

1 LA MODELLAZIONE DEI MECCANISMI

1.1 INTRODUZIONE

Per affrontare lo studio di un qualsiasi *sistema meccanico* è necessario formulare un adeguato *modello fisico* del sistema e successivamente dedurre da questo il relativo *modello matematico*. Con il termine *modello fisico* si intende un sistema fisico immaginario che sia equivalente al sistema meccanico reale nell'ambito di un insieme prefissato di approssimazioni. Tali approssimazioni vanno a focalizzare un particolare aspetto del comportamento del sistema reale e vanno a trascurare tutti quegli effetti che vengono considerati come piccoli rispetto al particolare comportamento del sistema cui si è interessati. Le approssimazioni spesso adottate sono le seguenti:

- Le caratteristiche distribuite sono sostituite da caratteristiche concentrate
- Il comportamento del sistema è lineare
- I parametri del sistema sono tempo invarianti
- Incertezze e disturbi sono trascurabili

Una volta individuato il modello fisico del sistema si procede alla determinazione del modello matematico, cioè dell'insieme di relazioni matematiche che descrivono il comportamento del sistema fisico stesso.

1.2 MODELLI FISICI PER L'ANALISI DEI MECCANISMI

Nel caso dei meccanismi, il modello fisico che permette lo studio del comportamento vibratorio è necessariamente più complesso di quello usualmente adottato per effettuare l'analisi *cinematica* (analisi di posizione, di velocità ed accelerazione), *statica* (analisi delle forze trasmesse) o *dinamica di corpo rigido*.

Ai fini dell'analisi *cinematica* e *statica* i vari membri del meccanismo vengono modellati con elementi lineari, piani o tridimensionali perfettamente rigidi e privi di massa, inoltre le coppie cinematiche vengono considerate prive di gioco. Per l'analisi *dinamica di corpo rigido* si mettono in conto le proprietà inerziali dei vari membri (masse e momenti di inerzia) che vengono ancora considerati rigidi, così come di solito sono trascurati i giochi nelle coppie cinematiche. Per l'analisi *cinetoelastodinamica* (analisi del comportamento vibratorio) si tiene conto anche della cedevolezza elastica dei membri e, eventualmente, anche dei giochi nelle coppie cinematiche e degli attriti; tuttavia tali proprietà vengono spesso trascurate anche nei modelli più raffinati.

Negli esempi applicativi che saranno presentati in questo lavoro si intende studiare il comportamento vibratorio dei meccanismi in esame: una macchina utensile ed un meccanismo di distribuzione di un motore a combustione interna. Diverse indagini hanno dimostrato come il comportamento elastodinamico di un meccanismo sia influenzato in modo determinante dai giochi presenti nelle coppie cinematiche che pertanto saranno opportunamente considerati. Infine vi sarà la necessità di considerare la variabilità di alcuni parametri fisici del sistema al variare della configurazione del meccanismo. I modelli fisici adatti a descrivere i comportamenti di tali meccanismi risultano, quindi, fortemente non-lineari.

1.3 SIGNIFICATO DEI DIVERSI PARAMETRI

Le *proprietà inerziali* e la *cedevolezza elastica* dei membri sono gli elementi che influenzano maggiormente il comportamento dinamico del meccanismo. Ciascun membro del meccanismo deve essere discretizzato in modo tale che il modello sia in grado di riprodurre i primi modi di vibrare di ciascun membro. La corrispondenza può essere limitata anche soltanto al primo modo di vibrare del membro.

I *giochi* presenti nelle coppie cinematiche fanno sì che, durante il moto, possa aversi perdita di contatto fra due membri seguita da un urto più o meno violento. Durante il periodo di perdita del contatto le caratteristiche dinamiche del sistema cambiano drasticamente e il

successivo urto eccita dei moti vibratori alle frequenze naturali del meccanismo. I giochi sono inoltre destinati ad aumentare con l'usura. Tenere conto del gioco, nella modellazione di un meccanismo, può quindi essere utile non solo per prevedere il comportamento vibratorio del sistema reale con migliore approssimazione, ma per prevedere il comportamento vibratorio del meccanismo in funzione del grado di usura.

Gli *attriti* non possono essere trascurati, altrimenti le vibrazioni comunque eccitate non si smorzerebbero mai e la risposta del meccanismo risulterebbe alterata in modo sostanziale rispetto alla realtà. È tuttavia quasi sempre lecito modellare le reali resistenze passive (smorzamento strutturale, resistenza del mezzo, ecc.) con delle *resistenze viscosi* equivalenti. In alcuni casi può essere inoltre necessario modellare l'attrito colombiano.

