SISTEMI A 2 gdl

EQUAZIONI DEL MOTO

Si consideri il sistema a due gdl rappresentato in figura, costituito da masse molle e smorzatori viscosi. Il moto del sistema è completamente descritto dalle coordinate $x_1(t)$ e $x_2(t)$, che definiscono la posizione delle masse m_1 e m_2 a partire dalle rispettive posizioni di equilibrio.

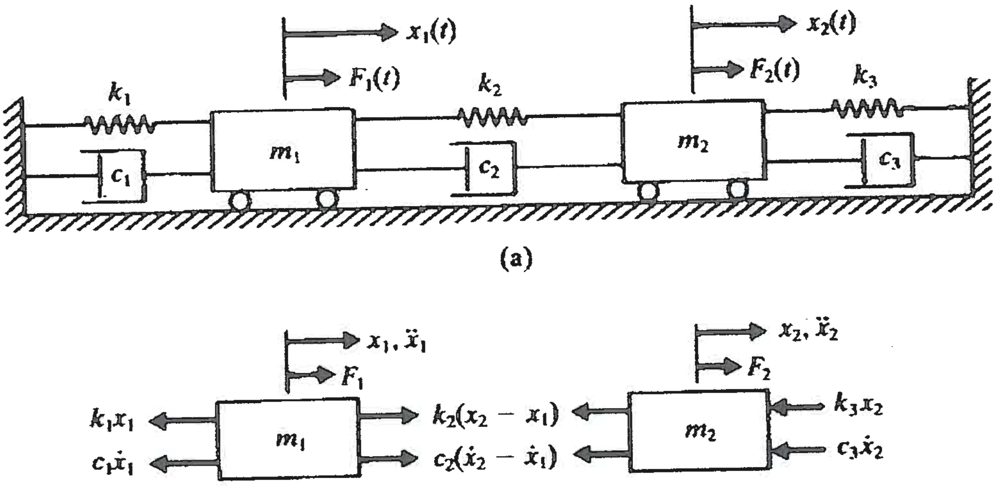


Fig. 5.3 – Sistema vibrante a due gradi di libertà.

L'applicazione del principio di d'Alembert fornisce le equazioni del moto:

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 = F_2(t)$$

che possono essere scritte in forma matriciale:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\}$$

dove: $$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \qquad [C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

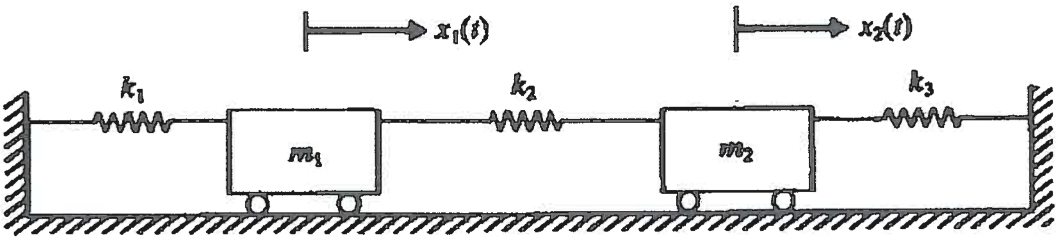
sono dette rispettivamente *matrice massa, rigidezza* e *smorzamento*, e:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \qquad \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

sono chiamati rispettivamente *vettore spostamento* e *forza*.

Le matrici possono risultare, a seconda delle coordinate scelte:
* complete e non simmetriche
* simmetriche
* diagonali.

Esempio



Si consideri il sistema di figura e si assumano le nuove coordinate z_1 e z_2 definite dalle relazioni:

$x_1 = (z_1 - z_2) \qquad x_2 = (z_1 + z_2)$

sostituendo nelle equazioni del moto:

$$m_1(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) + (k_1 + k_2)(z_1 - z_2) - k_2(z_1 + z_2) = 0$$
$$m_2(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) + (k_2 + k_3)(z_1 + z_2) - k_2(z_1 - z_2) = 0$$

cioè:
$$m_1\ddot{z}_1 - m_1\ddot{z}_2 + k_1 z_1 - (k_1 + 2k_2)z_2 = 0$$
$$m_2\ddot{z}_1 + m_2\ddot{z}_2 + k_3 z_1 + (k_3 + 2k_2)z_2 = 0$$

Risulta pertanto: $[M] = \begin{bmatrix} m_1 & -m_1 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} k_1 & -(k_1 + 2k_2) \\ k_3 & k_3 + 2k_2 \end{bmatrix}$

cioè le due matrici sono complete e non simmetriche.

