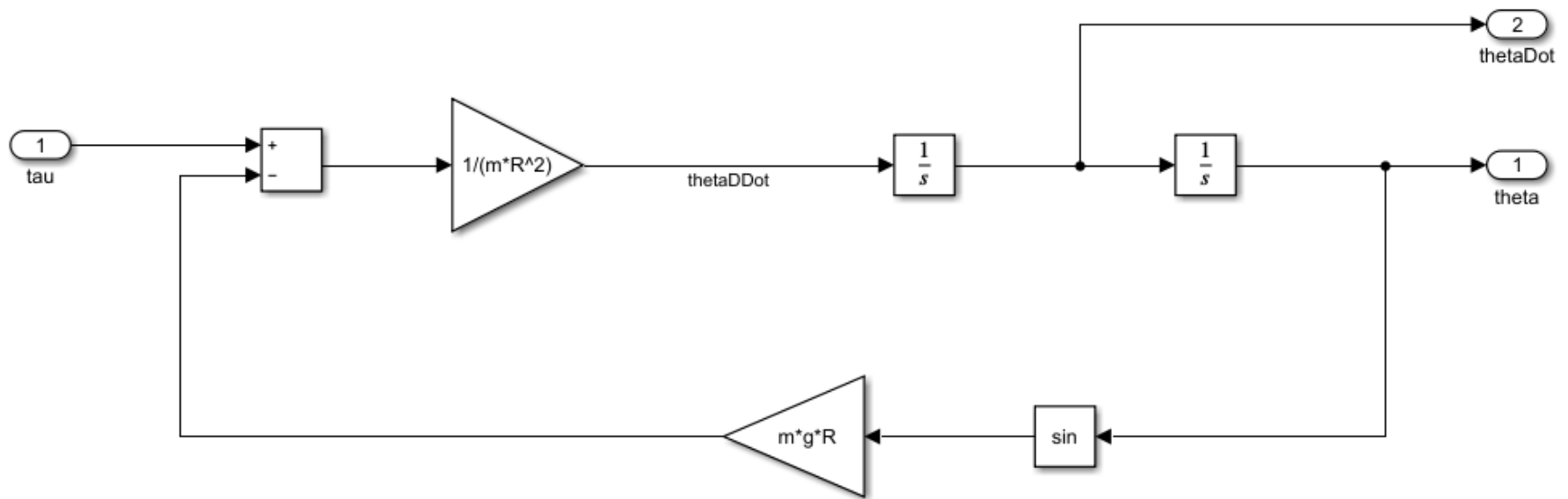
```
%% Regolatore
```

```
Kp = 10;
```

```
Kd = 5;
```

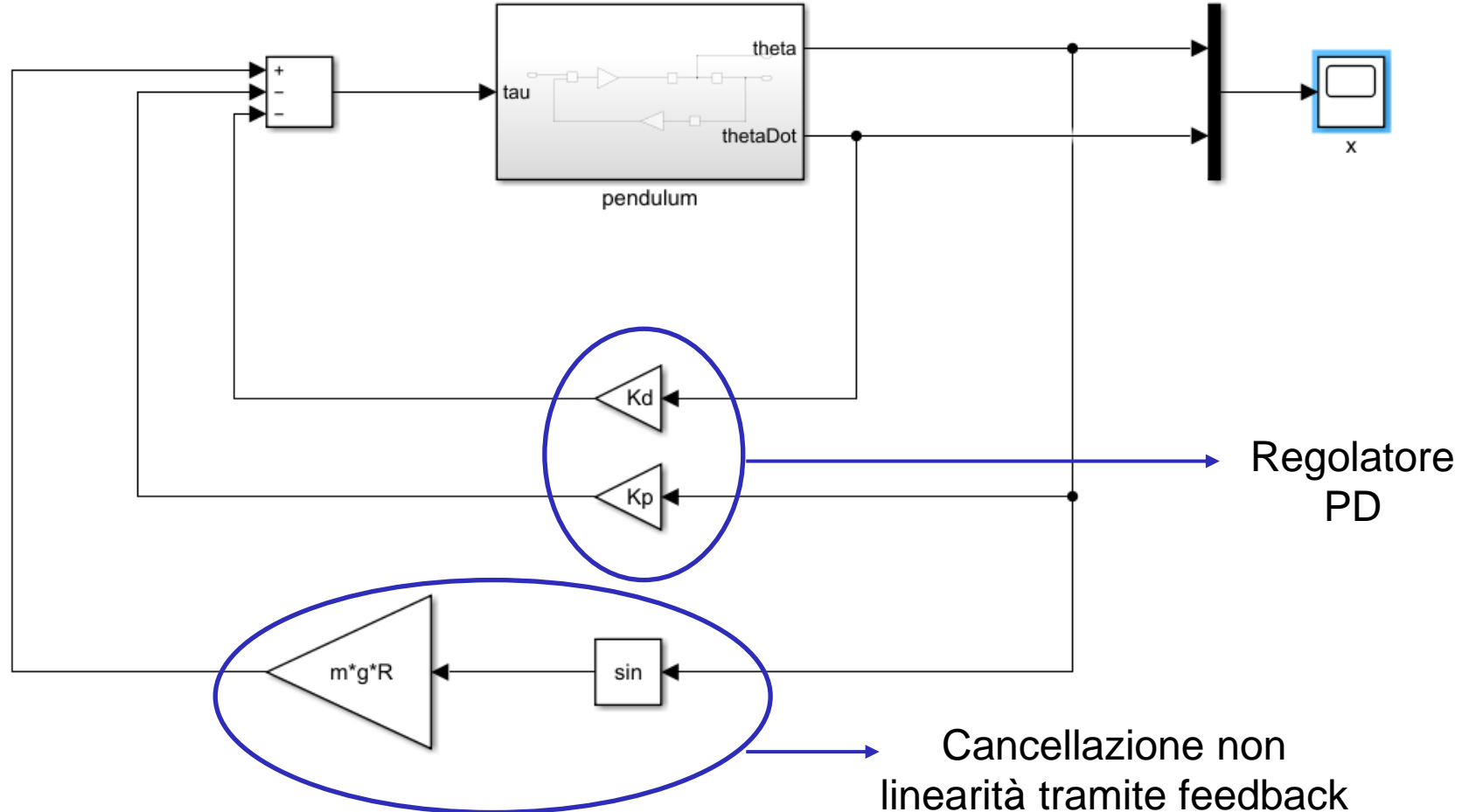
# Modello Simulink del pendolo non smorzato

