15

ESERCIZI sui

SISTEMI a N gdl

Esempio: vibrazioni libere di un sistema a 3 gdl

Consideriamo il sistema rappresentato nella figura 1.

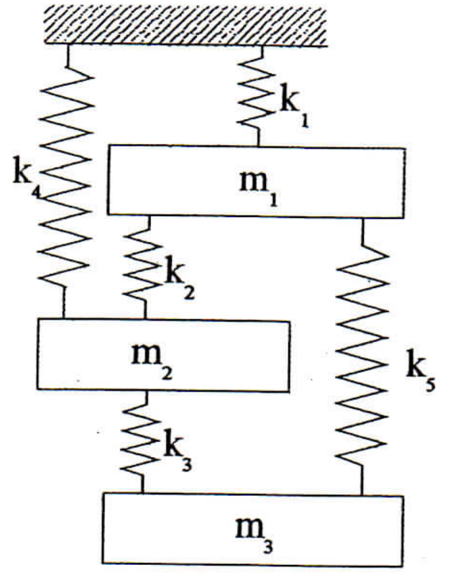


Fig. 1

I valori dei parametri concentrati presenti sono:

$m_1 = 1.5$ kg
$m_2 = 3.0$ kg
$m_3 = 2.0$ kg
$k_1 = 7500$ N/m
$k_2 = 10000$ N/m
$k_3 = 12000$ N/m
$k_4 = 5000$ N/m
$k_5 = 8000$ N/m

Misuriamo gli spostamenti $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ delle masse a partire dalle rispettive posizioni di equilibrio statico. Le matrici massa e rigidezza sono:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2+k_5 & -k_2 & -k_5 \\ -k_2 & k_2+k_3+k_4 & -k_3 \\ -k_5 & -k_3 & k_3+k_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25500 & -10000 & -8000 \\ -10000 & 27000 & -12000 \\ -8000 & -12000 & 20000 \end{bmatrix}.$$

L'inversa della matrice massa è:

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 \end{bmatrix}$$

e quindi la matrice dinamica $A=[M]^{-1}[K]$ risulta essere:

$$[A]=[M]^{-1}[K]=\begin{bmatrix} 1.7000 & -0.6667 & -0.5333 \\ -0.3333 & 0.9000 & -0.4000 \\ -0.4000 & -0.6000 & 1.0000 \end{bmatrix}\times 10^4$$

Il determinante della matrice $[A-\lambda I]$ ha l'andamento mostrato nella figura 2.

