2. PROPRIETÀ DI INERZIA DEI CORPI RIGIDI

(geometria delle masse)

2.1 - Baricentro

Dato un corpo costituito da N masse puntiformi $m_1, m_2, \ldots, m_N$, la cui posizione nello spazio è data dai vettori $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$, il vettore $\vec{r}_G$ che definisce la posizione del baricentro del corpo è

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_1^N m_n\vec{r}_n}{M} \tag{1.39}$$

dove M è la massa totale del corpo.

Per un corpo costituito da un insieme continuo di materia avente densità ρ, la posizione del baricentro è data da:

$$\vec{r}_G = \frac{\int_V \rho\vec{r}\,dV}{M} \tag{1.40}$$

dove dV è il volume infinitesimo e V il volume totale.

Queste espressioni vettoriali per la posizione del baricentro possono essere scritte come un insieme di equazioni scalari; ad esempio le (1.39) possono essere scritte nel modo seguente:

1

$$(1.41)\qquad \begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_1^N m_n x_n}{M} = \dfrac{\int_V x\,dm}{M} \\ y_G = \dfrac{\sum_1^N m_n y_n}{M} = \dfrac{\int_V y\,dm}{M} \\ z_G = \dfrac{\sum_1^N m_n z_n}{M} = \dfrac{\int_V z\,dm}{M} \end{cases}$$

La posizione del baricentro per alcuni corpi più comuni è riportata nella tabella I.

2.2 - Definizione dei momenti di inerzia

Si consideri un corpo rigido R e un sistema di coordinate di riferimento; i momenti di inerzia del corpo rispetto ai tre assi x, y, z sono espressi da:

$$(1.42)\qquad \begin{cases} I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2)\,dm \\ I_{yy} = \int_V (z^2 + x^2)\,dm \\ I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2)\,dm \end{cases}$$

In queste espressioni V è il volume totale del corpo e dm è la massa infinitesima. Inoltre, le somme (y^2+z^2), (z^2+x^2), (x^2+y^2) rappresentano i quadrati delle distanze della massa infinitesima considerata dagli assi x, y, z.

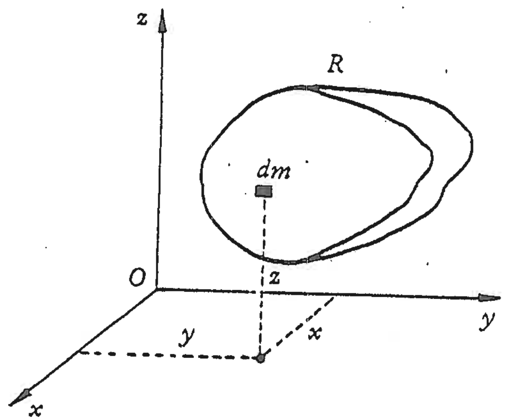


Fig. 18 – Definizione dei momenti di inerzia di un corpo

Sono definite *momenti centrifughi* le seguenti grandezze:

$$(1.43)\qquad \begin{cases} I_{xy} = \int_V xy\,dm = I_{yx} \\ I_{yz} = \int_V yz\,dm = I_{zy} \\ I_{zx} = \int_V zx\,dm = I_{xz} \end{cases}$$

Proprietà importanti sono le seguenti:

a) I momenti di inerzia I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} sono sempre positivi.
b) I momenti centrifughi I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} possono essere positivi o negativi.
c) $I_{xy} = I_{yx} = 0$ se l'asse x o l'asse y o entrambi, sono assi di simmetria del corpo; analogamente per gli altri momenti centrifughi.

2.3 - Raggi di inerzia

Si definisce raggio di inerzia di un corpo la radice quadrata del rapporto fra il momento di inerzia e la massa del corpo

$$(1.44)\qquad \begin{cases} \rho_{xx} = \sqrt{\dfrac{I_{xx}}{m}} \\ \rho_{yy} = \sqrt{\dfrac{I_{yy}}{m}} \\ \rho_{zz} = \sqrt{\dfrac{I_{zz}}{m}} \end{cases}$$

2.4 - Trasposizione dei momenti

Si supponga di conoscere i momenti di inerzia I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} e i momenti centrifughi I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} e di voler calcolare i momenti di inerzia e centrifughi rispetto a un sistema di assi x', y', z' traslati rispetto a x, y, z. Indicando con x_0', y_0', z_0' le coordinate di O nel sistema di riferimento $(O'x'y'z')$ si ha:

$$I_{z'z'} = I_{zz} + m(x_0'^2 + y_0'^2) + 2x_0' \int_V x\,dm + 2y_0' \int_V y\,dm$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + m x_0' y_0' + x_0' \int_V y\,dm + y_0' \int_V x\,dm$$