Infine è opportuno ricordare che tali parametri fisici del sistema possono essere anche intesi come *variabili*, in conseguenza delle seguenti circostanze:

- Il parametro è effettivamente variabile (es. la rigidità di ingranamento fra due ruote dentate varia al variare della posizione del contatto fra i denti e col numero di denti contemporaneamente in presa)
- Il parametro in questione (massa, rigidità, smorzamento, ecc.) viene ridotto ad un particolare punto del sistema e tale rapporto di riduzione è variabile con la configurazione del meccanismo.

1.4 METODOLOGIE DI MODELLAZIONE

Lo studio dinamico di un meccanismo viene svolto seguendo le diverse fasi del diagramma di flusso sotto rappresentato:

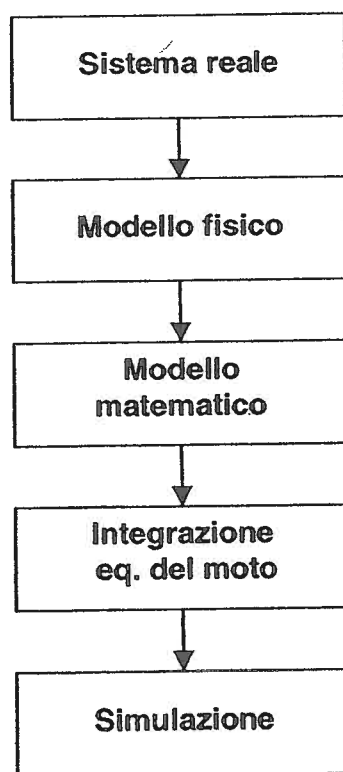


Fig. 1-1 : Diagramma di flusso dello studio dinamico di un meccanismo

La prima fase, cioè quella di scelta del modello fisico, è evidentemente la più importante in quanto condiziona gli aspetti del comportamento dinamico del sistema di cui si vuole tenere conto. La seconda fase è una diretta conseguenza della prima, per la terza c'è una certa libertà di scelta fra i diversi algoritmi utilizzabili che influenzano esclusivamente parametri come il tempo di calcolo, la convergenza, ecc.

Il modello matematico è costituito da un sistema di equazioni differenziali che descrivono il comportamento dinamico del modello fisico. Solo in alcuni casi molto semplici si può ottenere la soluzione del modello matematico in forma chiusa; di solito la soluzione viene ottenuta per via numerica mediante l'utilizzo di un calcolatore.

Le metodologie di modellazione più impiegate per lo studio dinamico dei meccanismi sono due:

- Metodo degli elementi finiti (MEF)
- Metodo degli elementi componenti (MEC)

Il metodo degli *elementi finiti* è largamente impiegato per l'analisi statica e dinamica degli organi di macchine e delle strutture in genere. Esso permette di studiare sistemi con un elevato numero di gradi di libertà. Con questo metodo risultano di difficile modellazione le non linearità del sistema che, come precedentemente ricordato, influenzano in modo determinante il comportamento dinamico. La difficoltà nella modellazione di non linearità quali i giochi rappresenta un limite del MEF per lo studio dinamico dei meccanismi.

Il metodo degli *elementi componenti* è una particolare formulazione del metodo classico di modellazione dei sistemi meccanici a *parametri concentrati*. Il limite di tale modellazione risiede nel numero relativamente basso di gradi di libertà che possono essere presi in considerazione. Nei casi più comuni è, comunque, sufficiente che il modello sia adeguato a riprodurre il comportamento modale del sistema reale entro il campo di frequenze di effettivo interesse. Un altro inconveniente del metodo sta nell'ampia arbitrarietà nella scelta del numero e della posizione dei parametri concentrati (masse, molle, ecc.) da impiegare, scelta che influenza la bontà del modello. I vantaggi principali sono invece la facilità con cui si possono mettere in conto le non linearità e la semplicità concettuale dell'interpretazione dei risultati.

1.5 IL METODO DEGLI ELEMENTI COMPONENTI (MEC)

Come in tutti i metodi a parametri concentrati, nel MEC si modella il sistema fisico, che per sua natura è costituito da componenti con proprietà distribuite - e quindi con infiniti gradi di libertà - mediante un sistema costituito da un numero finito, di solito abbastanza limitato, di componenti. Ciascun elemento del modello possiede una sola delle caratteristiche meccaniche che nella realtà fisica sono presenti contemporaneamente nello stesso componente. Nella scelta del modello e nella valutazione dei parametri è di fondamentale importanza tenere presente il comportamento reale del meccanismo e, contemporaneamente, sapere quali caratteristiche se ne vogliono simulare. Il modello descriverà i moti vibratori che si sovrappongono ai moti di corpo rigido. Le masse del modello dovranno essere tali da possedere la stessa energia cinetica del sistema reale sia per il moto rigido sia, entro certi limiti, per i moti vibratori ad esso sovrapposti.

