Esercizi sulle SOSPENSIONI

SOSPENSIONI DI UNA LAVATRICE AUTOMATICA

In una lavatrice automatica, il cui schema è rappresentato in fig.1, il cestello perforato che contiene la biancheria è posto all'interno di un involucro stagno, che contiene acqua durante la fase di lavaggio ed è vuoto durante la centrifugazione. Per assorbire l'effetto delle oscillazioni dovute a sbilanciamento del carico durante la centrifugazione, é previsto un sistema di molle e di smorzatori viscosi. In fig.2 è rappresentata la loro disposizione in un piano perpendicolare all'asse di rotazione.

Siano:

- m la massa delle parti rotanti attorno all'asse del cestello, compresa la biancheria.
- M la massa totale sospesa.
- e l'eccentricità massima delle masse rotanti.
- n velocità di centrifugazione.

Si richiede di determinare le costanti k delle molle e le costanti c degli smorzatori viscosi in modo che, in condizioni di risonanza, l'ampiezza di oscillazione; in ogni direzione, non sia maggiore di X. Si ammetta che ogni punto dell'involucro si muova in piano perpendicolare all'asse di rotazione del cestello.

DATI

Somma ultime due cifre N. matr.	0-4	5-9	10-15	16-18
m (kg)	10	12	8	5
M (kg)	25	30	20	15
e (mm)	20	18	22	16
n (rpm)	500	450	500	480
X (mm)	10	12	8	8

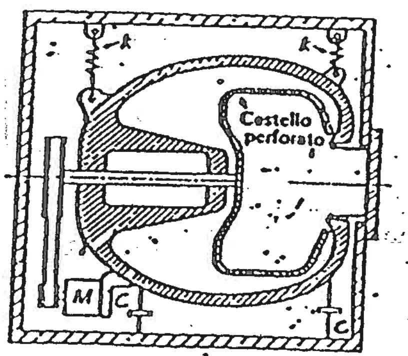


fig. 1

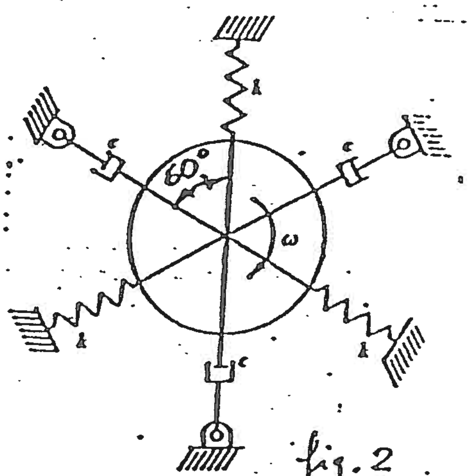


fig. 2

VIBRAZIONI MECCANICHE

Sia dato un compressore centrifugo di massa complessiva m, ruotante a n giri al minuto e con uno squilibrio statico me. Supposto di collegarlo al suolo con una sospensione schematizzabile con una molla e con uno smorzatore viscoso, per il quale sia dato il valore di ζ, si determini quale deve essere la costante elastica k della molla affinchè la trasmissibilità della sospensione τ abbia il valore assegnato.
Si calcoli l'ampiezza della forza trasmessa al suolo.

DATI

Somma ultime due cifre N. di matr.	0-4	5-9	10-14	15-18
m (kg)	40	50	60	70
me (kgmm)	200	210	220	230
n (rm)	1500	1300	1100	900
ζ	0,15	0,20	0,24	0,30
τ	0,08	0,10	0,12	0,14

In un aereoplano, per ridurre le vibrazioni trasmesse agli strumenti di bordo, questi sono stati collegati al telaio dell'aereo mediante sospensioni con smorzamento trascurabile. Se le sospensioni si accorciano di δ_o sotto il peso Q degli strumenti, trovare il rapporto fra le ampiezze delle vibrazioni degli strumenti e dell'aereo, se le vibrazioni dell'aereo avvengono con frequenza f.
Si calcoli la costante elastica equivalente della sospensione.