➔ Modello Simulink sistema:



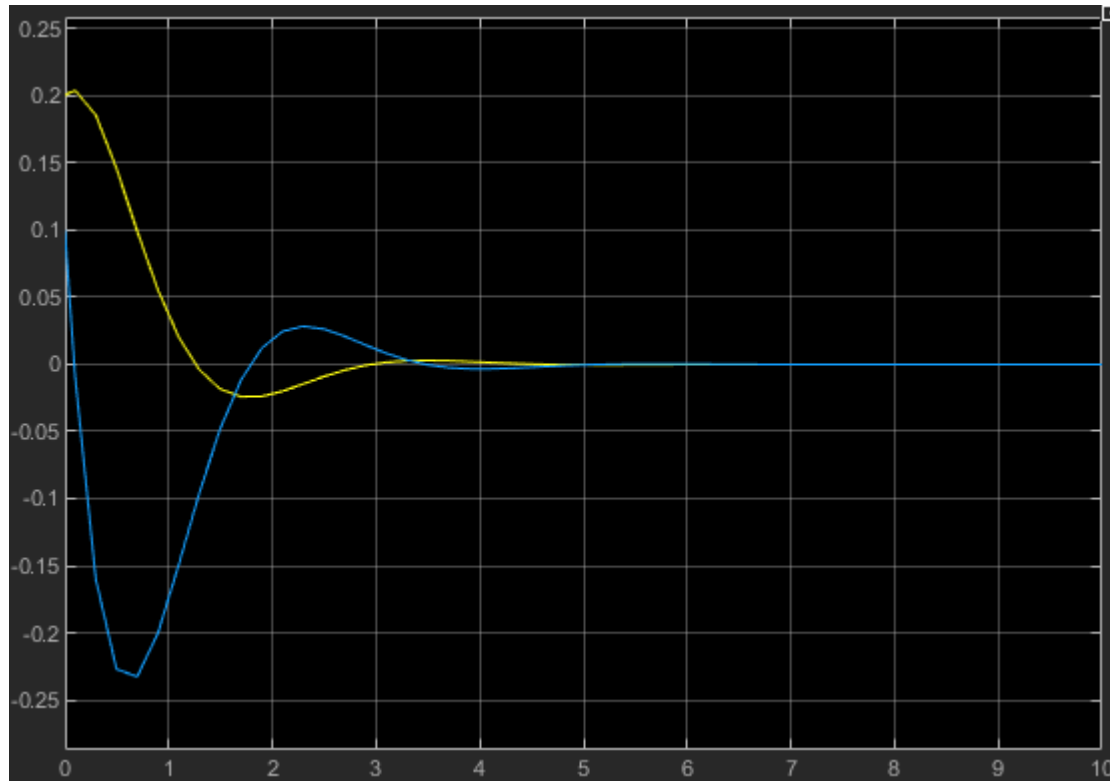
# Controllo con cancellazione delle non linearità

➔ Schema di controllo:



# Risultati regolazione pendolo

➡ Andamento dello stato



—  $\theta$   
—  $\dot{\theta}$

# Tracking del pendolo

➔ Modello considerato:

$$mR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgR \sin(\theta) = \tau$$

➔ Legge di controllo:

$$\tau = mR^2v + b\dot{\theta} + mgR \sin(\theta)$$

$$v = \ddot{\theta}_d - K_d(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - K_p(\theta - \theta_d)$$

➔ Dinamica linearizzata:

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = 0$$

# Script di inizializzazione

```
%% Parametri pendolo
m = 2;
R = 1;
g = 9.81;
b = 1;

x0 = [0.2;0.1]; % theta0, thetaDot0

%% Regolatore
Kp = 10;
Kd = 5;
```

