SISTEMI A N gdl

 13

SISTEMI NON SMORZATI

Le equazioni del moto si scrivono applicando il principio di D'Alembert, il principio dei lavori virtuali o le equazioni di Lagrange.

Per le vibrazioni libere di un sistema non smorzato le equazioni del moto sono del tipo:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{0\} \tag{6.1}$$

dove [M] è la matrice massa e [K] è la matrice rigidezza:

$$[M]=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \qquad [K]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

e $\{x\}$ è il vettore delle coordinate.

La matrice massa [M] e la matrice rigidezza [K] possono essere, in generale, complete e non simmetriche. Se però ad ogni massa (generalizzata) è associata una coordinata (generalizzata), allora la matrice massa risulta diagonale. Analogamente, se ogni molla (generalizzata) ha ogni estremo mobile collegato ad una massa (cioè posto in corrispondenza dell'origine di una coordinata), allora la matrice rigidezza risulta simmetrica.

Nel seguito, supporremo sempre che la matrice massa e la matrice rigidezza siano simmetriche. Ciò è lecito, in quanto scegliendo opportunamente le coordinate è sempre possibile ricondursi a tale situazione.

Gli elementi m_{ij} e k_{ij} che compongono le matrici massa e rigidezza hanno il significato che ora chiariamo. Scriviamo per esteso l'equazione del moto della massa i-esima. Si ha:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\ddot{x}_j+\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\,x_j=0 \qquad (i=1,\,2,\,\dots,\,n) \tag{6.2}$$

Come si può vedere dalla (6.2), gli elementi m_{ij} della matrice massa rappresentano l'azione inerziale agente sulla massa i-esima in corrispondenza di una accelerazione unitaria del punto in cui è concentrata la massa j-esima (essendo nulle le accelerazioni dei restanti n-l punti). Gli elementi m_{ij} sono detti *coefficienti di influenza inerziali.* Gli elementi k_{ij} della matrice rigidezza rappresentano l'azione elastica agente sulla massa i-esima in corrispondenza di uno spostamento unitario del punto in cui è concentrata la massa j-esima (essendo nulli gli spostamenti dei restanti n-1 punti). Essi sono noti anche come *coefficienti di influenza per la rigidezza.*

Al fine di determinare i modi propri di vibrare del sistema imponiamo che sia:

$$x_j(t)=X_j\,e^{i\omega t} \qquad j=1,\,2,\,\dots,\,n$$

Si ottiene:

$$-\omega^2[M]\{X\}+[K]\{X\}=\{0\} \tag{6.3}$$

dove $\{X\}=[X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n]^T$ è il vettore delle ampiezze di spostamento delle masse.

Si perviene ad un sistema di equazioni analogo a quello già visto nel caso dei si-stemi a due gradi di libertà:

$$[A-\mu I]\{X\}=\{0\} \tag{6.4}$$

per il quale deve essere: $$\det[A-\mu I]=0 \tag{6.5}$$

avendo posto [A] = $[M]^{-1}$ [K] (*matrice dinamica*).

Le radici μ_i dell'equazione caratteristica (6.5) sono gli *autovalori* e le *pulsazioni naturali* del sistema sono definite dalla relazione:

$$\omega_i^2=\mu_i$$

Sostituendo μ_i nelle equazioni (6.4) si ottengono gli *autovettori,* che forniscono i *modi di vibrare* corrispondenti alle pulsazioni trovate ω_{ni}.

$$\{X\}_1=\begin{Bmatrix}X_{11}\\X_{21}\\\dots\\X_{n1}\end{Bmatrix};\quad \{X\}_2=\begin{Bmatrix}X_{12}\\X_{22}\\\dots\\X_{n2}\end{Bmatrix};\quad \dots \quad \{X\}_n=\begin{Bmatrix}X_{1n}\\X_{2n}\\\dots\\X_{nn}\end{Bmatrix};$$

Si ricordi che, essendo la (6.4) un sistema di n equazioni omogenee, gli elementi degli autovettori risultano definiti a meno di una costante arbitraria.

Talvolta può essere utile formulare le equazioni del moto delle masse del sistema in modo diverso dalle (6.1). A ciò si perviene utilizzando i *coefficienti di influenza per la cedevolezza* (flessibilità) δ_{ij}. Essi vengono definiti come lo spostamento del punto i-esimo provocato da una forza unitaria applicata nel punto j-esimo. Nel caso delle oscillazioni libere di un sistema ad n gradi di libertà devono considerarsi come forza applicata solo quelle inerziali e, pertanto, lo spostamento della massa i-esima vale:

$$x_i=-\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\,\ddot{x}_j \qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{6.6}$$

La (6.6) può essere scritta nella forma matriciale:

$$\{x\}=-[D][M]\{\ddot{x}\} \tag{6.7}$$

La matrice: $[D]=\begin{bmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\dots&\delta_{1n}\\\delta_{21}&\delta_{22}&\dots&\delta_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\\delta_{n1}&\delta_{n2}&\dots&\delta_{nn}\end{bmatrix}$ è detta *matrice cedevolezza* (flessibilità).

Confrontando la (6.7) con la (6.1) scritta nel modo seguente: $\{x\}=-[K]^{-1}[M]\{\ddot{x}\}$
si riconosce che: $[D]=[K]^{-1}$

ossia la matrice flessibilità è l'inversa della matrice rigidezza.

Se si sostituiscono le $x_j(t) = X_j\, e^{i\omega t}$ nelle (6.7), si ottiene:

$$\{X\} = \omega^2 [D][M]\{X\} \qquad (6.8)$$

dalla quale si perviene al sistema di equazioni:

$$[\bar{A} - \bar{\mu} I]\{X\} = \{0\} \qquad (6.9)$$

con $\quad [\bar{A}] = [D][M] \quad$ e $\quad \bar{\mu}_i = 1/\omega_i^2$.