1.5.1 Schema del metodo

Lo schema del metodo degli elementi componenti può venire riassunto nei seguenti passi:

- scelta del numero di masse con cui modellare il sistema. Ad ogni massa corrisponde un grado di libertà. La posizione della massa è individuata dalla rispettiva coordinata generalizzata (spostamento lineare o angolare);
- individuazione degli elementi che esercitano forze sulle masse: molle, resistenze passive (attriti colombiani o viscosi), azioni forzanti;
- scrittura delle equazioni del moto;
- integrazione delle equazioni del moto.

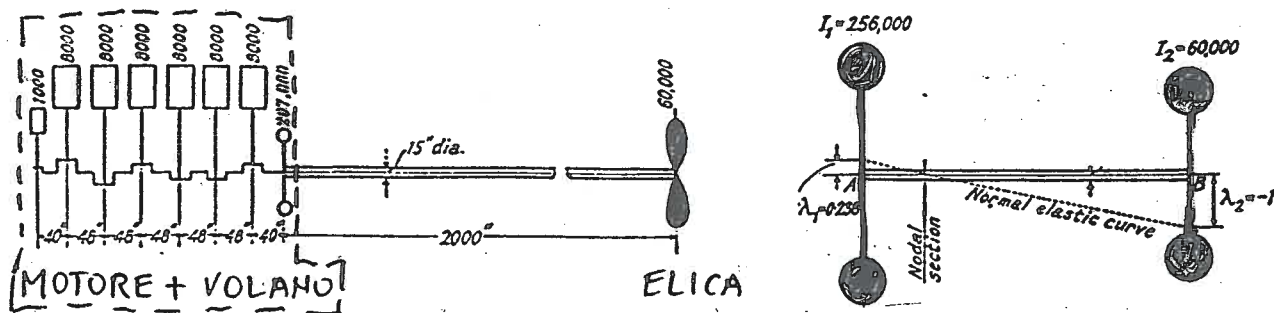
LA MODELLAZIONE A PARAMETRI CONCENTRATI

Il modello fisico è costituito da elementi, ciascuno dei quali rappresenta una sola proprietà meccanica (elementi inerziali, rigidità, elementi dissipativi, giochi, ...).

Ad ogni **elemento inerziale** (massa o momento di inerzia) è associata un **coordinata** (spostamento lineare od angolare), che corrisponde ad uno dei **g.d.l.** del modello.

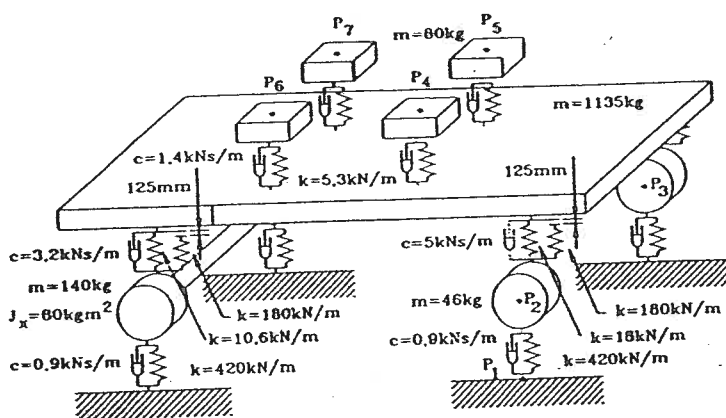
Nel caso in cui il sistema meccanico sia costituito da **organi di grande rigidità ed altri molto deformabili** (es. molle), il modello a parametri concentrati si ottiene semplicemente considerando i primi come infinitamente rigidi e concentrando la deformabilità del sistema nei secondi (di cui si trascura la massa).

Esempio: Albero di trasmissione navale - 2 g.d.l.

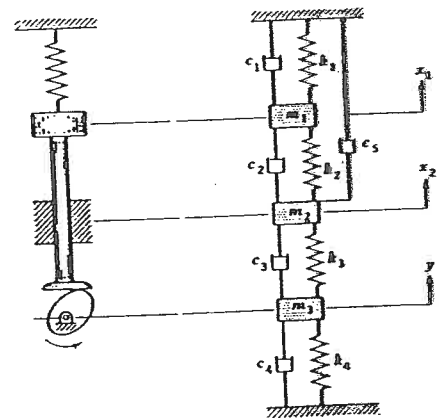


Il numero di gradi di libertà di un sistema è pari al numero delle coordinate indipendenti necessarie per individuarne la configurazione.