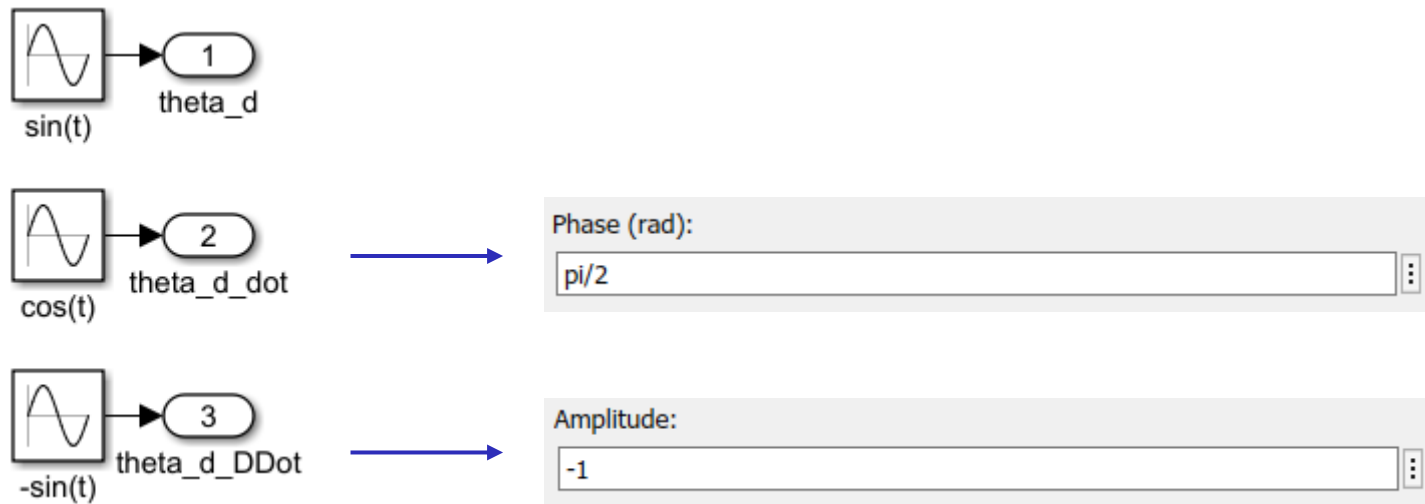


# Tracking del pendolo, pianificatore traiettoria

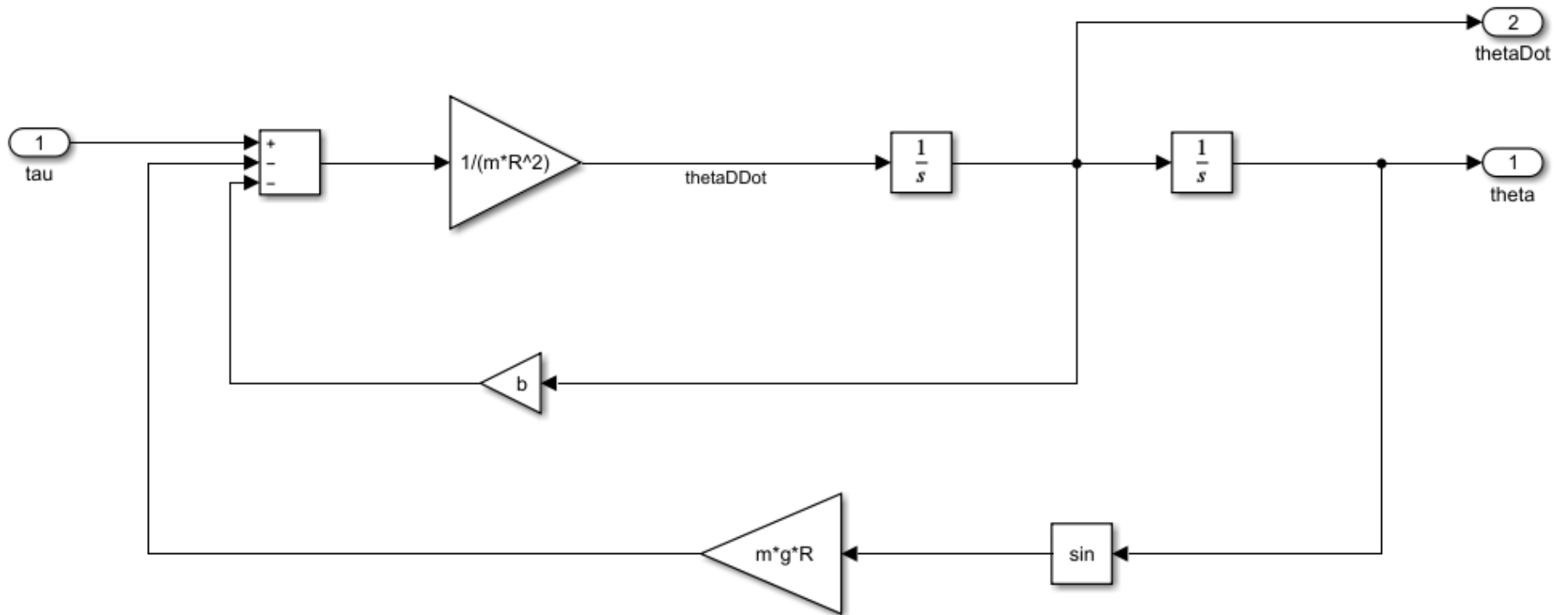
➔ Traiettoria desiderata:

$$\theta_d = \sin t$$
$$\dot{\theta}_d = \cos t$$
$$\ddot{\theta}_d = -\sin t$$

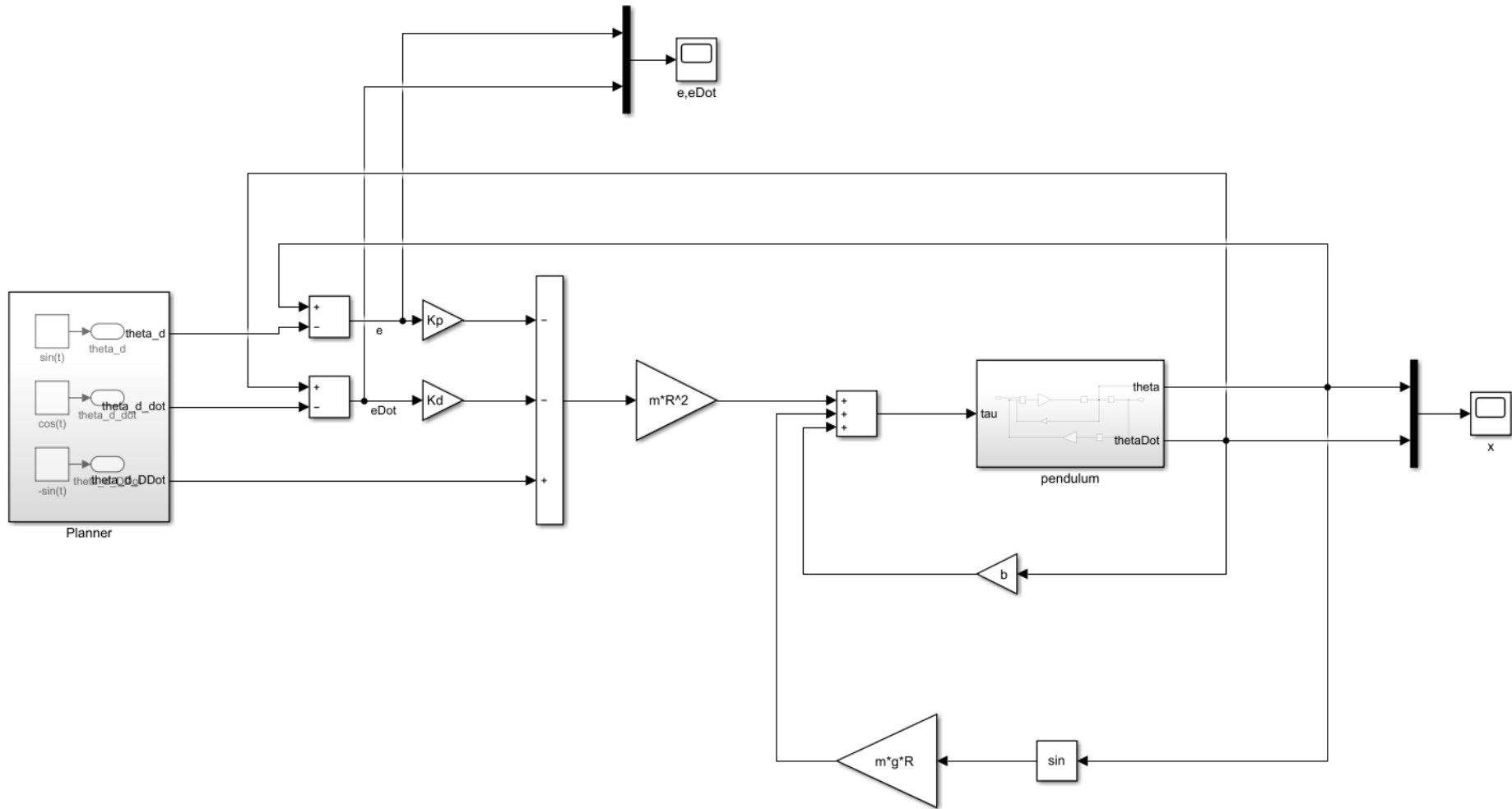
➔ Modello Simulink pianificatore:



# Tracking del pendolo, modello del sistema

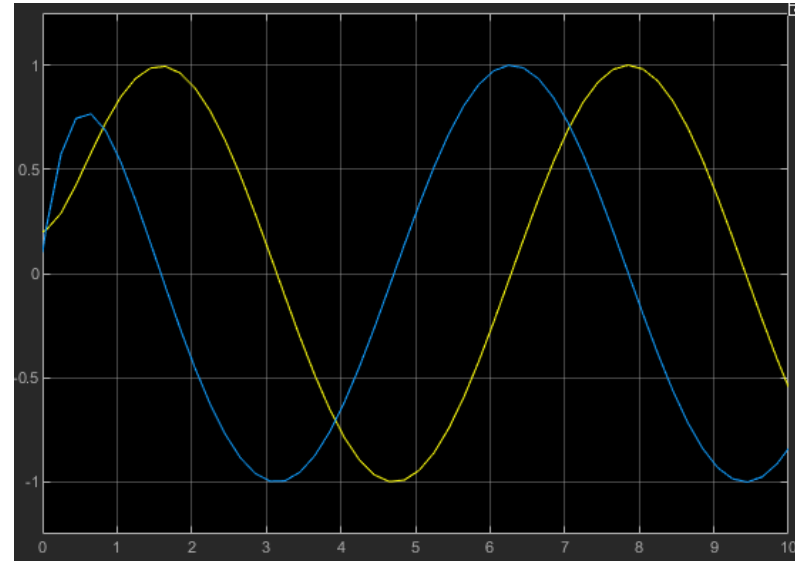


# Tracking del pendolo, schema di controllo



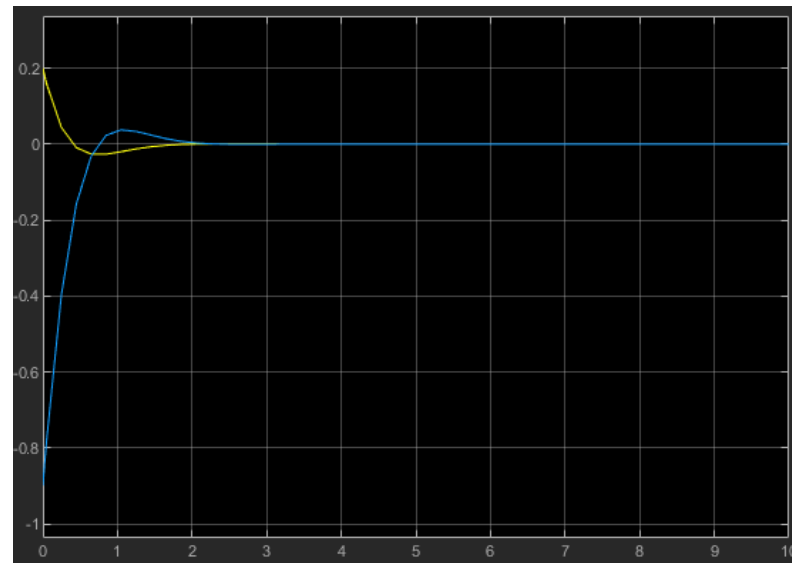
# Risultati tracking

➡ Andamento dello stato



—  $\theta$   
—  $\dot{\theta}$

➡ Andamento dell'errore di tracking



—  $e$   
—  $\dot{e}$

# Feedback Linearization per sistema in forma canonica

Dato il sistema non lineare descritto in forma canonica di controllabilità dalle seguenti equazioni:

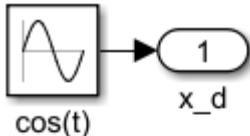
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1x_2 + x_2u = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u\end{aligned}$$

Con:  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $x = x_1$ ,  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}$  condizioni iniziali

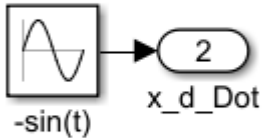
Si implementi un controllore utilizzando la tecnica feedback linearization, la cui legge di controllo  $u = b(\mathbf{x})^{-1}(v - f(\mathbf{x}))$  cancelli le non linearità presenti nella dinamica del sistema e risolva il problema di tracking della seguente traiettoria:

$$x_d = \cos(t)$$

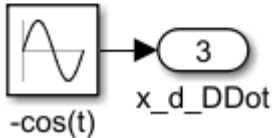
# Planner traiettoria desiderata



Phase (rad):



Amplitude:

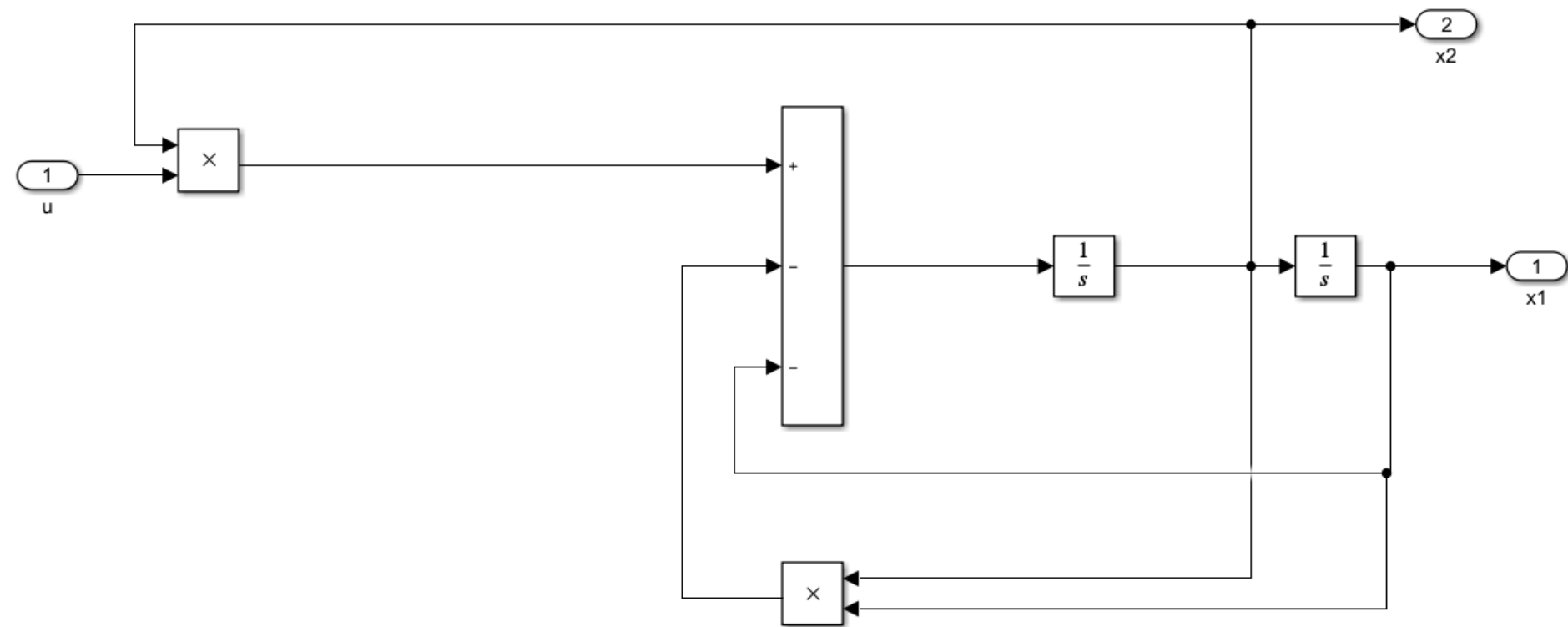


Phase (rad):

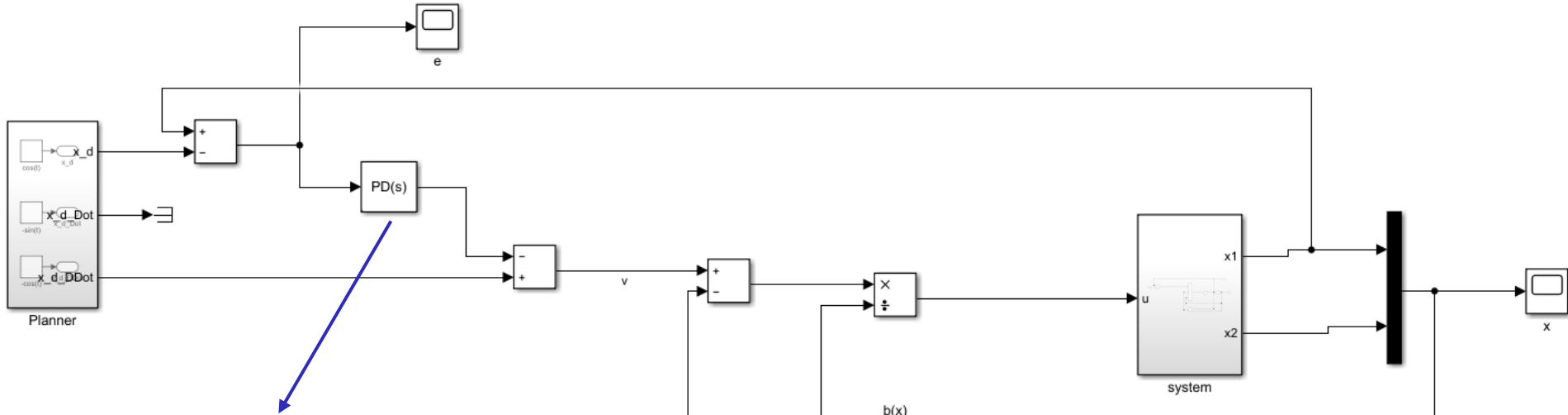
  

Amplitude:

# Modello del sistema



# Schema di controllo



Controller: PD Form: Parallel

Time domain:  
 Continuous-time  
 Discrete-time

Discrete-time settings  
 Sample time (-1 for inherited): -1

Compensator formula  

$$P + D - \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}}$$

Main Initialization Output Saturation Data Types State Attributes

Controller parameters

Source: internal

Proportional (P): Kp

Derivative (D): Kd

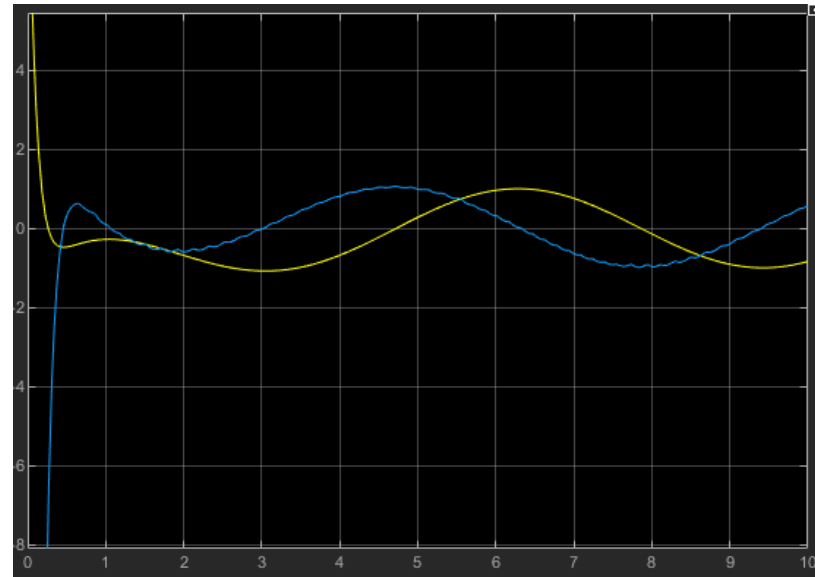
Use filtered derivative

Filter coefficient (N): 100



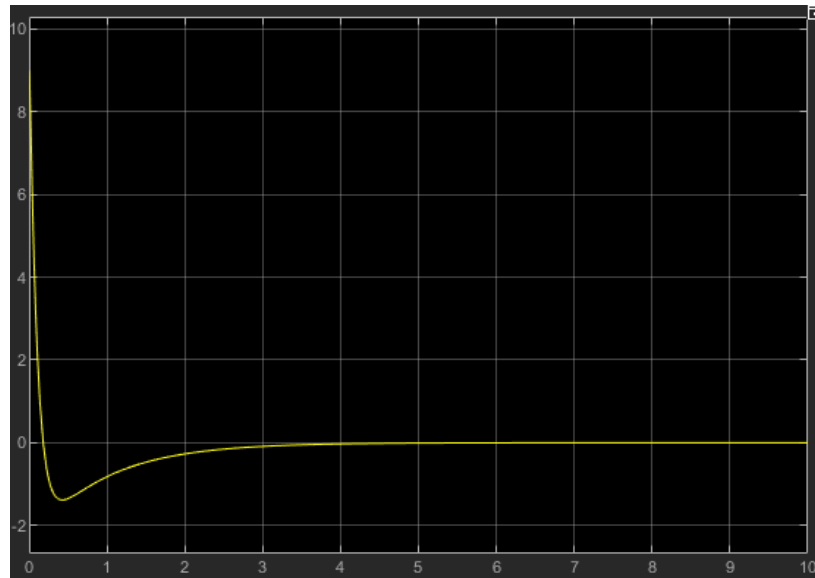
# Risultati tracking

➡ Andamento dello stato



—  $x_1$   
—  $x_2$

➡ Andamento dell'errore di tracking



—  $e$



# TECNICHE DI CONTROLLO MULTIVARIABILE

- *Feedback Linearization (ingresso-uscita)  
per sistemi in forma affine*

# Specifiche esercizio

Dato il sistema SISO non lineare descritto in forma affine dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Con:  $x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$  condizioni iniziali

Si implementi un controllore utilizzando la tecnica feedback linearization, la cui legge di controllo  $u = u(v, x)$  cancelli le non linearità presenti nella dinamica ingresso-uscita del sistema e risolva il problema di tracking della seguente traiettoria desiderata:

$$y_d = \sin(t)$$

# Note esercizio

Si noti che tramite il seguente diffeomorfismo:

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_f h(\mathbf{x}) \\ \phi_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

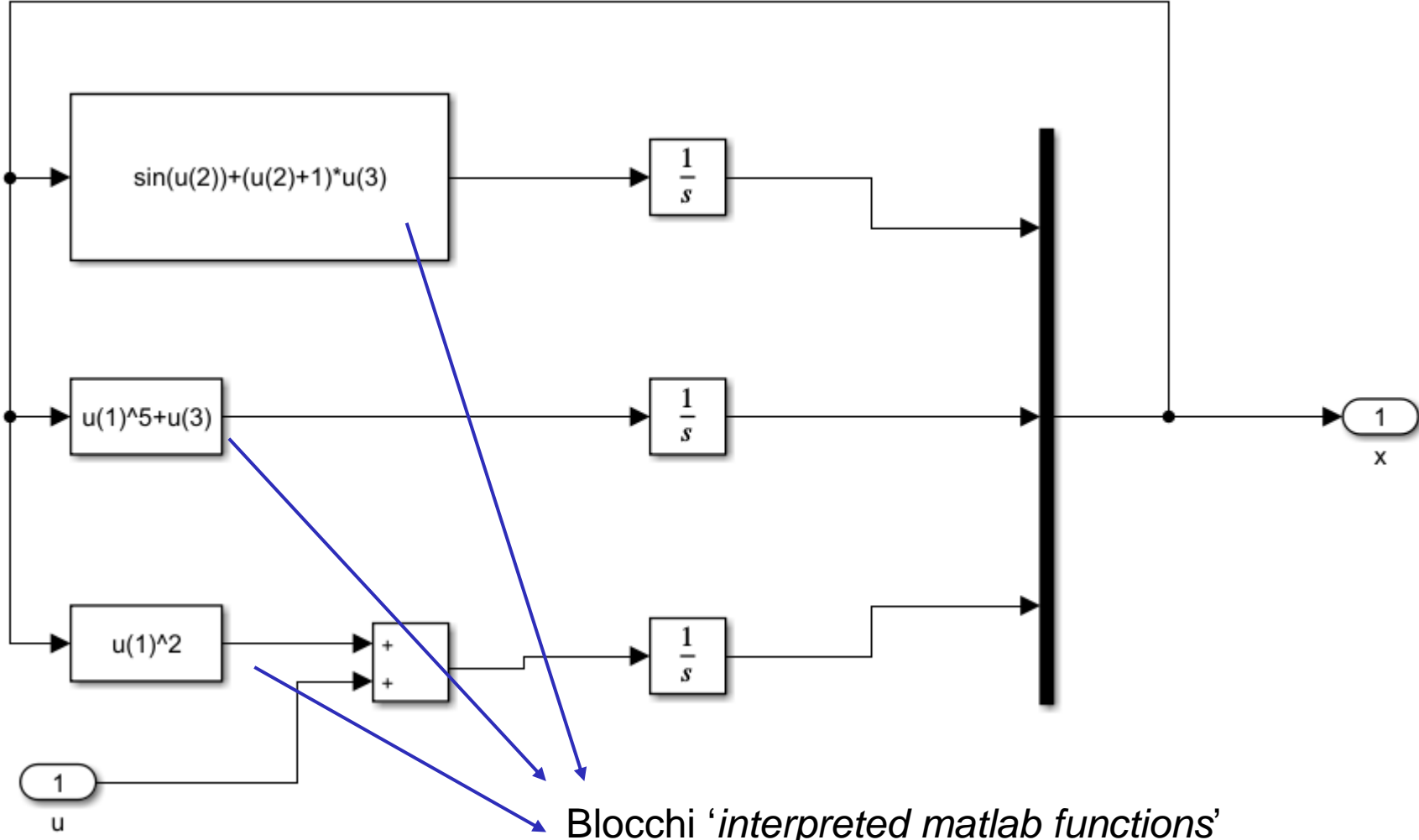
Si realizza una dinamica linearizzabile per l'uscita  $y$ :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{z}_1 = L_f h = z_2 \\ \ddot{y} &= \dot{z}_2 = L_f^2 h + L_b L_f h u = \\ &= (\cos x_2 + x_3)(x_1^5 + x_3) + (x_2 + 1)x_1^2 + (x_2 + 1)u \end{aligned}$$