Se, in particolare, $m_1 = m_2 = m$ e $k_1 = k_2 = k_3 = k$, le due equazioni diventano:

$$m\ddot{z}_1 - m\ddot{z}_2 + k\,z_1 - 3k\,z_2 = 0$$
$$m\ddot{z}_1 + m\ddot{z}_2 + k\,z_1 + 3k\,z_2 = 0$$

e le matrici: $[M] = \begin{bmatrix} m & -m \\ m & m \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} k & -3k \\ k & 3k \end{bmatrix}$

Sommando e sottraendo membro a membro le equazioni del moto, si ottiene:

$$m\ddot{z}_1 + k\,z_1 = 0$$
$$m\ddot{z}_2 + 3k\,z_2 = 0$$

con $[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix}$

Le matrici massa e rigidezza sono ora diagonali e le due equazioni sono disaccoppiate.

Inoltre si vede subito che le due pulsazioni naturali sono: $\omega_1{}^2 = \dfrac{k}{m}; \qquad \omega_2{}^2 = \dfrac{3k}{m}.$

Le coordinate z_1 e z_2 si dicono *coordinate principali.*

VIBRAZIONI LIBERE

For the free vibration analysis of the system shown in Fig. 5.3(a), we set $F_1(t) = F_2(t) = 0$. Further, if damping is disregarded, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, and the equations of motion (5.1) and (5.2) reduce to

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = 0 \tag{5.4}$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0 \tag{5.5}$$

We are interested in knowing whether m_1 and m_2 can oscillate harmonically with the same frequency and phase angle but with different amplitudes. Assuming that it is possible to have harmonic motion of m_1 and m_2 at the same frequency ω and the same phase angle ϕ, we take the solutions of Eqs. (5.4) and (5.5) as

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(\omega t + \phi) \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \tag{5.6}$$

where X_1 and X_2 are constants that denote the maximum amplitudes of $x_1(t)$ and $x_2(t)$, and ϕ is the phase angle. Substituting Eqs. (5.6) into Eqs. (5.4) and (5.5), we obtain

$$\begin{aligned} [\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} X_1 - k_2X_2]\cos(\omega t + \phi) &= 0 \\ [-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} X_2]\cos(\omega t + \phi) &= 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Since Eqs. (5.7) must be satisfied for all values of the time t, the terms between brackets must be zero. This yields

$$\begin{aligned} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} X_1 - k_2X_2 &= 0 \\ -k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} X_2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

which represent two simultaneous homogenous algebraic equations in the unknowns X_1 and X_2. It can be seen that Eqs. (5.8) are satisfied by the trivial solution $X_1 = X_2 = 0$, which implies that there is no vibration. For a nontrivial solution of X_1 and X_2, the determinant of the coefficients of X_1 and X_2 must be zero:

$$\det \begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} = 0$$

or

$$(m_1 m_2)\omega^4 - \{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1\}\omega^2 + \{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2\} = 0 \tag{5.9}$$

Equation (5.9) is called the *frequency* or *characteristic equation* because solution of this equation yields the frequencies or the characteristic values of the system. The roots of Eq. (5.9) are given by

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2}\right\} \mp \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2}\right\}^2 - 4\left\{\frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1 m_2}\right\}\right]^{1/2} \tag{5.10}$$

This shows that it is possible for the system to have a nontrivial harmonic solution of the form of Eqs. (5.6) when ω is equal to ω_1 and ω_2 given by Eq. (5.10). We call ω_1 and ω_2 the *natural frequencies* of the system.

The values of X_1 and X_2 remain to be determined. These values depend on the natural frequencies ω_1 and ω_2. We shall denote the values of X_1 and X_2 corresponding to ω_1 as $X_1^{(1)}$ and $X_2^{(1)}$ and those corresponding to ω_2 as $X_1^{(2)}$ and $X_2^{(2)}$. Further, since the Eqs. (5.8) are homogenous, only the ratios $r_1 = \{X_2^{(1)}/X_1^{(1)}\}$ and $r_2 = \{X_2^{(2)}/X_1^{(2)}\}$ can be found. For $\omega^2 = \omega_1^2$ and $\omega^2 = \omega_2^2$, Eqs. (5.8) give

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2 + k_3)}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2 + k_3)} \tag{5.11}$$

Notice that the two ratios given for each r_i ($i = 1, 2$) in Eqs. (5.11) are identical. The normal modes of vibration corresponding to ω_1^2 and ω_2^2 can be expressed, respectively, as

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{Bmatrix}$$

and

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

The vectors $\vec{X}^{(1)}$ and $\vec{X}^{(2)}$, which denote the normal modes of vibration, are known as the *modal vectors* of the system.