Come si vede, la (6.9) è analoga alla (6.4).
Inoltre, essendo:

$$[A][\bar{A}] = [M]^{-1}[K][K]^{-1}[M] = [I]$$

si ricava: $\quad [\bar{A}] = [A]^{-1}$

In conclusione, sia partendo dalle (6.1), sia impiegando le (6.7), il problema della determinazione delle frequenza proprie e dei modi di vibrare viene ricondotto a quello della ricerca degli autovalori di una matrice, per il quale sono disponibili algoritmi assai efficienti.

Proprietà di ortogonalità

Gli autovettori godono di una proprietà, che prende il nome di ortogonalità, rispetto alle matrici massa e rigidezza. Consideriamo le equazioni del moto scritte per il modo i-esimo:

$$[K]\{X\}_i = \mu_i [M]\{X\}_i \qquad (6.10)$$

Premoltiplicando per il trasposto dell'autovettore j-esimo, si ottiene:

$$\{X\}_j^T [K]\{X\}_i = \mu_i \{X\}_j^T [M]\{X\}_i \; . \qquad (6.11)$$

Ripetiamo ora l'operazione scambiando i modi i-esimo e j-esimo:

$$\{X\}_i^T [K]\{X\}_j = \mu_j \{X\}_i^T [M]\{X\}_j \; . \qquad (6.12)$$

Poiché le matrici [K] e [M] sono simmetriche, valgono le:

$$\{X\}_j^T [K]\{X\}_i = \{X\}_i^T [K]\{X\}_j \qquad \{X\}_j^T [M]\{X\}_i = \{X\}_i^T [M]\{X\}_j$$

tenendo conto delle quali, se sottraiamo le (6.12) dalla (6.11) otteniamo:

$$0 = (\mu_i - \mu_j)\{X\}_j^T [M]\{X\}_i \qquad (6.13)$$

ed essendo $\mu_i \neq \mu_j$, risulta: $\quad 0 = \{X\}_j^T [M]\{X\}_i \qquad (6.14)$

ed anche: $\quad 0 = \{X\}_j^T [K]\{X\}_i \qquad (6.15)$

Le (6.14) e (6.15) definiscono il carattere di ortogonalità dei modi propri di vibrare. Tale proprietà è di fondamentale importanza per procedere al disaccoppiamento delle equazioni del moto del sistema.

Se poniamo i = j, la (6.13) risulta soddisfatta per ogni valore finito del termine $\{X\}_i^T[M]\{X\}_i$

Chiamiamo *massa modale* e *rigidezza modale* rispettivamente i prodotti:

$$M_i = \{X\}_i^T[M]\{X\}_i \qquad\qquad K_i = \{X\}_i^T[K]\{X\}_i$$

Le relazioni sopra scritte consentono di adottare come criterio di normalizzazione degli autovettori la condizione:

$$M_i = \{X\}_i^T[M]\{X\}_i = 1$$

Dalla (6.10) risulta: $$K_i = \{X\}_j^T[K]\{X\}_i = \mu_i\{X\}_j^T[M]\{X\}_i = \mu_i = \omega_i^2$$

La matrice modale

Se raccogliamo gli *n* autovettori in una matrice, otteniamo la cosiddetta *matrice modale:*

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix}$$

Per l'ortogonalità dei modi propri, il seguente prodotto è una matrice diagonale:

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{bmatrix} = [M]_P \tag{6.16}$$

Gli elementi della diagonale principale della (6.16) sono le masse modali. La matrice (6.16) prende il nome di *matrice massa principale.* Analogamente si ha:

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_n \end{bmatrix} = [K]_P \tag{6.17}$$

In questo caso gli elementi della diagonale principale sono le rigidezze modali e la matrice prende il nome di *matrice rigidezza principale.*

Se si adotta la normalizzazione rispetto alla matrice massa, le matrici massa principale e rigidezza principale diventano, rispettivamente:

$$[M]_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad [K]_P = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

La matrice massa principale e la matrice rigidezza principale permettono di disaccoppiare le equazioni del moto.

Disaccoppiamento delle equazioni del moto

Scriviamo le equazioni del moto (6.1) premoltiplicando i termini per $[\Phi]^T$ e postmoltiplicandoli per $[\Phi][\Phi]^{-1} = [I]$

Si ottiene: $$[\Phi]^T[M][\Phi][\Phi]^{-1}\{\ddot{x}\} + [\Phi]^T[K][\Phi][\Phi]^{-1}\{x\} = \{0\} \tag{6.18}$$

ossia: $$[M]_P\{\ddot{q}\} + [K]_P\{q\} = \{0\} \tag{6.19}$$

avendo posto: $$\{q\} = [\Phi]^{-1}\{x\} \tag{6.20}$$

Le (6.20) definiscono le *coordinate principali*. Poiché $[M]_P$ e $[K]_P$ sono matrici diagonali, le equazioni del moto (6.19), scritte in termini di coordinate principali, risultano disaccoppiate.
Risolto il sistema (6.19) in termini di coordinate principali, si passa da queste a quelle di origine con la trasformazione:

$$\{x\} = [\Phi]\{q\}$$

Partendo dagli autovettori precedentemente calcolati, si ottengono gli autovettori normalizzati rispetto alle masse moltiplicando gli elementi di ogni autovettore per uno scalare p_i dato da:

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{\{X\}_i^T[M]\{X\}_i}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Moti di corpo rigido

Consideriamo un sistema a n g.d.l. che ammetta più moti rigidi, siano per esempio i primi due: $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Risulterà: $$[K]\{X\}_1 = 0 \quad [K]\{X\}_2 = 0$$
$$[K]\{X\}_i = \omega_i^2[M]\{X\}_i \qquad (i = 3., 4, \dots, n)$$

Dalle prime due si ricava: $\{X\}_i^T[K]\{X\}_1 = \{X\}_i^T[K]\{X\}_2 = 0$ che è la relazione di ortogonalità.