DATI

Somma ultime due cifre N. matr.	0-4	5-9	10-14	15-18
δ_o (mm)	2,6	2,8	3,0	3,2
Q (N)	180	200	240	260
f (Hz)	30	32	28	26

Sospensioni lavatrice: traccia di soluzione.

Scegliamo un sistema di coordinate come mostrato in figura 2.
Consideriamo un piccolo spostamentoin direzione x. La molla 1 si allunga, la molla 3 si comprime e la molla 2 è soggetta ad una variazione di lunghezza trascurabile. Le forze delle molle sono in prima approssimazione come indicato in figura 3.

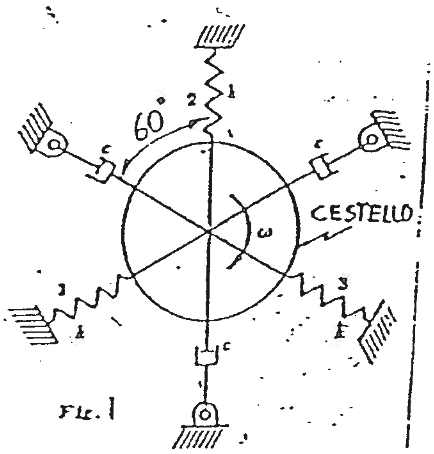


FIG. 1

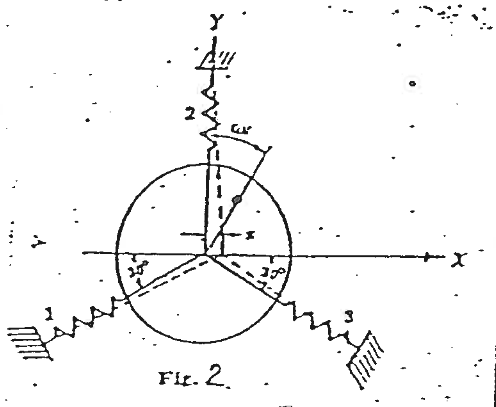


FIG. 2

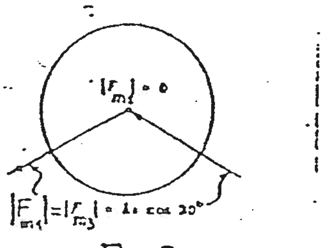


Fig. 3

La risultante delle forze delle molle nella direzione x è:

$$|F_m| = 2\cos 30°\, kx \cos 30° = 1{,}5\, kx$$

In altre parole l'effettiva costante elastica delle molle nella direzione x è 1.5k.
Lo stesso tipo di analisi porta allo stesso valore della costante elastica effettiva in direzione y:

$$|F_m| = ky + 2k\cos 60° \cdot \cos 60°\, y = 1{,}5\, ky$$

Analizzando allo stesso modo le forze dovute agli smorzatori in direzione x e y troviamo:

- in direzione x $\quad |F_s| = 2c\dot{x}\cos 30° \cos 30° = 1{,}5\, c\dot{x}$

- in direzione y $\quad |F_s| = c\dot{y} + 2c\dot{y}\cos 60° \cos 60° = 1.5\, c\dot{y}$

Quindi il fattore di smorzamento effettivo del sistema in direzione x e y è 1.5c.
Come mostrato dalla fig.1 a pag.59, vi sono due sitemi di molle e smorzatori uguali a quello analizzato, disposti su due piani paralleli ed ortogonali all'asse del cestello. La costante elastica ed il fattore di smorzamento equivalenti sono dunque rispettivamente 3k e 3c.
Dato che tutti i coefficienti delle equazioni differenziali del moto in direzione x e y sono uguali è sufficiente analizzare una sola equazione. Tale equazione, ad esempio quella in direzione y, è :

$$M\ddot{y} + 3c\dot{y} + 3ky = me\omega^2 \sin\omega t$$

$$y = Y\sin(\omega t - \psi) \quad ; \quad \tan\psi = \frac{2\xi\,\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

l'ampiezza dell'oscillazione sarà:

$$Y = \frac{me\omega^2/M\omega_n^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad (1)$$