The free vibration solution or the motion in time can be expressed as

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix} = \text{first mode}$$

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix} = \text{second mode} \qquad (5.13)$$

where the constants $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, ϕ_1, and ϕ_2 are determined by the initial conditions.

Initial Conditions. Since each of the two equations of motion, Eqs. (5.1) and (5.2), involves second-order time derivatives, we need to specify two initial conditions for each mass. As stated in Section 5.1, the system can be made to vibrate in its ith normal mode ($i = 1, 2$) by subjecting it to the specific initial conditions

$$x_1(t = 0) = X_1^{(i)} = \text{some constant}, \qquad \dot{x}_1(t = 0) = 0,$$
$$x_2(t = 0) = r_1 X_1^{(i)}, \qquad \dot{x}_2(t = 0) = 0 \qquad (5.14)$$

However, for any other general initial conditions, both modes will be excited. The resulting motion, which is given by the general solution of Eqs. (5.4) and (5.5), can be obtained by superposing the two normal modes, Eqs. (5.13):

$$\vec{x}(t) = \vec{x}^{(1)}(t) + \vec{x}^{(2)}(t)$$

that is,

$$x_1(t) = x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t) = X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = x_2^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t)$$
$$= r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \qquad (5.15)$$

Thus if the initial conditions are given by

$$x_1(t = 0) = x_1(0), \qquad \dot{x}_1(t = 0) = \dot{x}_1(0),$$
$$x_2(t = 0) = x_2(0), \qquad \dot{x}_2(t = 0) = \dot{x}_2(0) \qquad (5.16)$$

the constants $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, ϕ_1, and ϕ_2 can be found by solving the following equations (obtained by substituting Eqs. 5.16 into Eqs. 5.15):

$$x_1(0) = X_1^{(1)} \cos \phi_1 + X_1^{(2)} \cos \phi_2$$
$$\dot{x}_1(0) = -\omega_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2$$
$$x_2(0) = r_1 X_1^{(1)} \cos \phi_1 + r_2 X_1^{(2)} \cos \phi_2$$
$$\dot{x}_2(0) = -\omega_1 r_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 r_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2 \qquad (5.17)$$

Equations (5.17) can be regarded as four algebraic equations in the unknowns $X_1^{(1)}\cos\phi_1$, $X_1^{(2)}\cos\phi_2$, $X_1^{(1)}\sin\phi_1$, and $X_1^{(2)}\sin\phi_2$. The solution of Eqs. (5.17) can be expressed as

$$X_1^{(1)}\cos\phi_1 = \left\{\frac{r_2x_1(0) - x_2(0)}{r_2 - r_1}\right\}, \qquad X_1^{(2)}\cos\phi_2 = \left\{\frac{-r_1x_1(0) + x_2(0)}{r_2 - r_1}\right\}$$

$$X_1^{(1)}\sin\phi_1 = \left\{\frac{-r_2\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1(r_2 - r_1)}\right\}, \qquad X_1^{(2)}\sin\phi_2 = \left\{\frac{r_1\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2(r_2 - r_1)}\right\}$$

from which we obtain the desired solution

$$\begin{aligned}
X_1^{(1)} &= [\{X_1^{(1)}\cos\phi_1\}^2 + \{X_1^{(1)}\sin\phi_1\}^2]^{1/2} \\
&= \frac{1}{(r_2 - r_1)}\left[\{r_2x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2}\right]^{1/2} \\
X_1^{(2)} &= [\{X_1^{(2)}\cos\phi_2\}^2 + \{X_1^{(2)}\sin\phi_2\}^2]^{1/2} \\
&= \frac{1}{(r_2 - r_1)}\left[\{-r_1x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2}\right]^{1/2} \\
\phi_1 &= \tan^{-1}\left\{\frac{X_1^{(1)}\sin\phi_1}{X_1^{(1)}\cos\phi_1}\right\} = \tan^{-1}\left\{\frac{-r_2\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1[r_2x_1(0) - x_2(0)]}\right\} \\
\phi_2 &= \tan^{-1}\left\{\frac{X_1^{(2)}\sin\phi_2}{X_1^{(2)}\cos\phi_2}\right\} = \tan^{-1}\left\{\frac{r_1\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2[-r_1x_1(0) + x_2(0)]}\right\} \qquad (5.18)
\end{aligned}$$

