

24

Vibrazioni torsionali di una trasmissione nautica

In Figura 1 è mostrato lo schema di un motore marino connesso all'elica mediante un riduttore ad ingranaggi ad uno stadio. Noti i momenti di inerzia del volano, del motore, delle ruote dentate e le dimensioni degli alberi (Tabella 1), determinare:

- 1) frequenze e modi di vibrare torsionali del sistema utilizzando un modello a 3 g.d.l.
- 2) il momento di inerzia del volano per cui è possibile schematizzare il sistema a 3 g.d.l. con un sistema a 2 g.d.l. ottenendo un errore percentuale sulla frequenza naturale relativa al primo modo flessibile inferiore al 5%.
- 3) frequenze e modi di vibrare torsionali del sistema a 2 g.d.l. così ottenuto.
- 4) il valore della rotazione dell'elica e del motore per sistema a 2 g.d.l. quando al motore sia applicata la coppia:

$$M_m(t) = M_{m0} + 111 \cos(2\Omega t - 2.014) + 89 \cos(4\Omega t - 2.007)$$

Si consideri un motore di potenza 120kW alla velocità di 3400rpm. Inoltre per il calcolo delle FRF si utilizzi uno smorzamento modale $\zeta = 0.01$. Diagrammare inoltre le FRF con smorzamento modale $\zeta = 0.01$ e senza smorzamento.

NOTE:

- si trascuri l'inerzia degli alberi
- si esprimano le frequenze in Hz
- si esprimano i risultati con 5 cifre significative

Simbolo	Descrizione	Valore	Unità di misura
J_v	Momento di inerzia del volano	9000	$kg \ m^2$
J_m	Momento di inerzia del motore	1000	$kg \ m^2$
J_1	Momento di inerzia della ruota 1	250	$kg \ m^2$
J_2	Momento di inerzia della ruota 2	150	$kg \ m^2$
J_e	Momento di inerzia dell'elica	2000	$kg \ m^2$
G	Modulo di elasticità tangenziale	8.15E10	N / m^2
z_1	Numero di denti ruota 1	40	
z_2	Numero di denti ruota 2	20	

Tabella 1. Valori numerici relativi al motore marino.

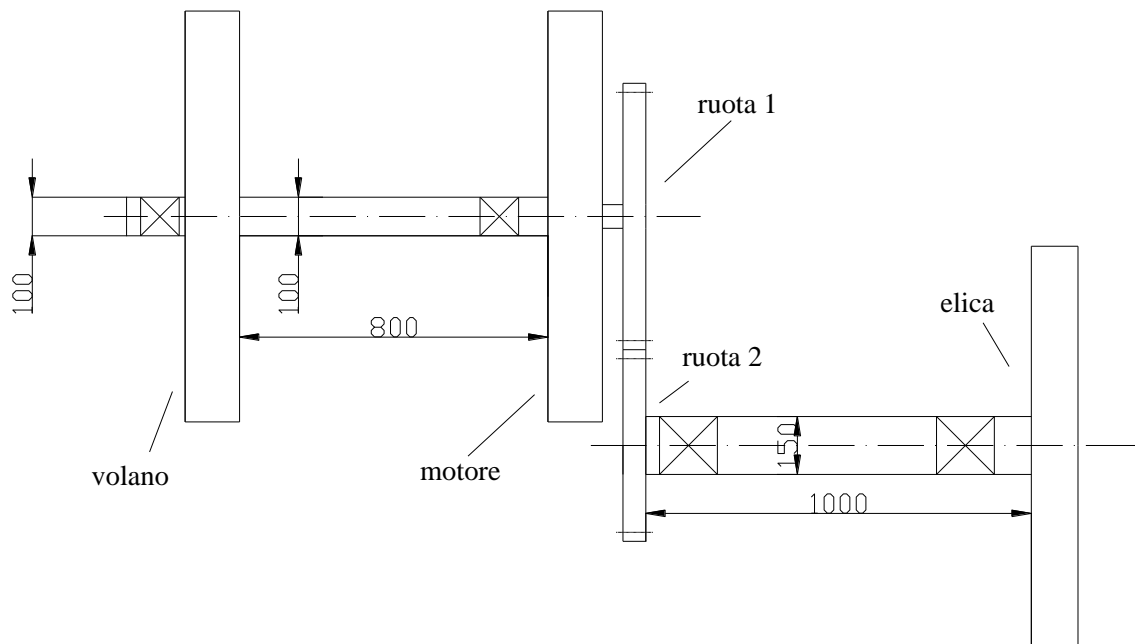


Figura 1. Schema di motore marino (le misure sono espresse in mm).