Risulta altresì: $\{X\}_1^T[K]\{X\}_2 = 0$ ma $\{X\}_1^T[M]\{X\}_2 \neq 0$
perché non vale la relazione da cui si ricava l'ortogonalità.

Pertanto, la presenza di moti di corpo rigido può dare luogo alla presenza nella matrice massa principale di termini al di fuori della diagonale.

Vibrazioni libere
Il più generale moto libero è la sovrapposizione di tutti i modi propri. Ogni modo vi partecipa in una certa porzione, dipendente dalle condizioni iniziali. Se le condizioni iniziali eccitano un solo modo, alle vibrazioni libere partecipa solo quel modo.

SISTEMI CON SMORZAMENTO

Se nel sistema c'è smorzamento, le equazioni del moto diventano:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}$$

La matrice [C] è di regola simmetrica. Introducendo le coordinate principali, $\{q\}=[\Phi]^{-1}\{x\}$ si ottiene:

$$[M]_P\{\ddot{q}\}+[\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{q}\}+[K]_P\{q\}=\{0\}$$

In generale, la matrice $[\Phi]^T[C][\Phi]$ è simmetrica ma non diagonale, per cui le equazioni del moto non sono più disaccoppiate.

Se però lo smorzamento è proporzionale, cioè si può scrivere: $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$

con costanti (scalari), allora valgono le seguenti:

$$[\Phi]^T[C][\Phi]=\alpha[\Phi]^T[M][\Phi]+\beta[\Phi]^T[K][\Phi]=\alpha[M]_P+\beta[K]_P=[C]_P$$

dove la matrice $[C]_P$ è una matrice diagonale detta matrice smorzamento principale:

$$[C]_P=\begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_n \end{bmatrix}$$

e $\qquad C_i=\{X\}_i^T[C]\{X\}_i$ sono gli *smorzamenti modali.*

Le equazioni del moto risultano così disaccoppiate.

Si può definire inoltre lo smorzamento (modale) critico: $C_{CR_i}=2m_i\omega_i=2\sqrt{k_i m_i}$

e, quindi, il fattore di smorzamento modale: $\zeta_i=\dfrac{C_i}{C_{CR_i}}=\dfrac{C_i}{2m_i\omega_i}=\dfrac{\alpha}{2\omega_i}+\dfrac{\beta\omega_i}{2}$

VIBRAZIONI FORZATE

Le equazioni del moto di un sistema ad n g.d.l., con smorzamento viscoso, si possono scrivere nel modo seguente:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f(t)\} \tag{6.21}$$

dove [M] e [K] sono le matrici massa e rigidezza, [C] è la matrice smorzamento, {x} è il vettore degli spostamenti ed $\{f(t)\}$ è il vettore delle forze applicate:

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{Bmatrix} \tag{6.22}$$

Introducendo nelle (6.21) le coordinate principali, definite dalle (6.20), si ottiene:

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}\}+[C][\Phi]\{\dot{q}\}+[K][\Phi]\{q\}=\{f(t)\} \tag{6.23}$$

Premoltiplicando ambo i membri della (6.23) per $[\Phi]^T$, si ha:

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{q}\}+[\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{q}\}+[\Phi]^T[K][\Phi]\{q\}=[\Phi]^T\{f(t)\} \tag{6.24}$$

Facendo l'ipotesi di smorzamento proporzionale, le (6.24) divengono:

$$[M]_P\{\ddot{q}\}+[C]_P\{\dot{q}\}+[K]_P\{q\}=[\Phi]^T\{f(t)\} \tag{6.25}$$

Le (6.25) costituiscono un sistema di equazioni disaccoppiate.

Le componenti del vettore $[\Phi]^T\{f(t)\}$ sono dette *forze generalizzate*:

$$[\Phi]^T\{f(t)\}=\begin{bmatrix} X_{11}f_1(t)+X_{21}f_2(t)+\ldots+X_{n1}f_n(t) \\ X_{12}f_1(t)+X_{22}f_2(t)+\ldots+X_{n2}f_n(t) \\ X_{1n}f_1(t)+X_{2n}f_2(t)+\ldots+X_{nn}f_n(t) \end{bmatrix} \tag{6.26}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} M_1\ddot{q}_1+C_1\dot{q}_1+K_1q_1 &= X_{11}f_1(t)+X_{21}f_2(t)+\ldots+X_{n1}f_n(t) \\ M_2\ddot{q}_2+C_2\dot{q}_2+K_2q_2 &= X_{12}f_1(t)+X_{22}f_2(t)+\ldots+X_{n2}f_n(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_n\ddot{q}_n+C_n\dot{q}_n+K_nq_n &= X_{1n}f_1(t)+X_{2n}f_2(t)+\ldots+X_{nn}f_n(t) \end{aligned} \tag{6.27}$$

Le equazioni differenziali del sistema (6.27) vengono risolte singolarmente con i procedimenti visti nel caso dei sistemi ad un singolo grado di libertà. In tal modo si ottengono le componenti del vettore delle coordinate principali e, tramite le (6.20), quelle del vettore delle coordinate effettive.

Metodo modale

Il sistema sia non smorzato o con smorzamento proporzionale ed abbia N g.d.l.
Troviamo i primi n autovalori ed autovettori (con $n<<N$).
Introduciamo le coordinate principali $q_1, q_2, \ldots, q_n$, con:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{N1} & X_{N2} & \ldots & X_{Nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_n \end{Bmatrix} = [\overline{\Phi}]\{q\}$$

Ad esempio, se N=10 e n=3, sarà:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{10} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{10,1} & X_{10,2} & X_{10,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

Introduciamo nelle equazioni del moto $[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f(t)\}$ premoltiplicando per $[\overline{\Phi}]^T$:

$$[\overline{\Phi}]^T[M][\overline{\Phi}]\{\ddot{q}\}+[\overline{\Phi}]^T[C][\overline{\Phi}]\{\dot{q}\}+[\overline{\Phi}]^T[K][\overline{\Phi}]\{q\}=[\overline{\Phi}]^T\{f(t)\}$$

Si ottengono così n ($n<<N$) equazioni disaccoppiate e quindi semplici da integrare. Una volta trovate le coordinate generalizzate q, le coordinate effettive si trovano con la $\{x\}=[\overline{\Phi}]\{q\}$.