VIBRAZIONI FORZATE

Le equazioni del moto per un generico sistema a due gdl soggetto a forzanti esterne possono essere scritte come:

$$\begin{Bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \qquad (5.19)$$

Se si considerano forzanti esterne armoniche di pulsazione ω:

$$F_j(t) = F_{j0}\, e^{\,i\omega t} \qquad j = 1, 2 \qquad (5.20)$$

le soluzioni a regime sono del tipo: $\quad x_j(t) = X_j\, e^{\,i\omega t} \quad$ (5.21)

dove X_1 e X_2 sono, in generale, quantità complesse che dipendono da ω e dai parametri del sistema.

Sostituendo le (5.20) e (5.21) nelle (5.19) si ha:

$$\begin{Bmatrix} (-\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11}) & (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) \\ (-\omega^2 m_{21} + i\omega c_{21} + k_{21}) & (-\omega^2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22}) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \qquad (5.22)$$

Se si definisce la quantità:

$$Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs} \qquad (5.23)$$

le (5.22) possono scriversi: $\quad [Z(i\omega)]\{X\} = \{F_0\} \quad$ (5.24)

dove: $\quad [Z(i\omega)] = \begin{Bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{21}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{Bmatrix}; \qquad \{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}; \qquad \{F_0\} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}.$

La matrice $[Z(i\omega)]$ è detta ***matrice impedenza***.

La (5.24) può essere risolta ottenendo: $\quad \{X\} = [Z(i\omega)]^{-1}\{F_0\} \quad$ (5.25)

dove l'inversa della matrice impedenza è data da:

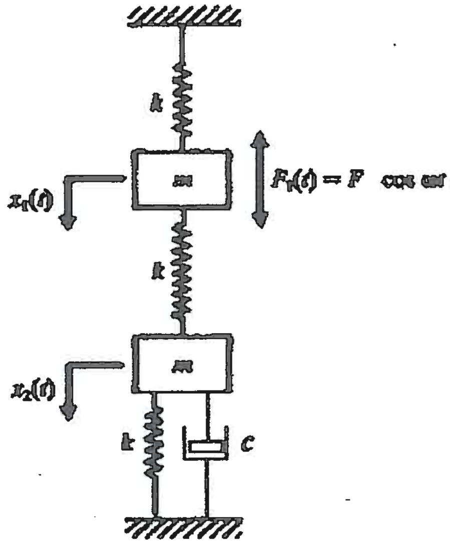
$$[Z(i\omega)]^{-1} = \frac{1}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}(i\omega)Z_{21}(i\omega)} \begin{Bmatrix} Z_{22}(i\omega) & -Z_{12}(i\omega) \\ -Z_{21}(i\omega) & Z_{11}(i\omega) \end{Bmatrix} \qquad (5.26).$$

Le equazioni (5.25) e (5.26) conducono alla soluzione:

$$\begin{aligned} X_1(i\omega) &= \frac{Z_{22}(i\omega)F_{10} - Z_{12}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}(i\omega)Z_{21}(i\omega)} \\ X_2(i\omega) &= \frac{-Z_{21}(i\omega)F_{10} + Z_{11}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}(i\omega)Z_{21}(i\omega)} \end{aligned} \qquad (5.27)$$

che, sostituita nella (5.21), fornisce $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

Esempio



Trovare la risposta a regime del sistema di figura quando la massa m_1 è eccitata dalla forzante armonica $F_1(t) = F \cos\omega t$.