Procedimento per domanda 1)

Schematizzo il sistema come un modello a 3 g.d.l. torsionali. Siano $\theta_v, \theta_m, \theta_e$ le tre coordinate torsionali indipendenti.

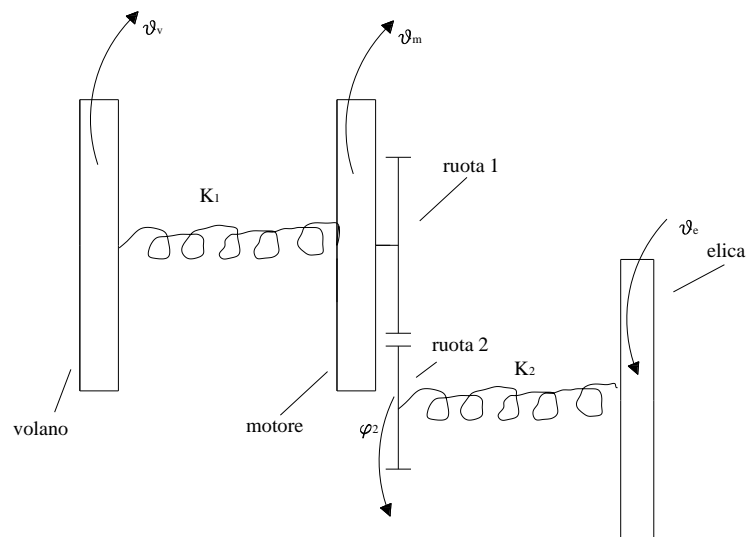


Figura 2. Modello a 3 g.d.l..

In forma matriciale il sistema di equazioni del moto diventa:

$$J \ddot{\theta} + K \theta = 0 \quad \text{con} \quad \theta = \begin{Bmatrix} \theta_v \\ \theta_m \\ \theta_e \end{Bmatrix} \quad (1)$$

e J e K matrici delle inerzie e delle rigidezze, definite in base al sistema

Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.:

$$J = \begin{pmatrix} J_v & 0 & 0 \\ 0 & J_m^* & 0 \\ 0 & 0 & J_e \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{pmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + \tau^2 K_2 & -\tau K_2 \\ 0 & -\tau K_2 & K_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Le rigidezze torsionali K_1 e K_2 possono essere stimate mediante l'espressione seguente, riferita ad un generico albero di lunghezza l , diametro d e modulo elastico tangenziale G :

$$K_T = \frac{G\pi d^4}{32l} \quad (3)$$

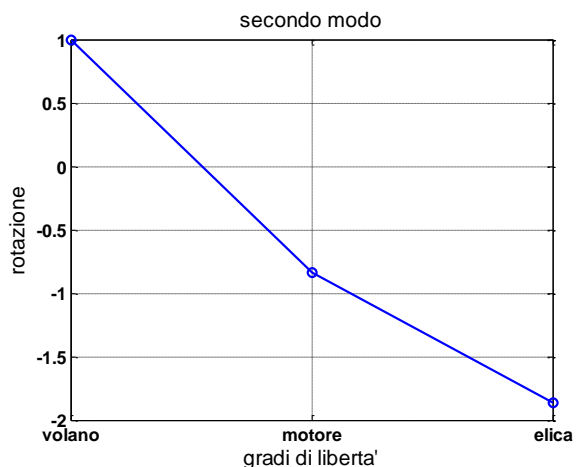
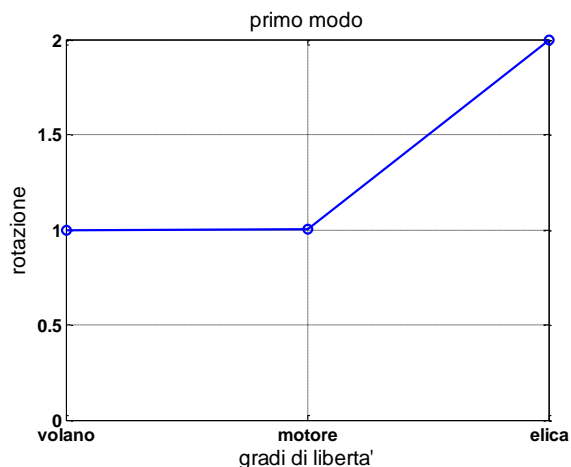
Di seguito alcuni risultati.