La forza trasmessa al telaio è data da:

$$T_0 = M\omega_n^2 Y \sqrt{1 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

e sostituendo a Y

$$\frac{T_0}{m\omega^2 e} = \frac{\sqrt{1+\left(2\xi\,\omega/\omega_n\right)^2}}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left(2\xi\,\omega/\omega_n\right)^2}}$$

per avere basso tale rapporto deve essere $(\omega/\omega_n)^2 > 2$. Assumiamo di tentativo un valore $\omega/\omega_n = 3$ (per avere bassa trasmissibilità) e dimensioniamo $\bar{k}$ e $\bar{c}$. Essendo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\bar{k}}{M}} = \sqrt{\frac{3k}{M}} \quad , \quad 3k = M\omega_n^2 = M\left(\frac{\omega}{3}\right)^2$$

da cui k.

Dimensioniamo ora lo smorzatore, calcolando il fattore di smorzamento $\bar{c}$, affinchè in condizioni di risonanza l'ampiezza delle oscillazioni non superi il valore $\bar{Y}$ $(=\bar{X})$ imposto.

In condizioni di risonanza l'ampiezza di oscillazione è data dalla (1) ove si ponga $\omega/\omega_n = 1$:

$$Y = \frac{me/M}{2\xi} = \frac{me/M}{\bar{c}/M\omega_n} = \frac{me\,\omega_n}{\bar{c}} \quad \text{ricordando che} \quad 2\xi = \frac{\bar{c}}{M\omega_n}$$

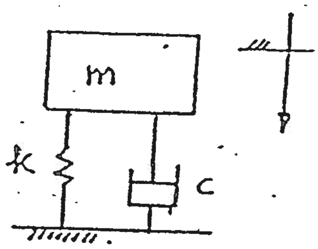
Deve essere $Y < \bar{Y}$ quindi troviamo il valore minimo di $\bar{c}$ dalla

$$\frac{me\,\omega_n}{\bar{c}} \leq \bar{Y} \quad , \quad \bar{c} \geq \frac{me\,\omega_n}{\bar{Y}}$$

e quindi

$$c = \frac{\bar{c}}{3}$$

Sospensioni compressore: traccia di soluzione.



$$F = F_0 \sin\omega t \qquad F_0 = s\,\omega^2$$

Dalla

$$\tau = \frac{T_0}{F_0} = \frac{\sqrt{1+\left(2\xi\,\omega/\omega_n\right)^2}}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left(2\xi\,\omega/\omega_n\right)^2}}$$

si ricava $(\omega/\omega_n)^2$ e quindi noto ω si ha ω_n. Noto ω_n dalla $\omega_n = \sqrt{k/m}$ si ricava k.

L'ampiezza della forza trasmessa al suolo è data da $T_0 = \tau . F_0$.

SOSPENSIONI DI UN MACCHINARIO

Una macchina di massa complessiva m = 450 kg, con un rotore avente uno squilibrio statico s = 0,2 kg m, funziona a regime a velocità n = 1200 rpm. E' montata su una sospensione che ha freccia statica δ_0 = 5 mm e fattore di smorzamento ζ = 0,1. Calcolare la rigidezza k della sospensione, l'ampiezza T_0 della forza trasmessa al suolo e l'ampiezza X delle oscillazioni della macchina alla velocità di regime.

Volendo ridurre l'ampiezza delle oscillazioni al valore X' = 0,1 mm, lasciando inalterata l'ampiezza T_0 della forza trasmessa, si monta la macchina su un blocco di calcestruzzo e si modifica la sospensione. Si calcoli la massa M del blocco e la nuova rigidezza k' della sospensione, ipotizzando che il fattore di smorzamento resti inalterato.

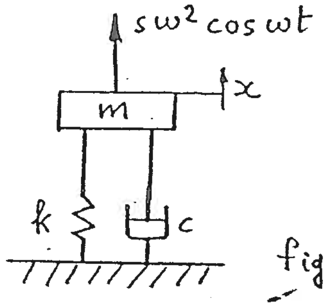


fig. 1

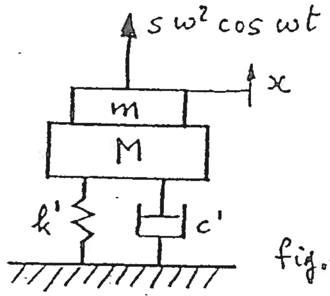


fig. 2

Traccia di soluzione e risultati.