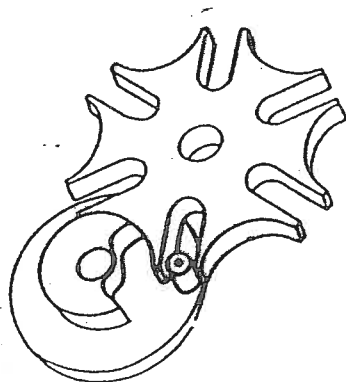
- Esempi di sistemi a molti gradi di libertà (*mgdl*, o *mdof*):



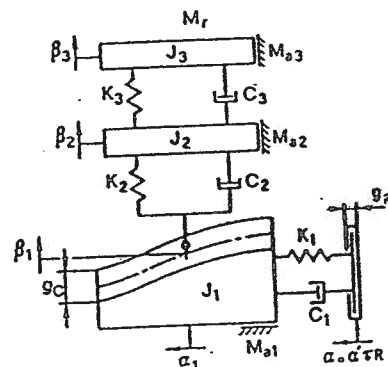
Modello di autovettura a 11 gdl



Modello di punteria a 3 gdl



Modello di un meccanismo a croce di Malta a 3 gdl.



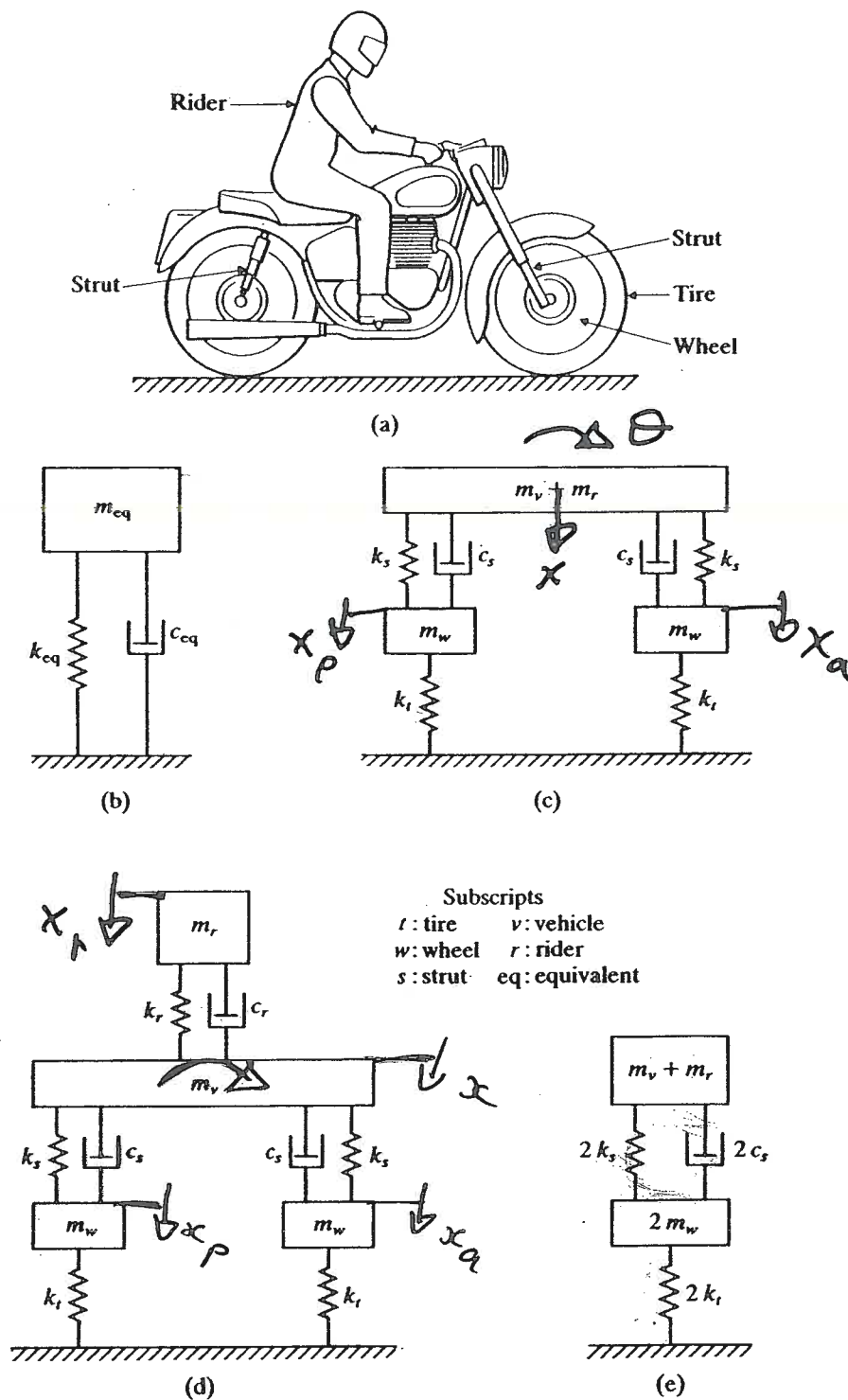
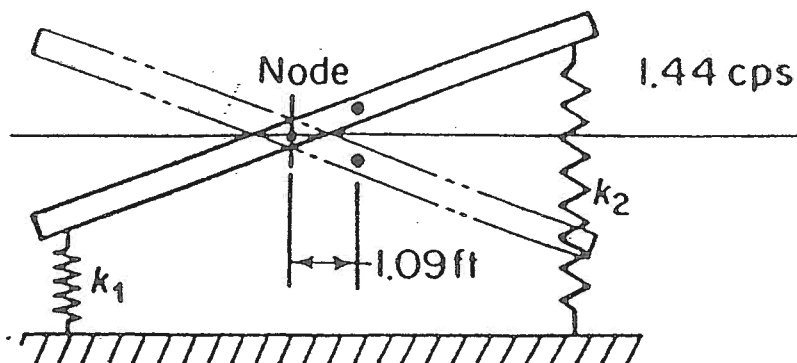