Le equazioni del moto sono:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Assunte come soluzioni le: $y_j(t) = Y_j\, e^{i\omega t}$ $j = 1, 2$ con $x_j(t) = \Re[y(t)] = \Re\left[Y_j\, e^{i\omega t}\right]$

la (5.23) fornisce:

$Z_{11}(i\omega) = -m\omega^2 + 2k$; $Z_{22}(i\omega) = -m\omega^2 + ic\omega + 2k$ $Z_{12}(\omega) = Z_{21}(\omega) = -k$

di conseguenza si ha:

$$Y_1(i\omega) = \frac{\left(-m\omega^2 + ic\omega + 2k\right)F}{\left(-m\omega^2 + ic\omega + 2k\right)\left(-m\omega^2 + 2k\right) - k^2}$$

$$Y_2(i\omega) = \frac{kF}{\left(-m\omega^2 + ic\omega + 2k\right)\left(-m\omega^2 + 2k\right) - k^2}$$

Ponendo: $\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$; $a = \dfrac{c}{2m\omega_0} = \dfrac{c}{2\sqrt{km}}$

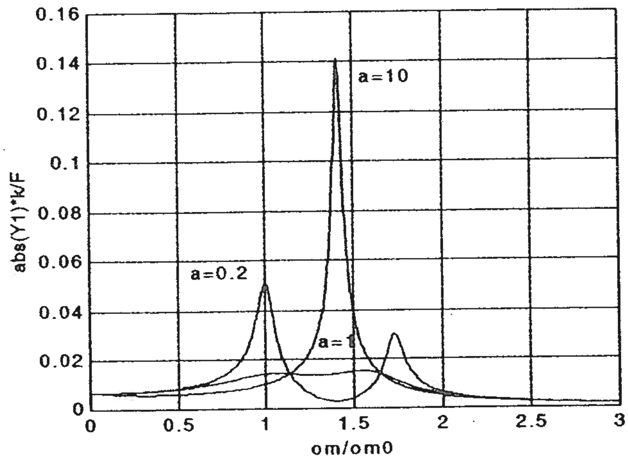
e sostituendole nelle relazioni che forniscono Y_1 e Y_2, si ha:

$$Y_1(i\omega) = \frac{\left(-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2} + i2a\dfrac{\omega}{\omega_0} + 2\right)\dfrac{F}{k}}{\left(-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2} + i2a\dfrac{\omega}{\omega_0} + 2\right)\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right) - 1} \quad \text{e} \quad Y_2(i\omega) = \frac{\dfrac{F}{k}}{\left(-\dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2} + i2a\dfrac{\omega}{\omega_0} + 2\right)\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right) - 1}.$$

Graficando la prima in funzione del rapporto adimensionale ω/ω_0. e per diversi valori del parametro a si vede che quando $a >> 1$ il sistema si comporta come un sistema ad un gdl con un'unica risonanza che vale:

$\omega_n = \sqrt{2k/m}$ e risulta quindi: $\omega_n/\omega_0 = \sqrt{2}$.

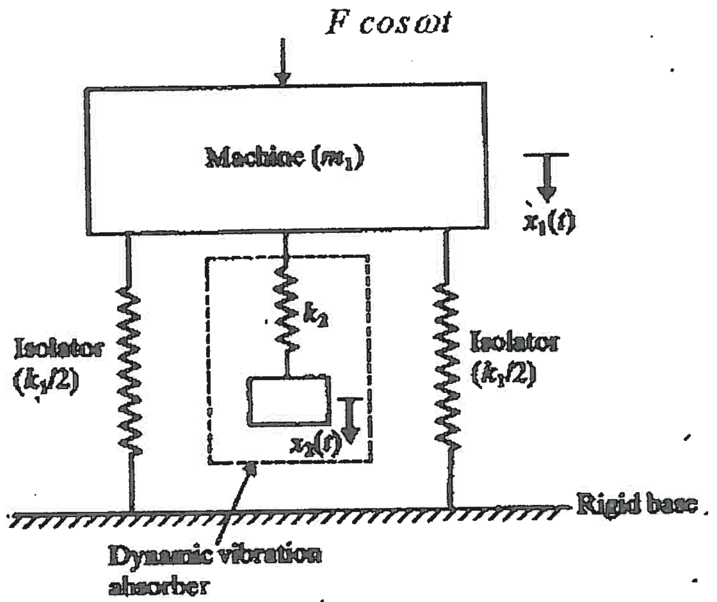
In altre parole è come se la massa inferiore fosse solidale al telaio.