Nel primo modo di installazione (fig. 1) risulta:

$$\omega = n\frac{\pi}{30} = 125,7 \text{ rad/s} \quad ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_0}} = 44,29 \text{ rad/s} \quad ; \quad k = m\omega_n^2 = 882,9 \text{ kN/m}$$

$$T_0 = s\omega^2 \frac{\sqrt{1+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}} = 514 \text{ N} \qquad (1)$$

$$X = \frac{s\omega^2}{m\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}} = 0,506\cdot 10^{-3} \text{ m} \qquad (2)$$

Aggiungendo il blocco di calcestruzzo e modificando la sospensione (fig. 2), T_0 deve restare inalterato e quindi, per la (1), ω_n non può essere modificato:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{k'}{m+M} \qquad (3)$$

inoltre l'ampiezza dell'oscillazione deve ridursi al valore

$$X' = \frac{s\omega^2}{(m+M)\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \; . \qquad (4)$$

Confrontando la (2) e la (4) risulta:

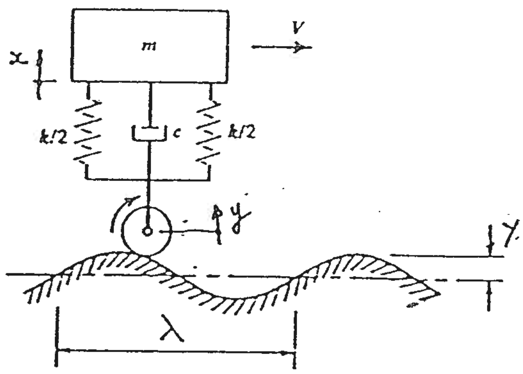
$$\frac{X'}{X} = \frac{m}{m+M} \quad \Rightarrow \quad M = m\left(\frac{X}{X'}-1\right) = 1826 \text{ kg}$$

Infine, dalla (3) si ricava:

$$k' = k\frac{X}{X'} = 4466 \ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

SOSPENSIONI DI UN VEICOLO

Per studiare in prima approssimazione il comportamento delle sospensioni di un veicolo, si impieghi la schematizzazione di figura. Il veicolo si muove con velocità v=100 km/h su una superficie sinusoidale con lunghezza d'onda λ=4 m ed ampiezza Y. La massa del veicolo a pieno carico è m_p=1200 kg, a vuoto è m_v=400 kg. La costante elastica equivalente della sospensione è k=400 kN/m; il fattore di smorzamento a pieno carico è ζ_p=0,4. Si considerino solo le oscillazioni verticali del veicolo, nell'ipotesi che le ruote siano infinitamente rigide e rimangano sempre a contatto con il suolo. Si determini il rapporto tra l'ampiezza delle oscillazioni X del veicolo e l'ampiezza delle oscillazioni imposte alla ruota Y, sia a pieno carico sia a vuoto.



IL LEGAME TRA LA LUNGHEZZA D'ONDA λ E LA PULSAZIONE DELL'ECCITAZIONE È DATO DA:

$$\lambda = v\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = v\frac{2\pi}{\lambda} = 43\ \frac{rad}{s}$$

SI DETERMINA IL FATTORE DI SMORZAMENTO A VUOTO ζ_v:

$$c = 2\zeta_v\sqrt{k m_v} = 2\zeta_p\sqrt{k m_p} \Rightarrow$$

$$\zeta_v = \zeta_p\sqrt{\frac{m_p}{m_v}} = 0{,}693$$

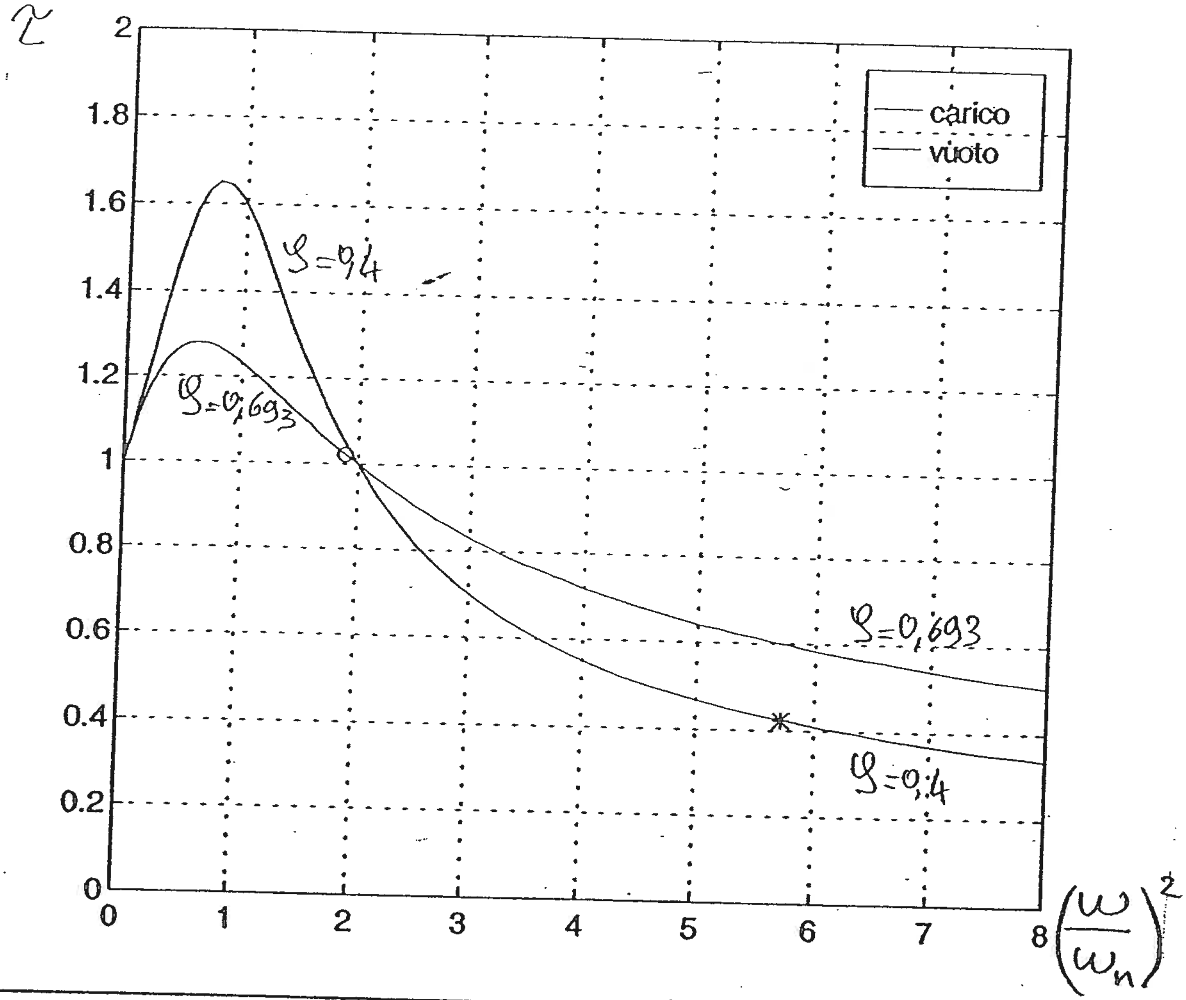
$$\tau = \frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

RISULTA:

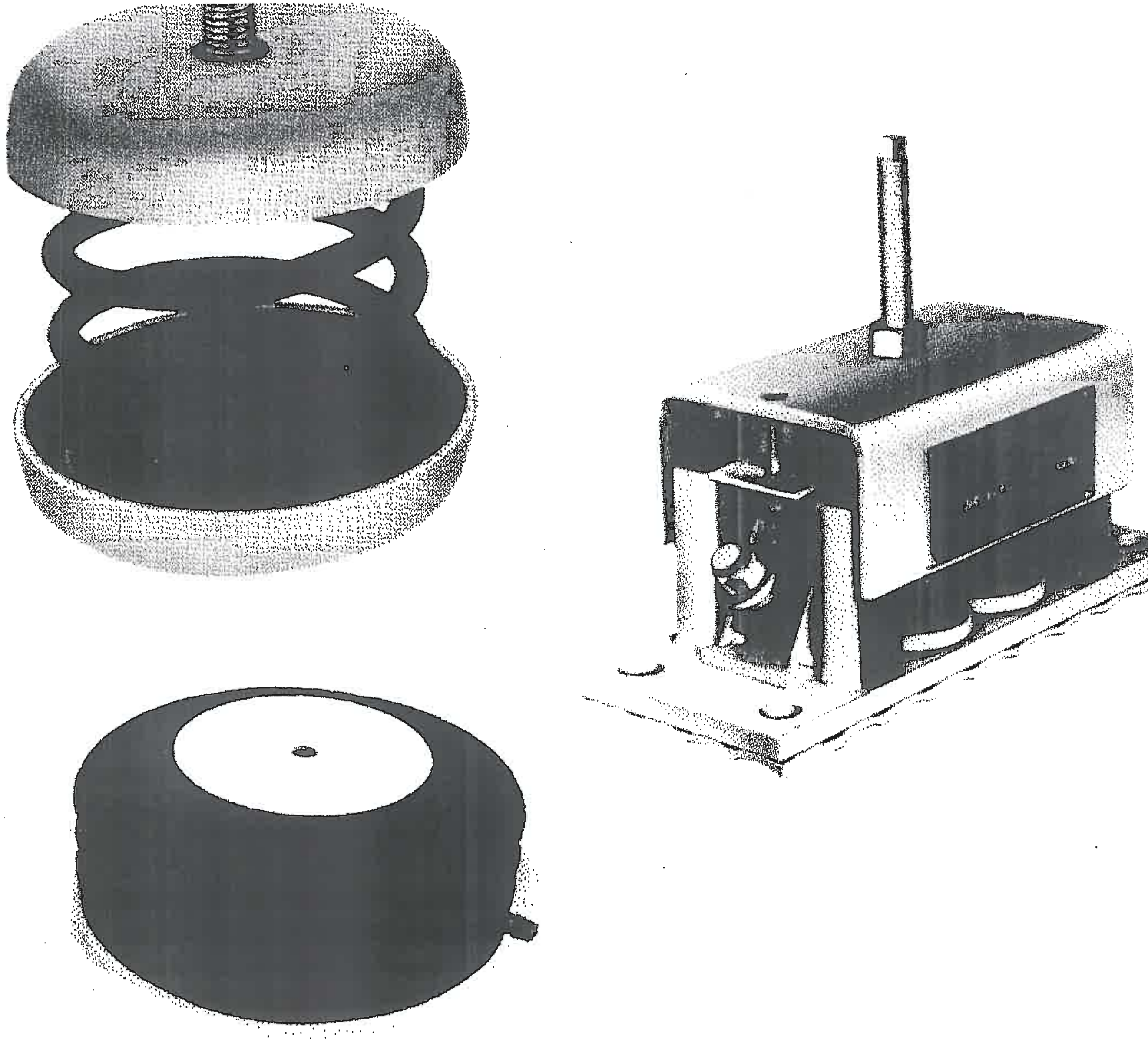
	A VUOTO	A PIENO CARICO
m	400 kg	1200 kg
$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$	31,6 $\frac{rad}{s}$	18,3 $\frac{rad}{s}$
$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$	1,90	5,66
$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$	0,693	0,4
$\tau = \frac{X}{Y}$	1,02	0,43

$$\lambda = V\frac{2\pi}{\omega} \qquad c = 2\zeta\sqrt{km}$$

$$\tau = \frac{X_o}{Y_o} = \sqrt{\frac{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$



	VUOTO	PIENO CARICO
m	400 kg	1200 kg
ω_n	31.6 rad/s	18.3 rad/s
$(\omega/\omega_n)^2$	1.90	5.66
ζ	0.693	0.4
$\tau=X_o/Y_o$	1.02	0.43



(a)

(b)

(c)

FIGURE 9.16 (a) Undamped spring mount; (b) damped spring mount; (c) pneumatic rubber mount. *(Courtesy of* Sound and Vibration.*)*