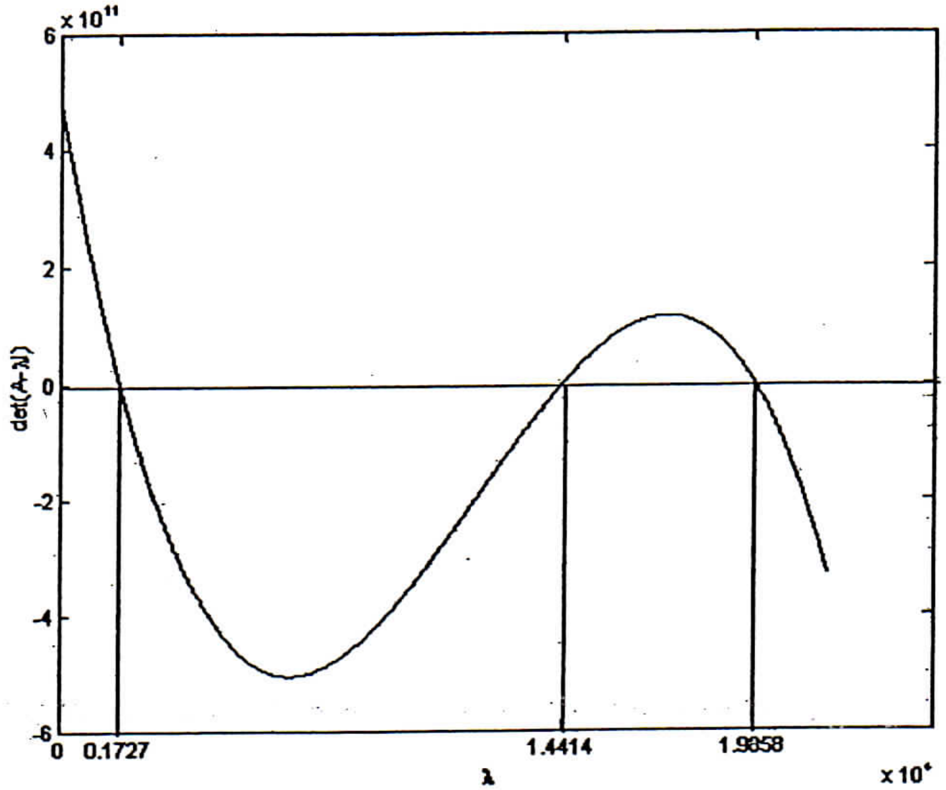


Fig. 2

e si annulla per i valori $\lambda_1=0.1727\times10^4$, $\lambda_2=1.4414\times10^4$ e $\lambda_3=1.9858\times10^4$. A tale risultato si può giungere utilizzando opportuni strumenti di calcolo numerico, come, ad esempio, quelli forniti nell'ambiente MATLAB®, dove è disponibile la funzione ***eig*** che fornisce gli autovalori e gli autovettori di una matrice. In questo caso si ottiene:

$$[D]=\begin{bmatrix} 0.1727 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9858 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4414 \end{bmatrix}\times 10^4$$ (matrice diagonale degli autovalori)

$$[\Phi]=[VN]=\begin{bmatrix} -0.3237 & -0.7489 & 0.0312 \\ -0.3901 & 0.1521 & -0.3975 \\ -0.4395 & 0.2113 & 0.5121 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]=[\{\Phi_1\}\ \{\Phi_2\}\ \{\Phi_3\}]$$

(matrice degli autovettori)

GLI AUTOVETTORI SOPRA INDICATI SONO NORMALIZZATI, COME AVVIENE DI SOLITO, IMPONENDO LA CONDIZIONE:

$$\{\Phi_j\}^T[M]\{\Phi_j\}=1 \quad , \quad \forall j=1,2,3$$

Le forme modali corrispondenti agli autovalori sono rappresentate nella figura 3.

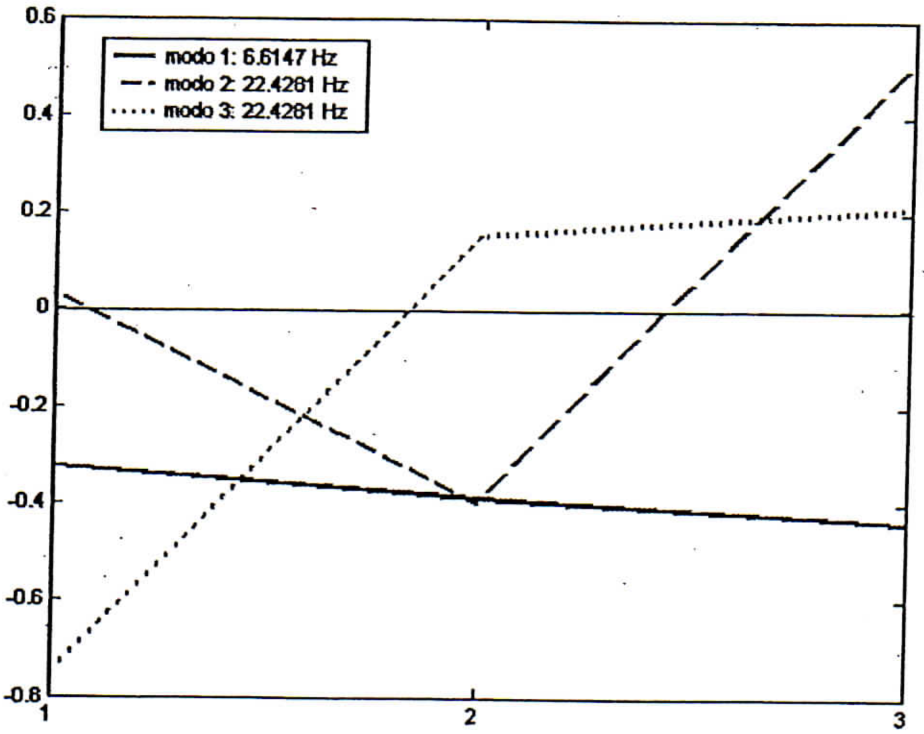


Fig. 3

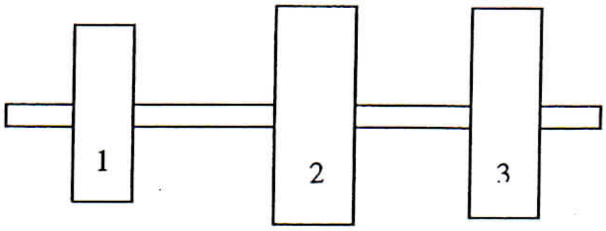
Verifichiamo, ora, l'ortogonalità degli autovettori. Eseguendo i calcoli, si ottiene:

$$\{VN_1\}^T [M]\{VN_2\} = -2.4980\times10^{-16}$$
$$\{VN_2\}^T [M]\{VN_3\} = 1.1102\times10^{-16}$$
$$\{VN_3\}^T [M]\{VN_1\} = 5.5511\times10^{-17}$$
$$\{VN_1\}^T [K]\{VN_2\} = -1.1369\times10^{-13}$$
$$\{VN_2\}^T [K]\{VN_3\} = 2.7285\times10^{-12}$$
$$\{VN_1\}^T [K]\{VN_3\} = -1.1369e\times10^{-12}$$