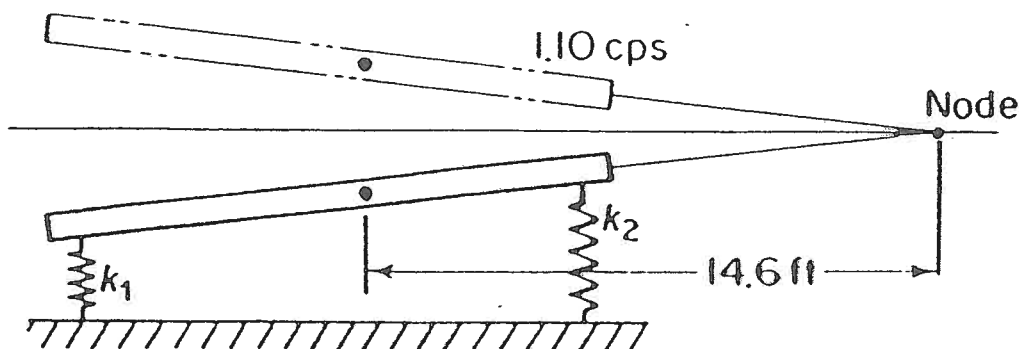
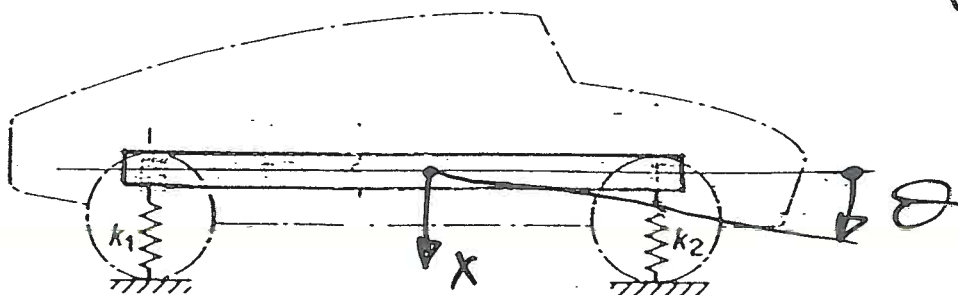


FIGURE 1.18 Motorcycle with a rider—a physical system and mathematical model.

ESEMPIO

Modi propri di vibrare di un autoveicolo.

*Modello
a 2 gdl*



MODELLAZIONE A PARAMETRI CONCENTRATI DI MECCANISMI

➤ Perché studiare il comportamento dinamico di un meccanismo ?