Che può essere controllata con:

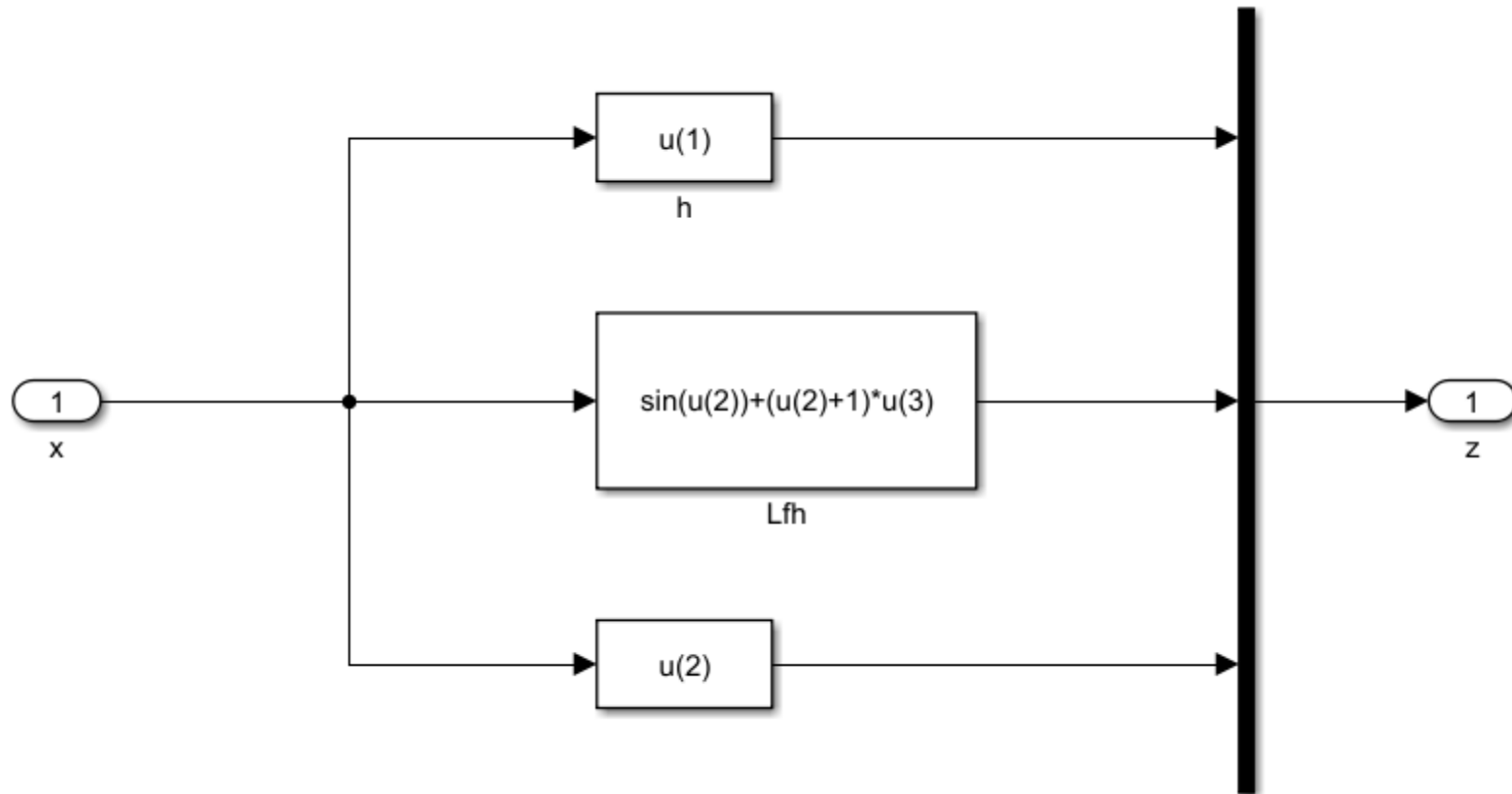
$$\begin{aligned} u &= u(\mathbf{x}, v) = \frac{1}{L_b L_f h} (v - L_f^2 h) \\ v &= \ddot{y}_d - K_d \dot{e} - K_p e \end{aligned}$$

# Modello sistema

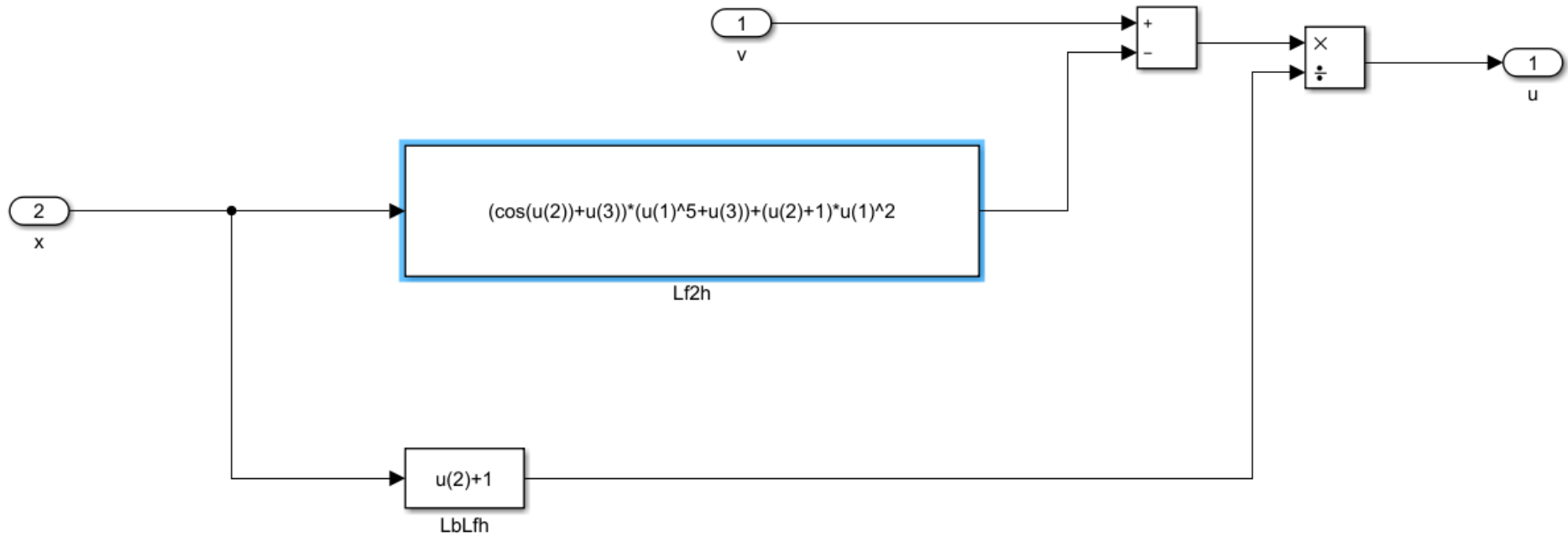


Blocchi 'interpreted matlab functions'