Il metodo è valido se la pulsazione Ω della forzante è inferiore alla pulsazione ω_n del modo n-esimo.

Metodo pseudo–modale

Se lo smorzamento è piccolo ma non proporzionale (come capita abbastanza spesso), si può usare un metodo “pseudo modale”. Si trovano prima gli N autovalori ed autovettori trascurando lo smorzamento, e se ne utilizzano – come prima – i primi n, con $n<<N$:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{N1} & X_{N2} & \ldots & X_{Nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_n \end{Bmatrix} = [\overline{\Phi}]\{q\}$$

Questa volta si ottiene un sistema di n equazioni accoppiate per i termini in $\dot{q}$, ma integrabili abbastanza facilmente perché $n<<N$:

$$[\overline{\Phi}]^T[M][\overline{\Phi}]\{\ddot{q}\}+[\overline{\Phi}]^T[C][\overline{\Phi}]\{\dot{q}\}+[\overline{\Phi}]^T[K][\overline{\Phi}]\{q\}=[\overline{\Phi}]^T\{f(t)\}$$

La soluzione è valida solo se la pulsazione Ω della forzante è inferiore alla pulsazione ω_n del modo n-esimo.

Metodo di Rayleigh-Ritz

È una generalizzazione, dovuta a Ritz, del metodo di Rayleigh già visto. È impiegato per ridurre il numero di gdl e valutare così le prime (più basse) frequenze proprie di un sistema. Si sceglie pertanto una "ragionevole deformata", della forma:

$$\{x\} = [\gamma]\{p\}$$

dove $\{x\}$ è il vettore delle N coordinate "fisiche" e $\{p\}$ è un vettore di dimensione $n \ll N$. La deformata prescelta deve soddisfare le condizioni al contorno.

L'energia cinetica e quella potenziale elastica hanno la forma.

$$E = \frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T[M]\{\dot{x}\} = \frac{1}{2}\{\dot{p}\}^T[\gamma]^T[M][\gamma]\{\dot{p}\}$$

$$U = \frac{1}{2}\{x\}^T[K]\{x\} = \frac{1}{2}\{p\}^T[\gamma]^T[K][\gamma]\{p\}$$

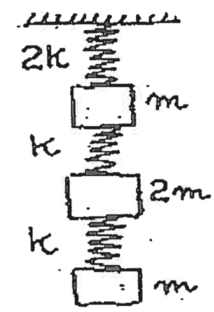
e pertanto le equazioni di Lagrange assumono la forma:

$$[\gamma]^T[M][\gamma]\{\ddot{p}\} + [\gamma]^T[K][\gamma]\{p\} = 0$$

che è un sistema di n equazioni, mentre quello di partenza era un sistema di $N \gg n$ equazioni. Si possono così trovare autovalori e autovettori. Dalle $\{p\}$ trovate è poi immediato passare alle $\{x\}$, che interessano.–

<u>Esempio 1</u> (Metodo di Rayleigh)

Consideriamo il sistema di figura. Le soluzioni esatte sono:



$$\omega_1 = 0{,}4450\sqrt{\frac{K}{m}}\ ; \qquad \{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2{,}8020 \\ 3{,}4940 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 1{,}2470\sqrt{\frac{K}{m}}\ ; \qquad \{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}4451 \\ -1{,}6040 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_3 = 1{,}8019\sqrt{\frac{K}{m}}\ ; \qquad \{X\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}1470 \\ 0{,}1099 \end{Bmatrix}$$

Cerchiamo la prima frequenza propria applicando il metodo di Rayleigh. Assumiamo come ragionevole deformata $\{\gamma\}$ la deformata statica sotto l'azione del peso (che è una forza di massa): $\{\gamma\} = [2 \quad 5 \quad 6]^T$, cioè, normalizzando: $\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 3 \end{Bmatrix}$. Si ottiene:

$$\{\gamma\}^T [M] \{\gamma\} = [1 \quad 2,5 \quad 3] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 3 \end{Bmatrix} = 22,5\ m$$

$$\{\gamma\}^T [k] \{\gamma\} = [1 \quad 2,5 \quad 3] \begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 3 \end{Bmatrix} = 4,5\ k$$

La prima frequenza propria, valutata assumendo per il primo modo la forma $\begin{Bmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 3 \end{Bmatrix}$, è pertanto: $\omega_1 = 0,4472 \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Esempio 2 (Metodo di Ritz)

Consideriamo lo stesso sistema dell'esempio precedente e valutiamo le prime due frequenze proprie, assumendo lo stesso $\{\gamma\}_1$ di prima e – arbitrariamente – $\{\gamma\}_2 = [1 \quad 2 \quad -1]^T$, cioè in definitiva:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2,5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{vale a dire} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2,5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

Si ottiene allora:

$$[\gamma]^T [M] [\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 2,5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2,5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,5 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} m$$

$$[\gamma]^T [k] [\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 2,5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2,5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} k$$

e le equazioni del moto sono:

$$m \begin{bmatrix} 22,5 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \{\ddot{p}\} + k \begin{bmatrix} 4,5 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \{p\} = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$161\ m^2 \omega^4 - 283\ k m \omega^2 + 50\ k^2 = 0$$