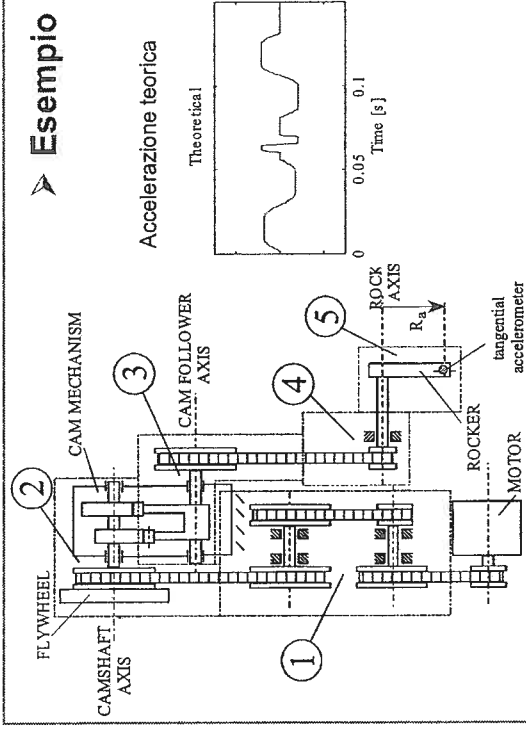
- ❑ Un meccanismo, in linea teorica, deve seguire una determinata **legge di moto**.
- ❑ Nella realtà esiste uno **scostamento tra il moto effettivo e la legge di moto teorica** del cedente.
- ❑ Il meccanismo **vibra** con oscillazioni che si sovrappongono al moto di corpo rigido.
- ❑ Possono aversi **picchi di accelerazione** indesiderati ai quali sono associate **elevate forze di inerzia** e fenomeni dinamici che:
 - producono **elevate sollecitazioni** e possibili **guasti**
 - peggiorano la **qualità del prodotto**
 - producono **vibrazioni e rumore**

Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

3

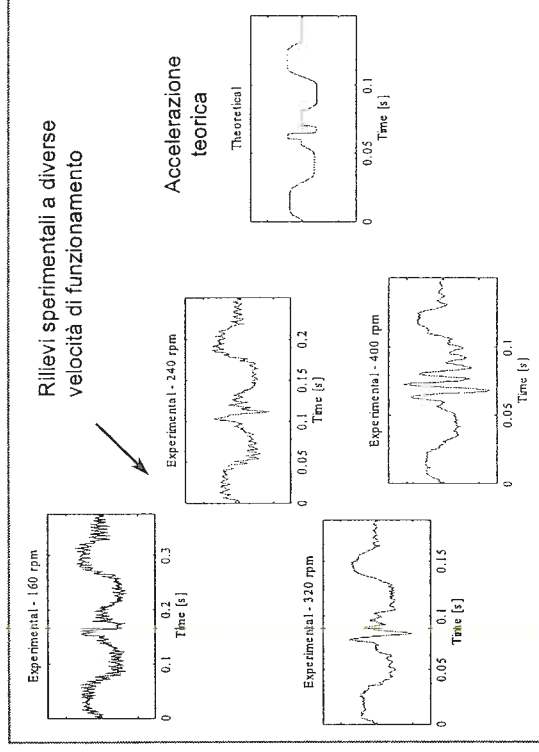
➤ Esempio



Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

4



Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

5

➤ Osservazioni

- ❑ I fenomeni dinamici risultano più intensi con l'aumentare della **velocità della macchina** e possono risultare inaccettabili per macchine di elevate prestazioni (velocità, precisione).
- ❑ Occorre **individuare le cause** che danno origine agli effetti dinamici indesiderati, al fine di ridurli entro limiti accettabili per le specifiche funzionali della macchina.
- ❑ A questo scopo, è particolarmente utile l'impiego di **modelli** atti a simulare adeguatamente l'effettivo comportamento dinamico dei meccanismi; infatti risulta possibile:
 - individuare i **parametri costruttivi critici** per il comportamento dinamico
 - verificare gli **effetti della modifica** di tali parametri a livello di simulazione

Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

6

➤ Il 'dilemma' della modellazione

- ☐ Cosa **includere** nel modello fisico per renderlo sufficientemente preciso?
- ☐ Come mantenerlo **semplice** per rendere possibile e ragionevolmente **rapida** la soluzione del corrispondente modello matematico con gli strumenti di calcolo a disposizione?

Quale è il "MIGLIOR MODELLO"?

Il miglior modello è sempre il più semplice modello che risponde agli scopi e ai criteri che lo studio si propone.