Se il punto O è il *baricentro* del corpo, allora gli integrali $\int x\,dm$, $\int y\,dm$ sono nulli (1.41), per cui, indicando con G il baricentro:

$$(1.45)\qquad \begin{cases} I_{z'z'} = I_{zz} + m(x'^2_G + y'^2_G) \\ I_{y'y'} = I_{yy} + m(z'^2_G + x'^2_G) \\ I_{x'x'} = I_{xx} + m(y'^2_G + z'^2_G) \\ I_{x'y'} = I_{xy} + m\,x'_G y'_G \\ I_{y'z'} = I_{yz} + m\,y'_G z'_G \\ I_{z'x'} = I_{zx} + m\,z'_G x'_G \end{cases}$$

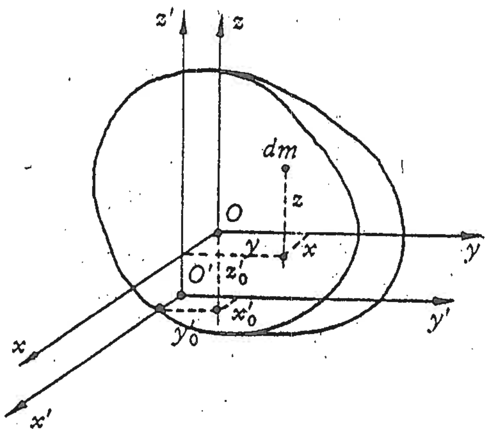


Fig. 19 – Trasposizione dei momenti: traslazione degli assi

Si considerino ora due sistemi di coordinate aventi entrambi origine nello stesso punto O, ma ruotati tra loro.

Supponendo ancora di conoscere i momenti di inerzia e centrifughi rispetto al sistema di assi x, y, z e di voler calcolare i corrispondenti momenti rispetto al sistema di assi x', y', z' si ha:

$$(1.46)\qquad \begin{cases} I_{x'x'} = l^2_{x'x}I_{xx} + l^2_{x'y}I_{yy} + l^2_{x'z}I_{zz} - 2l_{x'x}l_{x'y}I_{xy} - 2l_{x'x}l_{x'z}I_{xz} + \\ \qquad -2l_{x'y}l_{x'z}I_{yz}, \\ I_{y'y'} = l^2_{y'x}I_{xx} + l^2_{y'y}I_{yy} + l^2_{y'z}I_{zz} - 2l_{y'x}l_{y'y}I_{xy} - 2l_{y'x}l_{y'z}I_{xz} + \\ \qquad -2l_{y'y}l_{y'z}I_{yz}, \\ I_{z'z'} = l^2_{z'x}I_{xx} + l^2_{z'y}I_{yy} + l^2_{z'z}I_{zz} - 2l_{z'x}l_{z'y}I_{xy} - 2l_{z'x}l_{z'z}I_{xz} + \\ \qquad -2l_{z'y}l_{z'z}I_{yz}, \\ I_{x'y'} = -l_{x'x}l_{y'x}I_{xx} - l_{x'y}l_{y'y}I_{yy} - l_{x'z}l_{y'z}I_{zz} + (l_{x'x}l_{y'y} + l_{x'y}l_{y'x})I_{xy} \\ \qquad +(l_{x'y}l_{y'z} + l_{x'z}l_{y'y})I_{yz} + (l_{x'z}l_{y'x} + l_{x'x}l_{y'z})I_{zx}, \\ I_{y'z'} = -l_{y'x}l_{z'x}I_{xx} - l_{y'y}l_{z'y}I_{yy} - l_{y'z}l_{z'z}I_{zz} + (l_{y'x}l_{z'y} + l_{y'y}l_{z'x})I_{xy} \\ \qquad +(l_{y'y}l_{z'z} + l_{y'z}l_{z'y})I_{yz} + (l_{y'z}l_{z'x} + l_{y'x}l_{z'z})I_{zx}, \\ I_{z'x'} = -l_{z'x}l_{x'x}I_{xx} - l_{z'y}l_{x'y}I_{yy} - l_{z'z}l_{x'z}I_{zz} + (l_{z'x}l_{x'y} + l_{z'y}l_{x'x})I_{xy} \\ \qquad +(l_{z'y}l_{x'z} + l_{z'z}l_{x'y})I_{yz} + (l_{z'z}l_{x'x} + l_{z'x}l_{x'z})I_{zx} \end{cases}$$