Ovviamente, il risultato del calcolo non è esattamente uguale a zero a causa della troncatura dei valori numerici.

Calcolo delle frequenze naturali di un rotore con tre masse volaniche.

Si consideri un rotore con tre masse volaniche, come quello rappresentato in figura.



Siano dati i momenti di inerzia polari dei tre volani e le rigidezze torsionali dei tratti di albero che uniscono i tre volani:

$J_1 = 0.015\ \text{kg m}^2$ $\qquad J_2 = 0.030\ \text{kg m}^2$ $\qquad J_3 = 0.020\ \text{kg m}^2$

$k_1 = 5000\ \text{N m /rad}$ $\qquad k_2 = 7000\ \text{N m/rad}$

Dapprima adottiamo un sistema di riferimento fisso, misurando le rotazioni delle masse a partire da una medesima direzione di riferimento. In questo caso, le matrici massa e rigidezza sono date da:

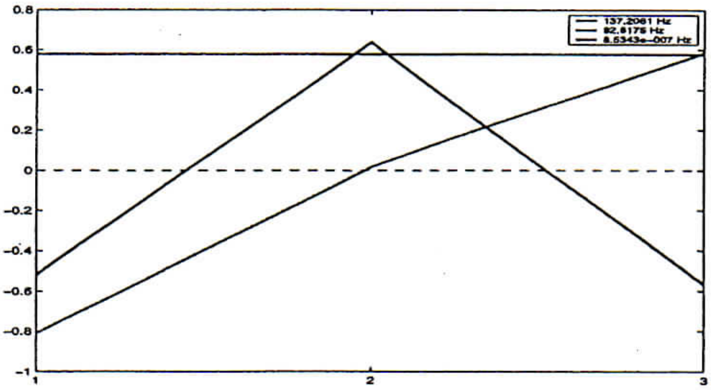
$$[M] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0150 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0300 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0200 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 & -5000 & 0 \\ -5000 & 12000 & -7000 \\ 0 & -7000 & 7000 \end{bmatrix}$$

Risolvendo il problema di autovalori ed autovettori si ottiene:

$$[D] = \begin{bmatrix} 7.4322 & 0 & 0 \\ 0 & 3.4011 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix} \times 10^5\ (\text{rad/s})^2 \quad \text{ossia} \quad [F] = \begin{bmatrix} 137.2081 & 0 & 0 \\ 0 & 92.8175 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix} (\text{Hz})$$

Le forme modali sono rappresentate nella figura seguente:



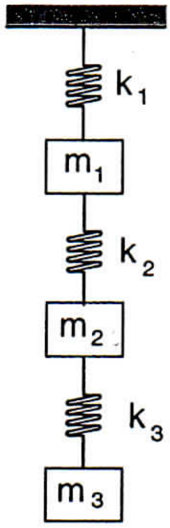
Forme modali

Esercitazione MODIFICHE STRUTTURALI

In figura è rappresentato un sistema a 3 gdl.
Noti i valori delle masse e delle rigidezze, calcolare:

1) le 3 pulsazioni naturali del sistema (in rad/s)
2) le 3 forme modali (eseguire la normalizzazione in modo che la prima componente sia unitaria)

Inoltre, introdotte nel sistema le modifiche strutturali indicate nel seguito, calcolare il nuovo valore della seconda pulsazione propria del sistema impiegando il quoziente di Rayleigh.



Dati:

$m = 1 + u / 10$ [kg]
$k = 1 - v / 10$ [N/m]

$m_1 = 2\ m$
$m_2 = 3\ m$
$m_3 = 2\ m$
$k_1 = 4\ k$
$k_2 = 3\ k$
$k_3 = 5\ k$

Modifiche strutturali:

$\Delta m_3 = 0.4\ m$
$\Delta k_2 = 0.7\ k$

I dati sono espressi in funzione delle ultime due cifre, u e v, del numero di matricola (numero di matricola = #####uv).