SMORZATORE DINAMICO

Si consideri il caso di un macchinario sottoposto ad una eccitazione con pulsazione molto prossima ad una pulsazione naturale del macchinario stesso. In tale caso, le vibrazioni eccessive del sistema possono essere ridotte impiegando un cosiddetto *smorzatore dinamico di vibrazioni* (o assorbitore dinamico), costituito da una massa collegata al macchinario da una molla. Lo smorzatore dinamico deve essere progettato in modo che le frequenze naturali del sistema siano il più possibile lontane dalla frequenza dell'eccitazione.

Per studiare il problema si schematizzi la macchina come un sistema ad un grado di libertà (v. figura) sottoposto ad una forzante armonica $F(t) = F\cos\omega t$, in cui $\omega = \sqrt{k_1/m_1}$, ossia il sistema è in risonanza.



A questo punto si supponga di collegare al macchinario una seconda massa m_2 mediante una molla di costante elastica k_2.

Le equazioni del moto sono:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F\cos\omega t$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0$$

o anche:

$$\begin{Bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Assunte come soluzioni le: $x_j(t) = X_j \cos\omega t$ $\quad j = 1, 2$

la (5.23) fornisce:

$$Z_{11}(\omega) = -m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) \qquad Z_{22}(\omega) = -m_2\omega^2 + k_2 \qquad Z_{12}(\omega) = Z_{21}(\omega) = -k_2$$

di conseguenza si ha:

$$X_1(\omega) = \frac{\left(-m_2\omega^2 + k_2\right)F}{\left(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2\right)\left(-m_2\omega^2 + k_2\right) - k_2^2}$$
$$X_2(\omega) = \frac{k_2 F}{\left(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2\right)\left(-m_2\omega^2 + k_2\right) - k_2^2}$$

Se è soddisfatta la condizione: $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}}$

si ha per $x_1(t)$ una ***antirisonanza***, ossia la massa m_1 non vibra.

Posto: $\quad \omega_{10} = \sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}} \qquad \omega_{20} = \sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}}$

le espressioni di $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$ risultano:

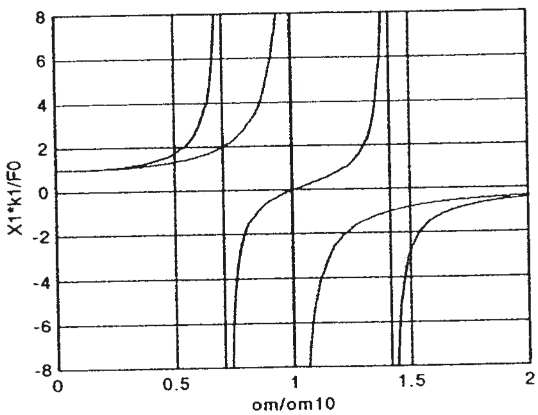
$$X_1(\omega) = \frac{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_{20}^2}\right)\dfrac{F}{k_1}}{\left(1 + \dfrac{k_2}{k_1} - \dfrac{\omega^2}{\omega_{10}^2}\right)\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_{10}^2}\right) - \dfrac{k_2}{k_1}} \qquad \text{e} \qquad X_2(\omega) = \frac{\dfrac{F}{k_1}}{\left(1 + \dfrac{k_2}{k_1} - \dfrac{\omega^2}{\omega_{10}^2}\right)\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_{10}^2}\right) - \dfrac{k_2}{k_1}}$$

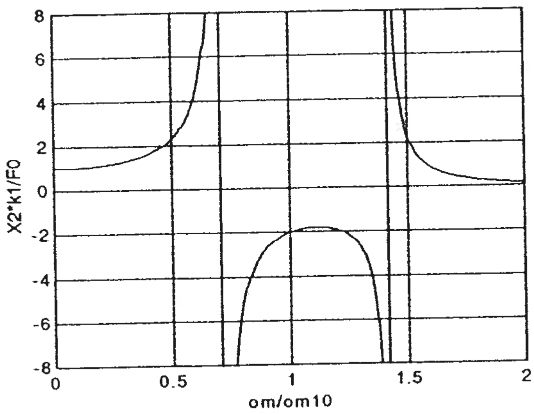
che possono essere diagrammate in funzione del rapporto adimensionale ω/ω_{10}.

Si nota che quando $\omega_{10} = \omega_{20} = \omega$, risulta: $\quad X_1(\omega) = 0 \qquad X_2(\omega) = -\dfrac{F}{k_2}$.