*Il passaggio dal sistema reale al modello fisico comporta necessariamente delle **approssimazioni consapevolmente accettate**, che consistono principalmente nel trascurare tutto quanto provoca effetti piccoli sul comportamento del sistema.*

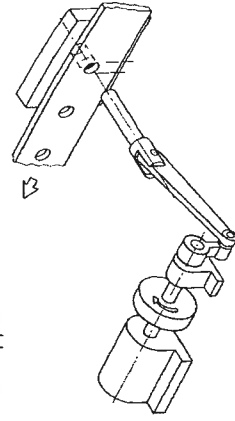
Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

10

➤ Modellare i meccanismi

- ☐ Il modello fisico per lo studio del comportamento vibratorio di un meccanismo è necessariamente più complesso di quello impiegato per l'analisi cinematica o per l'analisi dinamica di corpo rigido, nelle quali si fanno le seguenti approssimazioni:
 - membri perfettamente rigidi
 - assenza di gioco nelle coppie cinematiche



- ☐ I meccanismi sono composti da **membri elastici** che si deformano sotto l'azione delle forze trasmesse e delle forze di inerzia.

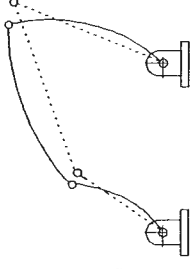
Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

11

➤ Modellare i meccanismi

- ☐ Trascurare tale deformabilità (cedevolezza) elastica è **possibile solo se**
 - le forze trasmesse sono piccole
 - velocità ed accelerazioni sono ridotte.



- ☐ Un meccanismo progettato "cinematicamente" può non essere in grado di svolgere correttamente la propria funzione se fatto operare ad alte velocità.

Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

12

➤ Modellare i meccanismi

- ☐ Per macchine automatiche di **elevate prestazioni**, l'attenzione va rivolta all'analisi **CINETO-ELASTO-DINAMICA** dei meccanismi, che permette di simulare adeguatamente l'effettivo **comportamento dinamico e vibratorio**.
- ☐ In tale analisi si tiene sempre conto di:
 - **cedevolezza** elastica dei membri
 - **proprietà inerziali** dei membri
- ☐ Diverse indagini hanno inoltre mostrato che il comportamento vibratorio è influenzato in modo determinante da:
 - giochi nelle coppie cinematiche
 - attriti
 - **variabilità dei parametri** con la configurazione del meccanismo

Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

14

➤ Cedevolezza elastica e proprietà inerziali

- ❑ Sono messe in conto correttamente se il modello è in grado di **riprodurre i primi modi di vibrare** di ciascuno membro (spesso è sufficiente tenere conto del primo modo), le cui frequenze proprie cadono nel campo di frequenza di effettivo interesse.

Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

15

➤ Giochi

- ❑ Durante il moto possono aversi **perdite di contatto** tra due membri:
 - il sistema si modifica (**non linearità !**)
 - si hanno urti che eccitano **vibrazioni**
- ❑ I giochi sono destinati ad aumentare per usura:
 - occorre tenerne conto per **prevedere l'evoluzione temporale** del comportamento del meccanismo in conseguenza dell'**'usura**.

Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

16

➤ Attriti

- ❑ **Non possono essere trascurati** (determinano lo smorzamento delle vibrazioni libere e influenzano l'ampiezza delle vibrazioni forzate).
- ❑ Le resistenze passive :
 - smorzamento strutturale
 - resistenza di fluidi
 - attriti nelle coppie cinematiche
 -
 possono essere spesso modellate in maniera 'globale' con **resistenze viscosse equivalenti**.
- ❑ A volte è necessario modellare alcune azioni dissipative in maniera specifica, in particolare nel caso di **attrito secco** (di tipo Coulombiano): ciò introduce non linearità.

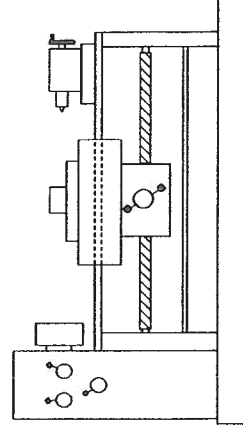
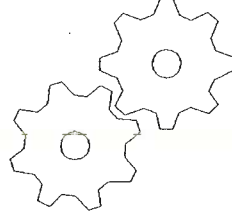
Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

17

➤ Variabilità dei parametri

- ❑ Spesso è necessario considerare i valori numerici di alcuni parametri del modello come variabili (non linearità).