	Frequenza [Hz]
Primo modo	1.9096e-008
Secondo modo	2.274
Terzo modo	16.86

Tabella 2. frequenze naturali in Hz

	Primo modo	Secondo modo	Terzo modo
θ_v	1	1	1
θ_m	1	-0.8374	-100.0632
θ_e	2	-1.8627	44.0292

Tabella 3. Modi di vibrare normalizzati



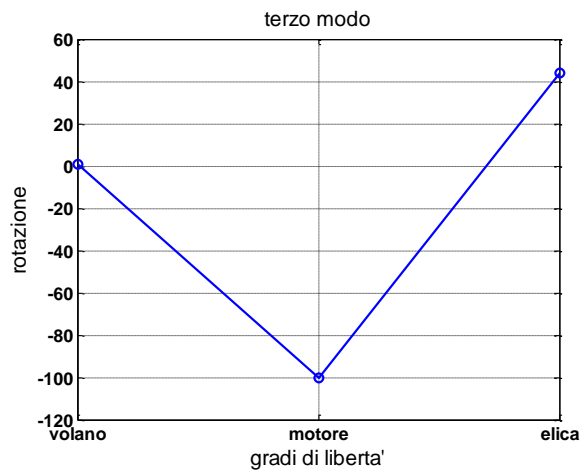


Figura 3. Rappresentazione cartesiana dei modi di vibrare

Procedimento per domanda 2)

Una volta eliminato il volano, il sistema a 3 g.d.l. si modifica in uno a 2 g.d.l. (Figura 4). Le matrici J e K sono ottenibili dalle espressioni (2) eliminando la riga e la colonna relativa alla coordinata del volano:

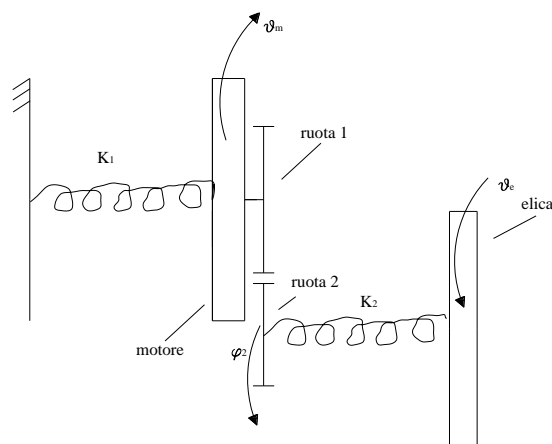


Figura 4. Modello a 2 g.d.l..

Di seguito alcuni risultati.