Si ottengono per le pulsazioni proprie i valori:

$$\omega_1 = 0,4464\sqrt{k/m} \; ; \quad \omega_2 = 1,2484\sqrt{k/m}$$

e i modi corrispondenti sono:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,0405 \end{Bmatrix} \; ; \quad \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2,9189 \end{Bmatrix}$$

da cui si ricava:

$$\{X\}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 3 \end{Bmatrix} - 0,0405 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,521 \\ 3,169 \end{Bmatrix}$$

$$\{X\}_2 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 3 \end{Bmatrix} - 2,9189 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,739 \\ -3,084 \end{Bmatrix}$$

Osserviamo che se si fosse assunto:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2,5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

si sarebbe ottenuto:

$$[\gamma]^T[M][\gamma] = \begin{bmatrix} 22,5 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix} m \; ; [\gamma]^T[k][\gamma] = \begin{bmatrix} 4,5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} k$$

da cui:

$$\omega_1 = 0,4461\sqrt{\frac{k}{m}} \; ; \quad \omega_2 = 1,2488\sqrt{\frac{k}{m}}$$

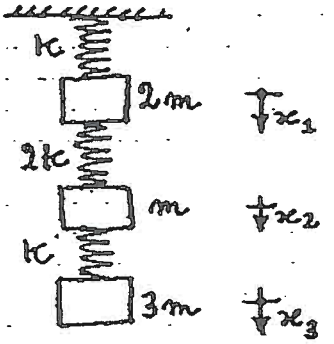
$$\{p\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,1066 \end{Bmatrix} \; ; \quad \{p\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1,6242 \end{Bmatrix}$$

$$\{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,5596 \\ 3,2386 \end{Bmatrix} \; ; \quad \{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,199 \\ -2,204 \end{Bmatrix}$$

Modifiche strutturali

Il metodo di Rayleigh può venire impiegato per valutare l'effetto di "piccole" modifiche strutturali. Vediamo un esempio.

Consideriamo il sistema di figura. Gli autovalori e gli autovettori corrispondenti sono riportati a fianco.



$$\omega_1=0{,}3243\sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\quad \{X\}_1=\begin{Bmatrix}1\\1{,}395\\2{,}038\end{Bmatrix}$$

$$\omega_2=0{,}8992\sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\quad \{X\}_2=\begin{Bmatrix}1\\0{,}6914\\-0{,}6849\end{Bmatrix}$$

$$\omega_3=1{,}980\sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\quad \{X\}_3=\begin{Bmatrix}1\\-2{,}420\\0{,}2249\end{Bmatrix}$$

Le masse e le rigidezze modali valgono:

$$\{X\}_1^T[M]\{X\}_1=16{,}41m\ ;\ \{X\}_2^T[M]\{X\}_2=3{,}183m\ ;\ \{X\}_3^T[M]\{X\}_3=8{,}008m$$

$$\{X\}_1^T[k]\{X\}_1=1{,}725k\ ;\ \{X\}_2^T[k]\{X\}_2=2{,}574k\ ;\ \{X\}_3^T[k]\{X\}_3=31{,}39k$$

Usiamo il metodo di Rayleigh per trovare il nuovo valore ω_3^* della terza pulsazione naturale se la rigidezza della seconda molla viene portata da 2k a 2,5k.

L'energia elastica del sistema non modificato vale:

$$U=\frac{1}{2}\cdot 31{,}39k\cdot p^2$$

La variazione conseguente al nuovo valore della rigidezza è:

$$\Delta U=\frac{1}{2}\cdot(1+2{,}420)^2\cdot(0{,}5\ )p^2=\frac{1}{2}\cdot 5{,}848\cdot p^2$$

Il rapporto fra ω_3^* e ω_3 è:

$$\frac{\omega_3^*}{\omega_3}=\sqrt{\frac{U+\Delta U}{U}}=\sqrt{\frac{31{,}39+5{,}848}{31{,}39}}\simeq 1{,}089$$

per cui si ottiene:

$$\omega_3^*=2{,}157\sqrt{k/m}$$

Il valore esatto è $\omega_3^*=2{,}1549\sqrt{k/m}$ (errore: +0,1%).

Consideriamo ora lo stesso sistema ma supponiamo di dover calcolare la terza frequenza naturale qualora la seconda massa passi al valore 1.3m.

This calculation can be done easily because the exact mode corresponding to ω_3 is known from exercise 1. The additional kinetic energy due to the mass addition $0.3m$ is

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}0.3m(-2.42)^2 p^{o2} = 0.8785mp^{o2}$$

Then using the results of exercise 7, the kinetic energy of the modified system is

$$\begin{aligned} T^* &= 4.004mp^{o2} + 0.8785mp^{o2} \\ &= 4.882mp^{o2} \end{aligned}$$

Since the strain energy is constant

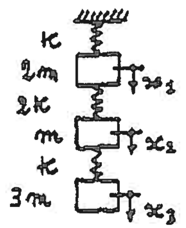
$$\omega_3^* = \omega_3 \sqrt{\frac{T}{T^*}} = 1.793\sqrt{\frac{k}{m}}$$

The exact values ω_3^{**} and ϕ_3^{**} of the modified system can be shown to be:

$$\omega_3^{**} = 1.807\sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad \phi_3^{**} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.766 \\ 0.2007 \end{bmatrix}$$

so it can be seen that this technique gives convenient estimates of the effect on frequency of small changes of a structure.