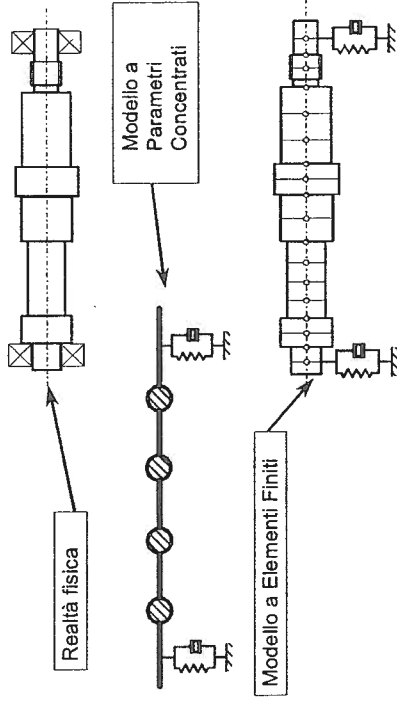


Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

18

➤ Metodologie di modellazione



Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

19

➤ Il Modello a Parametri Concentrati

- ☐ E' caratterizzato dai soli g.d.l. essenziali (generalmente non più di 3 g.d.l. per membro)
- ☐ Ha un significato fisico chiaro ed intuitivo dei g.d.l.
- ☐ E' facile modellare le non linearità
- ☐ E' facile includere nel modello le caratteristiche di componenti elettromeccanici e gli algoritmi di controllo, ottenendo un modello dinamico omogeneo
- ☐ E' una metodologia 'classica' e molto impiegata per l'analisi cinetoelastodinamica di meccanismi a camma e di meccanismi per macchine automatiche

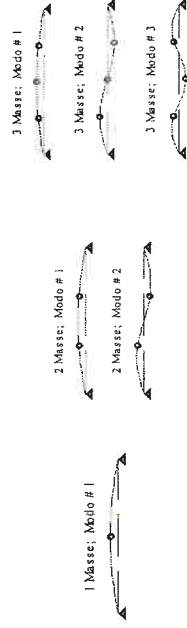
Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

21

➤ Gradi di libertà ed elementi inerziali

- ☐ Ad ogni elemento inerziale (massa o momento di inerzia) è associata un coordinata (spostamento lineare od angolare), che corrisponde ad uno dei g.d.l. del modello.
- ☐ Il numero di elementi inerziali necessari per modellare un membro cresce con il numero di modi di vibrare del membro stesso che si vogliono mettere in conto.



Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

22

➤ Gradi di libertà ed elementi inerziali

- ☐ Di solito si considera il primo modo di vibrare di ciascun membro, al più anche il secondo.
 - ☐ Teoricamente i risultati possono essere migliorati aggiungendo ulteriori gradi di libertà.
 - ☐ Per i campi di frequenze solitamente considerati, si ottiene generalmente una adeguata modellazione di un meccanismo con l'impiego di un numero relativamente basso di g.d.l.
 - ☐ Gli elementi inerziali devono possedere la stessa energia cinetica del sistema reale, sia per il moto rigido, che per i moti vibratori ad esso sovrapposti.
- ☐ Tra due masse sono sempre interposti:
 - Rigidezze
 - Elementi dissipativi (smorzamenti)
 - Giochi (eventualmente)

Modellazione a Parametri Concentrati

Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici

23

➤ Esempio

□ Modello a 2 g.d.l.: coordinate θ_1, Y_2

$$\frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} M_1 \dot{X}_1^2$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{X}_1}{R}$$

$$M_1 = \frac{J_1}{R^2}$$

□ Modello a 2 g.d.l.: coordinate X_1, Y_2

➤ Come valutare i parametri inerziali

- Elementi associati a coordinate lineari ---> masse
- Elementi associati a coordinate angolari ---> momenti di inerzia
 - forma semplice
 - forma complessa (modellatore solido)

$$J_z = \frac{\rho \pi D^4 h}{32} = \frac{MD^2}{8}$$

➤ Esempio

□ Le inerzie distribuite sono concentrate negli elementi inerziali

$$\theta(z) = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \frac{z}{l}$$

$$\dot{\theta}(z) = \dot{\theta}_1 + (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \frac{z}{l}$$

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l J_a \dot{\theta}^2(z) dz = \frac{1}{2} J_a (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) = \frac{1}{2} J_a \dot{\theta}_2^2$$

➤ Rigidezze

- Le rigidezze modellano la **deformabilità elastica** dei membri, che fa sì che lo spostamento relativo tra le coordinate sia diverso da quello cinematico.
- Una **rigidezza** interposta tra due masse (momenti di inerzia) si valuta come la forza (coppia) necessaria a produrre lo spostamento (rotazione) relativo unitario tra le coordinate delle due masse (momenti di inerzia).
- La **cedevolezza** è l'inverso della rigidezza (1/K).
- Un membro può considerarsi perfettamente rigido, se si può ritenere che la sua deformazione influenzi poco i modi di vibrare del meccanismo assemblato: in tal caso se ne ripartisce la massa fra i membri adiacenti.