	Frequenza [Hz]
Primo modo	1.572
Secondo modo	16.86

Tabella 4. frequenze naturali in Hz

	Primo modo	Secondo modo
θ_m	1	1
θ_e	2.10	-0.44

Tabella 5. Modi di vibrare normalizzati

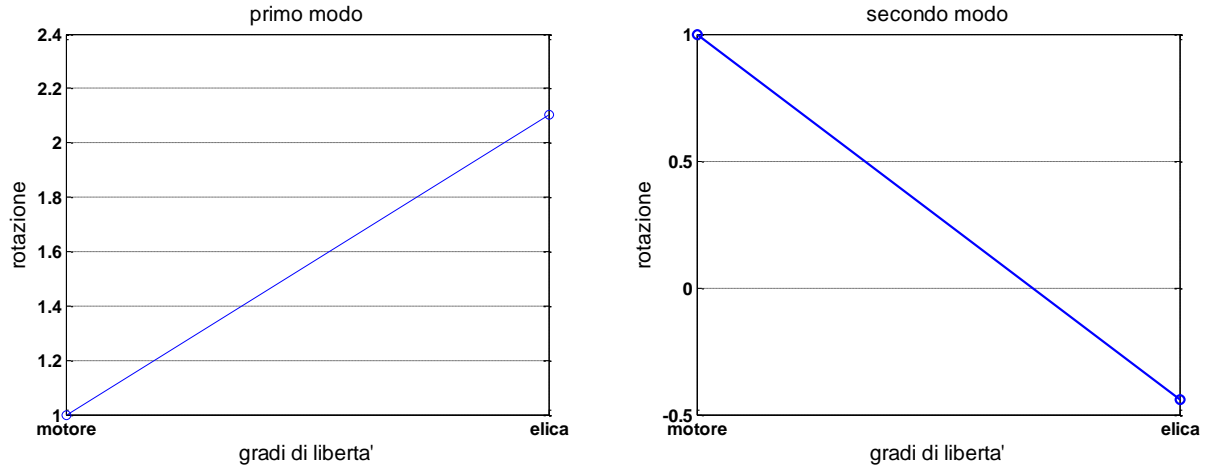


Figura 5. Rappresentazione cartesiana dei modi di vibrare

Procedimento per domanda 4)

Per un sistema a N g.d.l. smorzato la FRF con eccitazione in l e risposta in k assume la seguente forma:

$$H_{kl} = \sum_{j=1}^N \frac{\Phi_{kj} \Phi_{lj}}{K_j - \Omega^2 M_j + i\Omega C_j} \quad (4)$$

dove N rappresenta il numero di modi considerati, K_j , M_j e C_j sono i termini delle matrici rigidezza, massa e smorzamento modale, Ω è la pulsazione naturale e Φ è la matrici dei modi. Dividendo l'espressione (4) per M_j si ottiene un'espressione con i modi normalizzati:

$$H_{kl} = \sum_{j=1}^N \frac{\frac{\Phi_{kj} \Phi_{lj}}{\sqrt{M_j} \sqrt{M_j}}}{\frac{K_j}{M_j} - \Omega^2 + i\Omega \frac{C_j}{M_j}} = \sum_{j=1}^N \frac{\Phi'_{kj} \Phi'_{lj}}{\omega_j - \Omega^2 + 2i\Omega \omega_j \zeta_j} \quad (5)$$

dove ω_j e ζ_j sono la pulsazione naturale e lo smorzamento modale ed M_j è definito come segue:

$$\sqrt{M_j} = \sqrt{\Phi_j^T M \Phi_j} \quad (6)$$

Per il sistema a 2 g.d.l. si vuole calcolare la risposta forzata a seguito della coppia $M_m(t)$:

$$\begin{Bmatrix} \theta_m \\ \theta_e \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} H_{mm} & H_{me} \\ H_{em} & H_{ee} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

E' da notare che tutti i termini della (7) sono complessi. I termini H_{mm} e H_{em} sono definiti come segue, in base alla (5):

$$H_{mm} = \frac{\Phi'_{mm} \Phi'_{mm}}{\omega_1 - \Omega^2 + 2i\Omega \omega_1 \zeta_1} + \frac{\Phi'_{me} \Phi'_{me}}{\omega_2 - \Omega^2 + 2i\Omega \omega_2 \zeta_2} \quad (8)$$

$$H_{em} = \frac{\Phi'_{em} \Phi'_{mm}}{\omega_1 - \Omega^2 + 2i\Omega \omega_1 \zeta_1} + \frac{\Phi'_{ee} \Phi'_{me}}{\omega_2 - \Omega^2 + 2i\Omega \omega_2 \zeta_2} \quad (9)$$

La Figura 6 e Figura 7 mostrano le H_{mm} e H_{em} in termini di ampiezza e fase.