ESEMPIO – Sistema a 3 gradi di libertà



$$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 3m \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/3m \end{bmatrix}$$

$$[M]^{-1}[K] = \begin{bmatrix} 3k/2m & -k/m & 0 \\ -2k/m & 3k/m & -k/m \\ 0 & -k/3m & k/3m \end{bmatrix}$$

<u>Autovalori e autovettori</u>

$$\omega_1 = 0{,}324305\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \{\Phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}3753 \\ 0{,}5235 \\ 0{,}7649 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.3948 \\ 2.0378 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 0{,}899227\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \{\Phi\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}6914 \\ -0{,}4849 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_3 = 1{,}97978\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \{\Phi\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.4196 \\ 0{,}2249 \end{Bmatrix}$$

" MATRICE MODALE NORMALIZZATA "

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.3948 & 0.6914 & -2.4196 \\ 2.0378 & -0.4849 & 0.2249 \end{bmatrix}$$

" INVERSA DELLA MATRICE MODALE "

$$[\Phi]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.3948 & 0.6914 & -2.4196 \\ 2.0378 & -0.4849 & 0.2249 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.121926 & 0.0850325 & 0.372691 \\ 0.628262 & 0.217181 & -0.456987 \\ 0.249811 & -0.302214 & 0.0842658 \end{bmatrix}$$

" COORDINATE FISICHE "

$$\{x\} = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

" COORDINATE PRINCIPALI "

$$\{q\} = \begin{bmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = [\Phi]^{-1}\{x\}: \quad \begin{bmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.121926 & 0.0850325 & 0.372691 \\ 0.628262 & 0.217181 & -0.456987 \\ 0.249811 & -0.302214 & 0.0842658 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = \begin{bmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.121926\ x1 + 0.0850325\ x2 + 0.372691\ x3 \\ 0.628262\ x1 + 0.217181\ x2 - 0.456987\ x3 \\ 0.249811\ x1 - 0.302214\ x2 + 0.0842658\ x3 \end{bmatrix}$$

" COORDINATE FISICHE "

$$\{x\} = [\Phi]\{q\}: \quad \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.3948 & 0.6914 & -2.4196 \\ 2.0378 & -0.4849 & 0.2249 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q1 + q2 + q3 \\ 1.3948\, q1 + 0.6914\, q2 - 2.4196\, q3 \\ 2.0378\, q1 - 0.4849\, q2 + 0.2249\, q3 \end{bmatrix}$$

" Se è q1 ≠ 0, q2 = q3 = 0: "

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q1 \\ 1.3948\, q1 \\ 2.0378\, q1 \end{bmatrix}$$

MOTO LIBERO GENERALE

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega_1 t+\varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t+\varphi_2) + X_3 \cos(\omega_3 t+\varphi_3)$$

$$x_2(t) = 1.3948\, X_1 \cos(\omega_1 t+\varphi_1) + 0.6914\, X_2 \cos(\omega_2 t+\varphi_2) - 2.4196\, X_3 \cos(\omega_3 t+\varphi_3)$$

$$x_3(t) = 2.0378\, X_1 \cos(\omega_1 t+\varphi_1) - 0.4849\, X_2 \cos(\omega_2 t+\varphi_2) + 0.2249 X_3 \cos(\omega_3 t+\varphi_3)$$

con X_1, X_2, X_3; φ_1, φ_2, φ_3 costanti arbitrarie che soddisfano le condizioni iniziali.

Masse modali e Rigidezze modali

$$\Phi_1^T M \Phi_1 = 16{,}403\, m \qquad \Phi_1^T K \Phi_1 = 1{,}7252\, k$$

$$\Phi_2^T M \Phi_2 = 3{,}1834\, m \qquad \Phi_2^T K \Phi_2 = 2{,}5741\, k$$

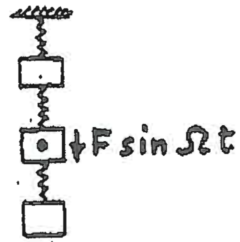
$$\Phi_3^T M \Phi_3 = 8{,}0062\, m \qquad \Phi_3^T K \Phi_3 = 31{,}381\, k$$

$$\sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{1{,}7252 k}{16{,}403 m}} = 0{,}3243 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\sqrt{\frac{K_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{2{,}5741 k}{3{,}1834 m}} = 0{,}8992 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\sqrt{\frac{K_3}{m_3}} = \sqrt{\frac{31{,}381 k}{8{,}0062 m}} = 1{,}9798 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Vibrazioni forzate



$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \sin \Omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi]^T \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} 1{,}3948 \\ 0{,}6914 \\ -2{,}4196 \end{Bmatrix} F \sin \Omega t$$

$$16{,}403 m \cdot \ddot{q}_1 + 1{,}725\, k \cdot q_1 = 1{,}3948\, F \sin \Omega t$$

$$3{,}1834 m \cdot \ddot{q}_2 + 2{,}5741 k \cdot q_2 = 0{,}6914\, F \sin \Omega t$$

$$8{,}0062 m \cdot \ddot{q}_3 + 31{,}381 k \cdot q_3 = -2{,}4196\, F \sin \Omega t$$

$$q_1(t) = Q_1 \sin \Omega t\,; \qquad Q_1 = \frac{1{,}395\,F}{1{,}725k - 16{,}41\,m\Omega^2} = \frac{0{,}8086\,F/k}{1-(\Omega/\omega_1)^2}$$

$$q_2(t) = Q_2 \sin \Omega t\,; \qquad Q_2 = \frac{0{,}6914\,F}{2{,}574k - 3{,}1834\,m\Omega^2} = \frac{0{,}2686\,F/k}{1-(\Omega/\omega_2)^2}$$