In altre parole, la massa m_1 non oscilla poiché la massa m_2 trasmette alla massa m_1 una forza uguale ed opposta all'eccitazione; infatti:

$$k_2(x_2 - x_1) = -m_2\ddot{x}_2 = m_2\omega^2 X_2 \cos\omega t = -\frac{m_2}{k_2}F\omega^2\cos\omega t = -\frac{\omega^2}{\omega_{20}^2}F\cos\omega t = -F\cos\omega t$$





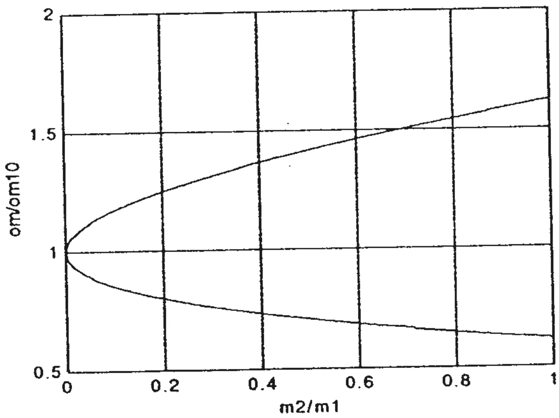
L'aggiunta di una massa introduce però nel sistema una seconda risonanza. Il sistema ha quindi due risonanze che si possono trovare ponendo a zero il denominatore di $X_1(\omega)$ (o di $X_2(\omega)$):

$$\left(1+\frac{k_2}{k_1}-\frac{\omega^2}{\omega_{10}^{\ 2}}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{10}^{\ 2}}\right)-\frac{k_2}{k_1}=0 \qquad \text{ossia:} \qquad \frac{\omega^4}{\omega_{10}^{\ 4}}-\frac{\omega^2}{\omega_{10}^{\ 2}}\left(2+\frac{k_2}{k_1}\right)+1=0$$

Osservando che quando $\omega_{10}=\omega_{20}=\omega$, si ha: $\quad \dfrac{k_2}{k_1}=\dfrac{m_2}{m_1}$

le due pulsazioni sono tanto più lontane da $\omega_{10}=\sqrt{k_1/m_1}$ quanto più grande è il rapporto m_2/m_1 :

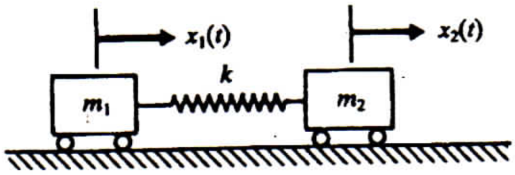
$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_{10}^{\ 2}}\right)_{1,2}=\frac{\left(2+\frac{m_2}{m_1}\right)\pm\sqrt{\left(2+\frac{m_2}{m_1}\right)^2-4}}{2}$$



Moti Rigidi

Si consideri il sistema a due 2gdl rappresentato in figura (potrebbe essere, ad esempio, il modello di due vagoni ferroviari). Le equazioni del moto libero sono le seguenti:

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$



Assunto il moto nella forma: $x_j(t) = X_j \cos(\omega t + \phi_j)$ $j = 1, 2$

risulta:

$$(-m_1\omega^2 + k)X_1 - kX_2 = 0$$
$$-kX_1 + (-m_2\omega^2 + k)X_2 = 0$$

e l'equazione caratteristica diviene: $\omega^2[m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)] = 0$

da cui si ottengono le pulsazioni naturali: $\omega_1 = 0$ $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$

Una delle due pulsazioni è nulla: il sistema non vibra a tale pulsazione. In altre parole il sistema si muove come un unico corpo rigido senza moto relativo tra le due masse; si dice pertanto che il sistema ha un ***moto rigido***.

Come ovvio, alla pulsazione ω_1 corrisponde il modo di vibrare: $r_1 = \left\{\dfrac{X_2}{X_1}\right\}_{\omega=\omega_1} = 1$

mentre alla pulsazione ω_2 corrisponde il modo di vibrare: $r_2 = \left\{\dfrac{X_2}{X_1}\right\}_{\omega=\omega_2} = -\dfrac{m_1}{m_2}$

che è una quantità negativa; pertanto il secondo modo ha un nodo.

Bibliografia

* E. Funaioli, A. Maggiore, U. Meneghetti, Lezioni di Meccanica applicata alle macchine, Vol. II, ed. Pàtron, Bologna.
* S.S. Rao, Mechanical vibrations, Third edition, Addison Wesley Pub. Company, 1995.