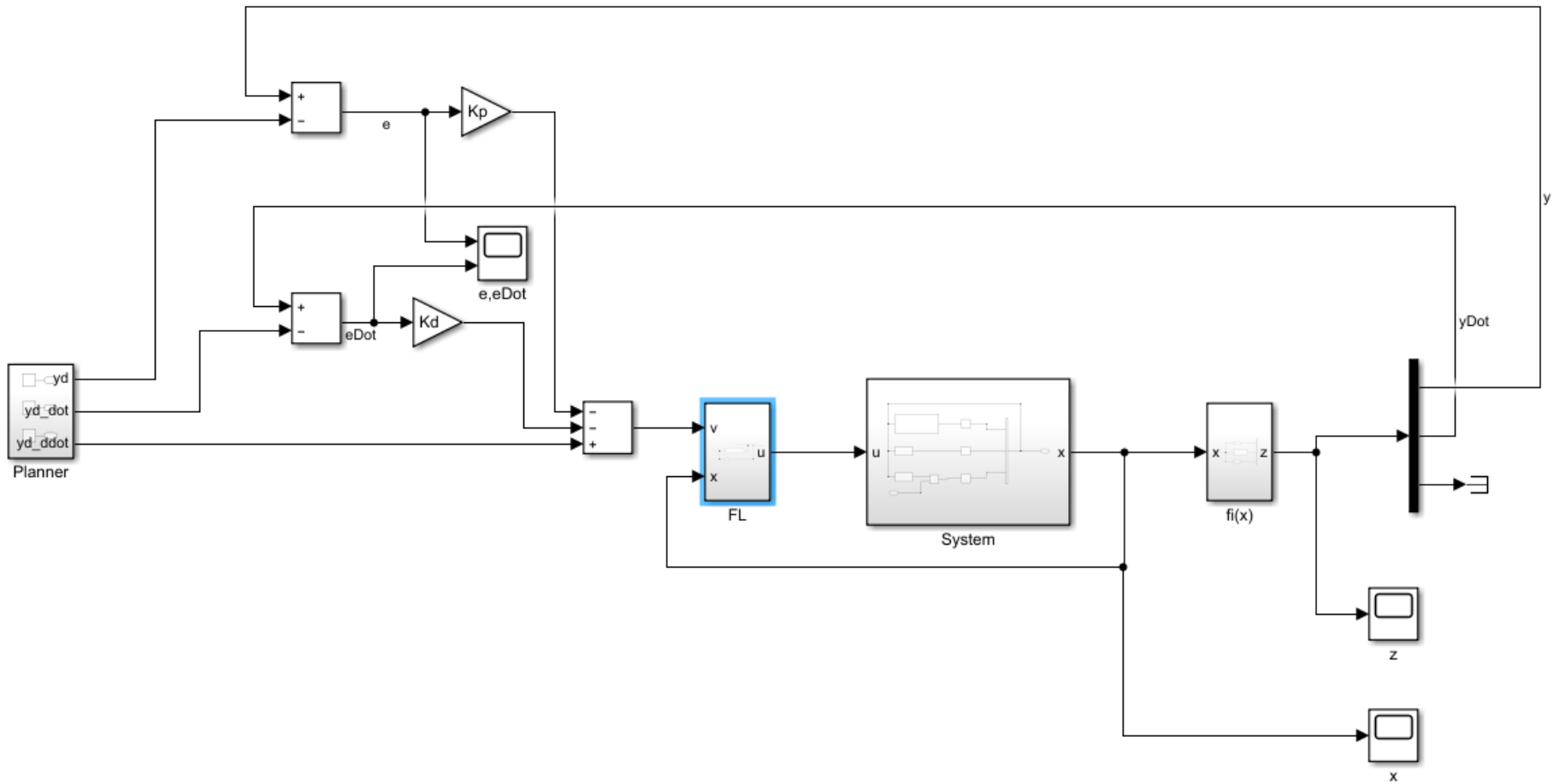
# Modello diffeomorfismo



# Ingresso linearizzante



# Anello di controllo complessivo



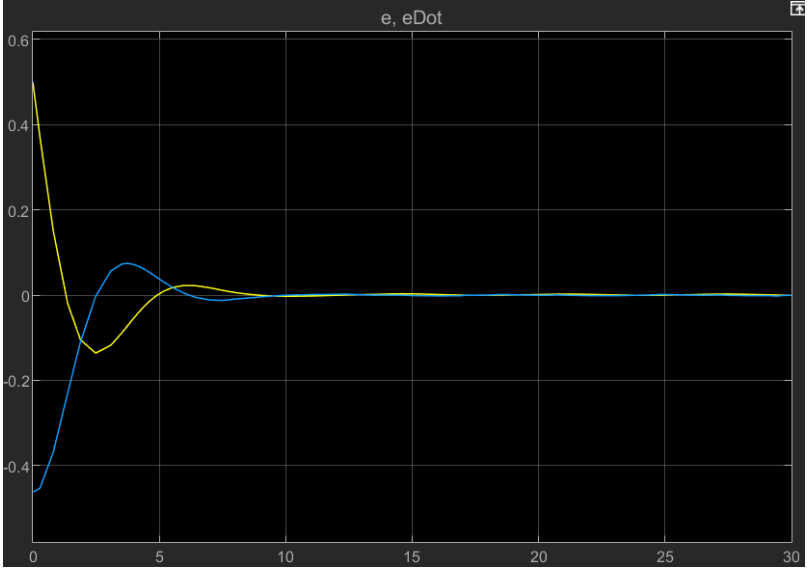


# Risultati tracking



**z**

↓



← **e, e'**

**x**

↓