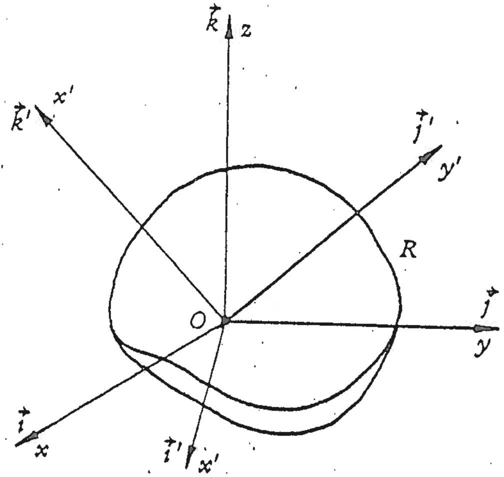


Fig. 20 – Trasposizione dei momenti: rotazione degli assi

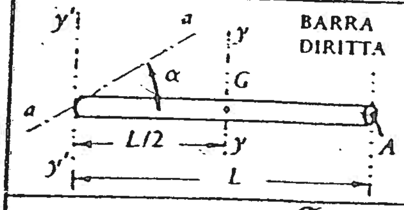
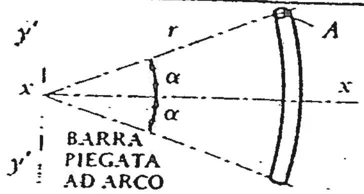
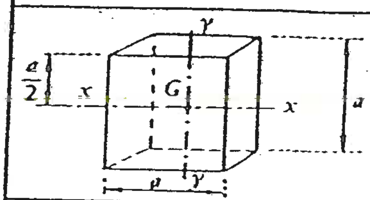
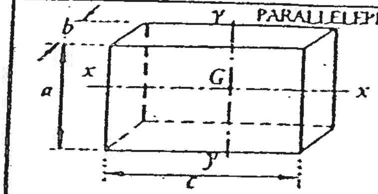
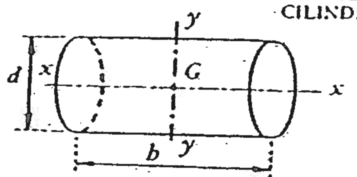
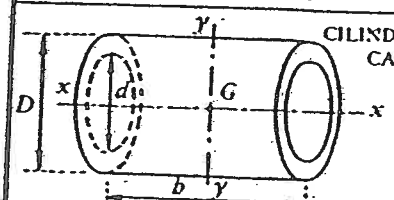
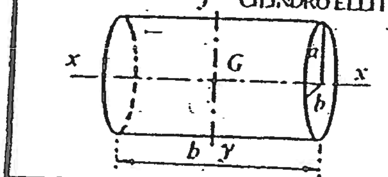
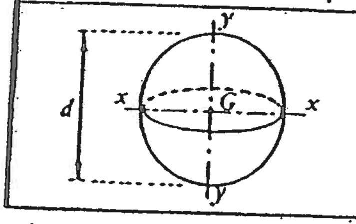
dove $l_{x'x}, l_{x'y}, l_{x'z}$ sono i coseni direttori dell'asse x' rispetto ai tre assi x, y, z, ossia:

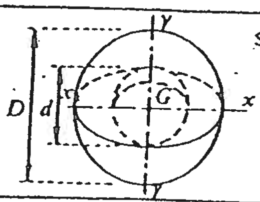
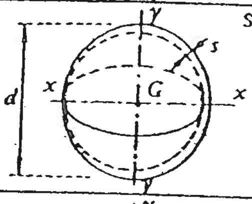
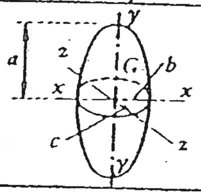
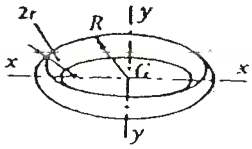
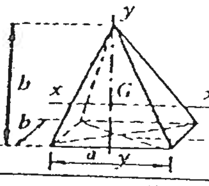
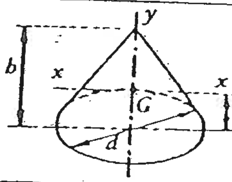
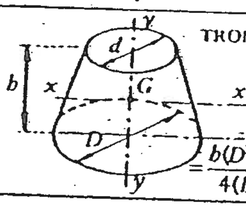
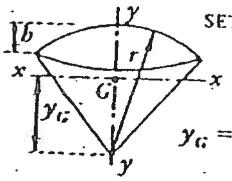
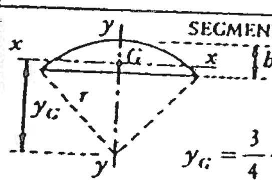
$$(1.47)\qquad \begin{cases} l_{x'x} = \vec{i}' \cdot \vec{i} \\ l_{x'y} = \vec{i}' \cdot \vec{j} \\ l_{x'z} = \vec{i}' \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Analogamente per gli altri coseni direttori.