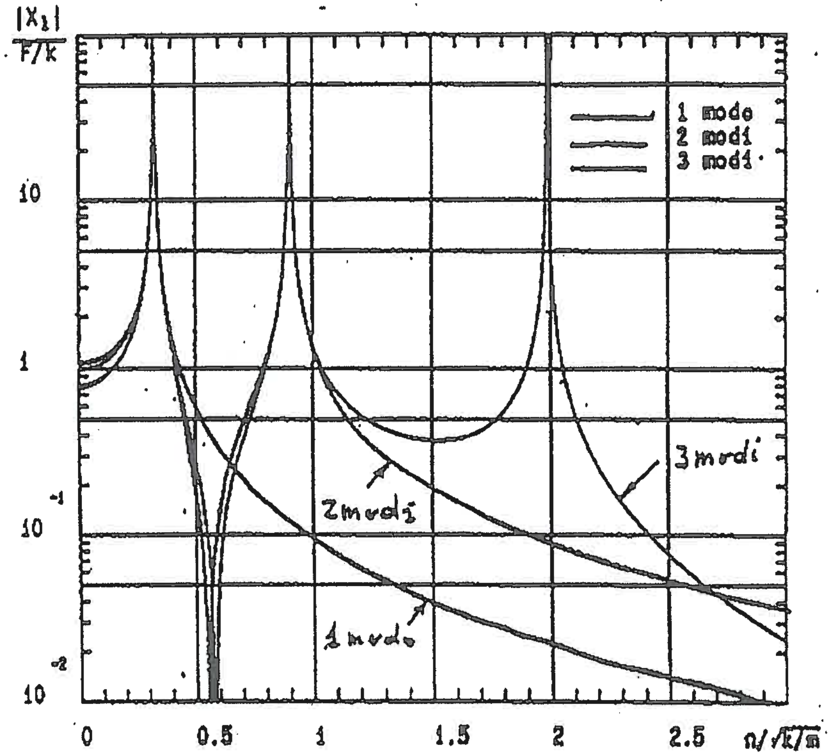
$$q_3(t) = Q_3 \sin \Omega t\,; \qquad Q_3 = -\frac{2{,}4186\,F}{11{,}381k - 8{,}006\,m\Omega^2} = -\frac{0{,}07709\,F/k}{1-(\Omega/\omega_3)^2}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1{,}3946 & 0{,}6914 & -2{,}4196 \\ 2{,}0378 & -0{,}4849 & 0{,}2249 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

$$x_1 = X_1 \sin \Omega t\,; \qquad X_1 = \frac{0{,}8086\,F/k}{1-(\Omega/\omega_1)^2} + \frac{0{,}2686\,F/k}{1-(\Omega/\omega_2)^2} - \frac{0{,}07709\,F/k}{1-(\Omega/\omega_3)^2}$$

$$x_2 = X_2 \sin \Omega t\,; \qquad X_2 = \frac{1{,}1277\,F/k}{1-(\Omega/\omega_1)^2} + \frac{0{,}1857\,F/k}{1-(\Omega/\omega_2)^2} + \frac{0{,}1865\,F/k}{1-(\Omega/\omega_3)^2}$$

$$x_3 = X_3 \sin \Omega t\,; \qquad X_3 = \frac{1{,}6478\,F/k}{1-(\Omega/\omega_1)^2} - \frac{0{,}1302\,F/k}{1-(\Omega/\omega_2)^2} - \frac{0{,}01734\,F/k}{1-(\Omega/\omega_3)^2}$$



F R F

Bibliografia

* E. Funaioli, A. Maggiore, U. Meneghetti, Lezioni di Meccanica applicata alle macchine, Vol. II, ed. Pàtron, Bologna.
* S.S. Rao, Mechanical vibrations, Third edition, Addison Wesley Pub. Company, 1995.
* D.J. Inman, Engineering Vibration, Prentice Hall, 1994.
* M. Lalanne, P. Berthier, J. Der Hagopian, Mechanical Vibrations for Engineers, John Wiley and Sons, 1983.

APPENDICE A1 – Problema agli autovalori simmetrico.

Consideriamo le equazioni del moto di un sistema a N gdl:

$$\mathbf{M}\,\ddot{x}+\mathbf{K}\,x=0$$

La matrice massa $\mathbf{M}$ sia diagonale e la matrice rigidezza $\mathbf{K}$ sia simmetrica. In generale, la matrice dinamica $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{K}$ non è simmetrica. La determinazione degli autovalori è più rapida ed accurata se si ha a che fare con una matrice simmetrica. Conviene procedere nel modo seguente.

- Si definisce la matrice

$$\mathbf{M}^{1/2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{M}^{1/2} = \mathbf{M}$$

- Si pone

$$x = \mathbf{M}^{-1/2}\cdot q$$

- Si sostituisce nell'equazione del moto e si premoltiplica per $\mathbf{M}^{-1/2}$:

$$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1/2}\,\ddot{q}+\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\,\mathbf{M}^{-1/2}\,q=0$$

- Poiché $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{I}$, l'ultima espressione scritta diventa:

$$\mathbf{I}\,\ddot{q}+\tilde{\mathbf{K}}\,q=0$$

- La matrice

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\,\mathbf{M}^{-1/2}$$

  è simmetrica.

- Posto $q = \mathbf{q}_o\cdot e^{i\omega t}$, sostituendo nella penultima equazione e semplificando per $e^{i\omega t}$, si ottiene:

$$\tilde{\mathbf{K}}\,\mathbf{q}_o = \omega^2\mathbf{q}_o \quad \rightarrow \quad \left[\tilde{\mathbf{K}} - \lambda\,\mathbf{I}\right]\mathbf{q}_o = 0$$

- Il problema è ricondotto alla determinazione degli autovalori e autovettori della matrice simmetrica $\tilde{\mathbf{K}}$.

APPENDICE A2 – Eccitazione in un nodo

Supponiamo che il secondo modo di vibrare di un sistema a 4 gdl abbia un nodo in corrispondenza della coordinata 2.

$$[\Phi\,] = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & 0 & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{bmatrix} \qquad \{f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi]^T\{f(t)\} = \begin{bmatrix} 0 + X_{21}f_2(t) + 0 + 0 \\ 0+0+0+0 \\ 0 + X_{23}f_2(t) + 0 + 0 \\ 0 + X_{24}f_2(t) + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{21}f_2(t) \\ 0 \\ X_{23}f_2(t) \\ X_{24}f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \{Qe^{i\omega t}\} = \begin{Bmatrix} Q_1 e^{i\omega_1 t} \\ 0 \\ Q_3 e^{i\omega_2 t} \\ Q_4 e^{i\omega_3 t} \end{Bmatrix}$$

$$\{x\} = [\Phi]\{q\} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & 0 & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ 0 \\ q_3(t) \\ q_4(t) \end{Bmatrix}$$

$$\{x\} = [\Phi]\{q\} = \begin{bmatrix} X_{11}Q_1e^{i\omega_1 t} + 0 + X_{13}Q_3e^{i\omega_3 t} + X_{14}Q_4e^{i\omega_4 t} \\ X_{21}Q_1e^{i\omega_1 t} + 0 + X_{23}Q_3e^{i\omega_3 t} + X_{24}Q_4e^{i\omega_4 t} \\ X_{31}Q_1e^{i\omega_1 t} + 0 + X_{33}Q_3e^{i\omega_3 t} + X_{34}Q_4e^{i\omega_4 t} \\ X_{41}Q_1e^{i\omega_1 t} + 0 + X_{43}Q_3e^{i\omega_3 t} + X_{44}Q_4e^{i\omega_4 t} \end{bmatrix}$$

Conclusione: la risposta non contiene la componente relativa al secondo modo.

APPENDICE A3 – Quoziente di Rayleigh

Energia cinetica $\quad T = \frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T [M]\{\dot{x}\}$

Energia potenziale $\quad V = \frac{1}{2}\{x\}^T [K]\{x\}$

Assunta una soluzione del tipo: $\quad \{x(t)\} = \{X\} e^{i\omega t} \quad$ si ha:

$$T = -\frac{1}{2}\omega^2 \{X\}^T [M]\{X\} e^{i2\omega t} \qquad V = \frac{1}{2}\{X\}^T [M]\{X\} e^{i2\omega t}$$

Se il sistema è conservativo vale il principio di conservazione dell'energia meccanica ($T_{MAX} = V_{MAX}$), per cui si ottiene:

$$T_{MAX} = \frac{1}{2}\omega^2 \{X\}^T [M]\{X\} = V_{MAX} = \frac{1}{2}\{X\}^T [K]\{X\}$$

da cui si può ricavare il seguente rapporto:

$$\omega^2 = \frac{\{X\}^T [K]\{X\}}{\{X\}^T [M]\{X\}} = R(\{X\})$$

noto come ***quoziente di Rayleigh***.

Calcolo della prima frequenza propria

Si può dimostrare che il quoziente di Rayleigh $R(\{X\})$ ha un valore stazionario per $\{X\}$ arbitrario appartenente ad un intorno di $\{X\}_j$.

In altre parole, se: $\quad R(\{X\}_j) = \omega_j^2$, $\quad$ allora risulta: $\quad R(\{X\}) = \omega_j^2 [1 + O(\varepsilon^2)]$

con $\{X\}$ arbitrario in un intorno di $\{X\}_j$.

Questa proprietà è molto utile in quanto permette di usare il quoziente di Rayleigh per determinare un valore approssimato della prima frequenza naturale di un sistema. Infatti, è sufficiente assumere un ragionevole primo modo di vibrare (l'autovettore $\{X\}_1$) ed il quoziente di rayleigh fornirà una buona approssimazione del quadrato dell'autovalore ω_1.

Ovviamente la stima di ω_1 sarà tanto migliore quanto più il primo modo ipotizzato è vicino a quello vero.

Osservazione

Si noti che il quoziente di Rayleigh si ottiene anche dall'equazione del moto del sistema libero non smorzato:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

si sostituisce la soluzione ottenendo: $\quad -\omega^2 [M]\{X\} + [M]\{X\} = \{0\}$.

Ora è sufficiente pre-moltiplicare per $\{X\}^T$ per ottenere il quoziente di Rayleigh:

$$-\omega^2 \{X\}^T [M]\{X\} + \{X\}^T [M]\{X\} = \{0\} \qquad \omega^2 = \frac{\{X\}^T [K]\{X\}}{\{X\}^T [M]\{X\}}$$

APPENDICE A4 – Modifiche strutturali

Si consideri il quoziente di Rayleigh per il modo j-esimo:

$$\omega_j^2 = \frac{\{X\}_j^T [K]\{X\}_j}{\{X\}_j^T [M]\{X\}_j} = R(\{X\}_j)$$

esso non è altro che il rapporto tra la rigidezza modale k_j e la massa modale m_j.

Supponiamo ora che alcune masse e/o rigidezze del sistema subiscano una modifica. Siano $[M+\Delta M]$ e $[K+\Delta K]$ le nuove matrici massa e rigidezza. Ovviamente anche le frequenze e i modi cambiano: avremo rispettivamente $\omega_j^* = \omega_j + \Delta\omega_j$ e $\{X\}_j^* = \{X\}_j + \Delta\{X\}_j$.

La nuova pulsazione j-esima è dunque: $$\omega_j^{*2} = \frac{\{X\}_j^{*T} [K+\Delta K]\{X\}_j^*}{\{X\}_j^{*T} [M+\Delta M]\{X\}_j^*} = R(\{X\}_j^*)$$

Ora se si assume che $\{X\}_j^* = \{X\}_j$, ossia che la forma modale conseguente alle modifiche coincida con quella relativa al sistema senza modifiche, si può scrivere:

$$\omega_j^{*2} \cong \frac{\{X\}_j^T [K+\Delta K]\{X\}_j}{\{X\}_j^T [M+\Delta M]\{X\}_j} = \frac{\{X\}_j^T [K]\{X\}_j + \{X\}_j^T [\Delta K]\{X\}_j}{\{X\}_j^T [M]\{X\}_j + \{X\}_j^T [\Delta M]\{X\}_j}$$

ovvero: $$\omega_j^{*2} \cong \omega_j^2 \frac{1 + \dfrac{\{X\}_j^T [\Delta K]\{X\}_j}{\{X\}_j^T [K]\{X\}_j}}{1 + \dfrac{\{X\}_j^T [\Delta M]\{X\}_j}{\{X\}_j^T [M]\{X\}_j}}$$