TABELLA I – Proprietà di inerzia di corpi rigidi

(G = posizione del baricentro, V = volume, m = massa, I = momento di inerzia)

Solido	Volume	Momento di inerzia
 BARRA DIRITTA	$V = A \cdot L$	$I_{yy} = \frac{mL^2}{12}$ $I_{y'y'} = \frac{mL^2}{3}$ $I_{aa} = \frac{mL^2}{3} \sin^2\alpha$
 BARRA PIEGATA AD ARCO	$V = 2\alpha r A$	$I_{y'y'} = \frac{mr^2}{2}\left(1 + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}\right)$ $I_{xx} = \frac{mr^2}{2}\left(1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}\right)$
 CUBO	$V = a^3$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{ma^2}{6}$
 PARALLELEPIPEDO	$V = abc$	$I_{xx} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ $I_{yy} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$
 CILINDRO	$V = \frac{\pi d^2 b}{4}$	$I_{xx} = \frac{md^2}{8}$ $I_{yy} = \frac{m}{4}\left(\frac{d^2}{4} + \frac{b^2}{3}\right)$
 CILINDRO CAVO	$V = \frac{\pi b}{4}(D^2 - d^2)$	$I_{xx} = \frac{m}{8}(D^2 + d^2)$ $I_{yy} = \frac{m}{16}\left(D^2 + d^2 + \frac{4b^2}{3}\right)$
 CILINDRO ELLITTICO	$V = \pi abb$	$I_{xx} = \frac{m}{4}(a^2 + b^2)$ $I_{yy} = \frac{m}{12}(3b^2 + b^2)$
 SFERA	$V = \frac{\pi d^3}{6}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{md^2}{10}$

 SFERA CAVA	$V = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{10}\frac{(D^5 - d^5)}{(D^3 - d^3)}$
 SFERA CAVA SOTTILE	$V = \pi d^2 s$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m d^2}{6}$
 ELLISSOIDE	$V = \frac{4}{3}\pi a b c$	$I_{xx} = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)$
 TORO	$V = 2\pi^2 R r^2$	$I_{xx} = m\left(\frac{R^2}{2} + \frac{5}{8}r^2\right)$ $I_{yy} = m\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)$
 PIRAMIDE RETTANGOLARE $y_G = \frac{b}{4}$	$V = a b \frac{b}{3}$	$I_{xx} = \frac{m}{20}\left(b^2 + \frac{3b^2}{4}\right)$ $I_{yy} = \frac{m}{20}(a^2 + b^2)$
 CONO $y_G = \frac{b}{4}$	$V = \frac{\pi d^2 b}{12}$	$I_{xx} = \frac{3}{40} m(d^2 + b^2)$ $I_{yy} = \frac{3}{40} m d^2$
 TRONCO DI CONO $y_G = \frac{b(D^2+2Dd+3d^2)}{4(D^2+Dd+d^2)}$	$V = \frac{\pi b}{12}(d^2 + D^2 + \sqrt{d^2 D^2})$	$I_{yy} = \frac{3}{40} m \frac{(D^5 - d^5)}{(D^3 - d^3)}$
 SETTORE SFERICO $y_G = \frac{3}{8}(2r - b)$	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 b$	$I_{yy} = \frac{m}{5}(3rb - b^2)$
 SEGMENTO SFERICO $y_G = \frac{3}{4}\frac{(2r-b)^2}{(3r-b)}$	$V = \pi b^2\left(r - \frac{b}{3}\right)$	$I_{yy} = m\left(r^2 - \frac{3rb}{4} + \frac{3b^2}{20}\right) \cdot \frac{2b}{3r-b}$

2.5 - Assi e momenti principali di inerzia

Per una data origine O del sistema di coordinate si possono scegliere infinite terne di assi x, y, z, mutuamente perpendicolari. Tra tutte queste terne è possibile trovarne una per la quale i momenti centrifughi I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} sono nulli. I corrispondenti momenti di inerzia I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} sono detti *momenti principali di inerzia* e verranno scritti come I_x, I_y, I_z; gli assi x, y, z corrispondenti sono detti *assi principali di inerzia.* Se un corpo ha un asse di simmetria questo è un asse principale di inerzia.

Nel caso in cui l'origine degli assi coincida con il baricentro G del corpo gli assi principali di inerzia sono anche detti *assi centrali di inerzia.*

I momenti principali di inerzia per alcuni corpi rigidi principali sono elencati nella tabella I.