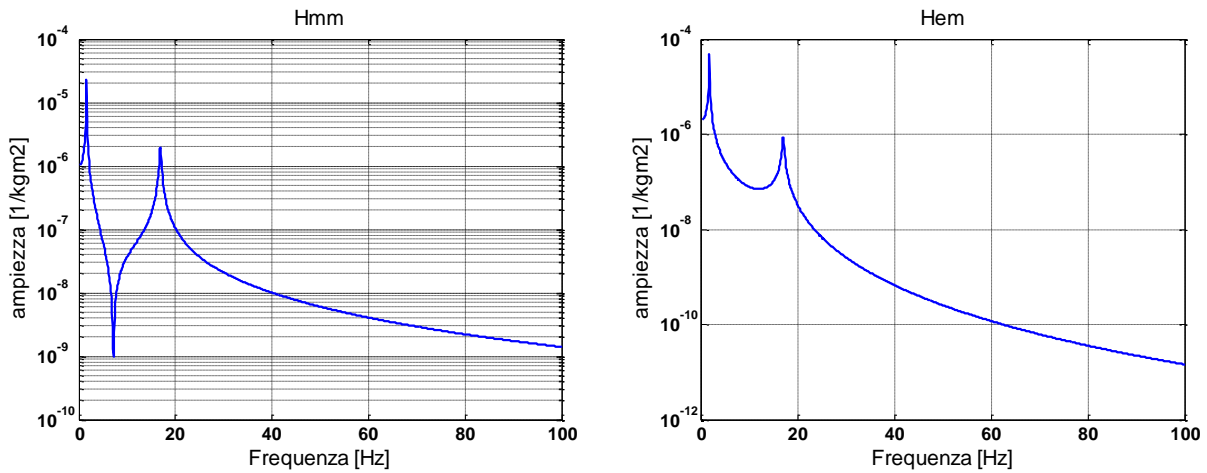


Figura 6. ampiezza delle FRE con smorzamento modale $\zeta = 0.01$.

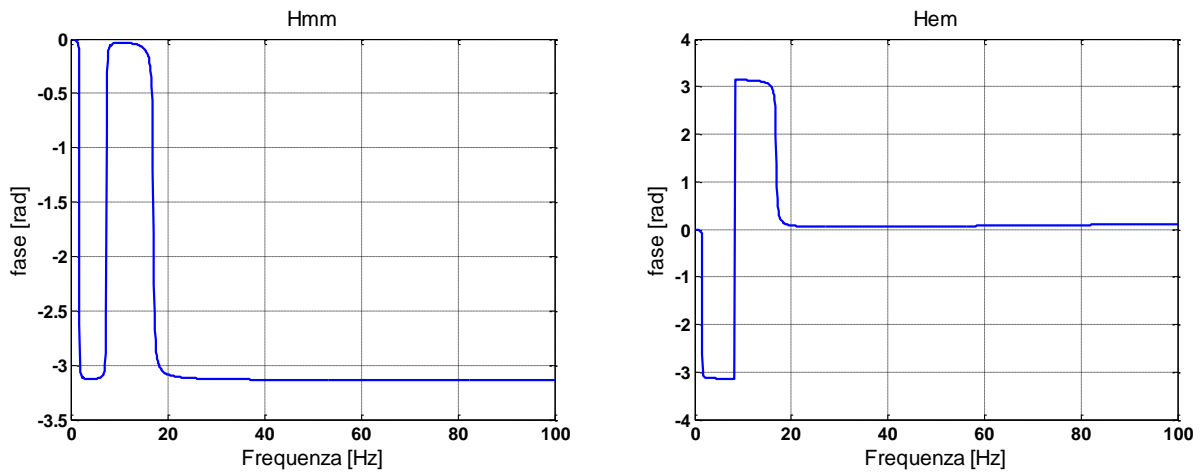


Figura 7. Fase delle FRE con smorzamento modale $\zeta = 0.01$.

Studiamo ora la coppia motrice $M_m(t)$. Alla velocità di 3400 rpm il motore eroga 120 kW, pertanto la coppia motrice costante del motore può essere ottenuta mediante la relazione:

$$M_{m0} = \frac{120 \text{ kW}}{\Omega_{rot}} = 337 \text{ Nm}$$

dove $\Omega_{rot} = 2\pi \cdot 3400 / 60$

In Figura 8 è mostrato il diagramma nel tempo e nel dominio della frequenza della coppia motrice.

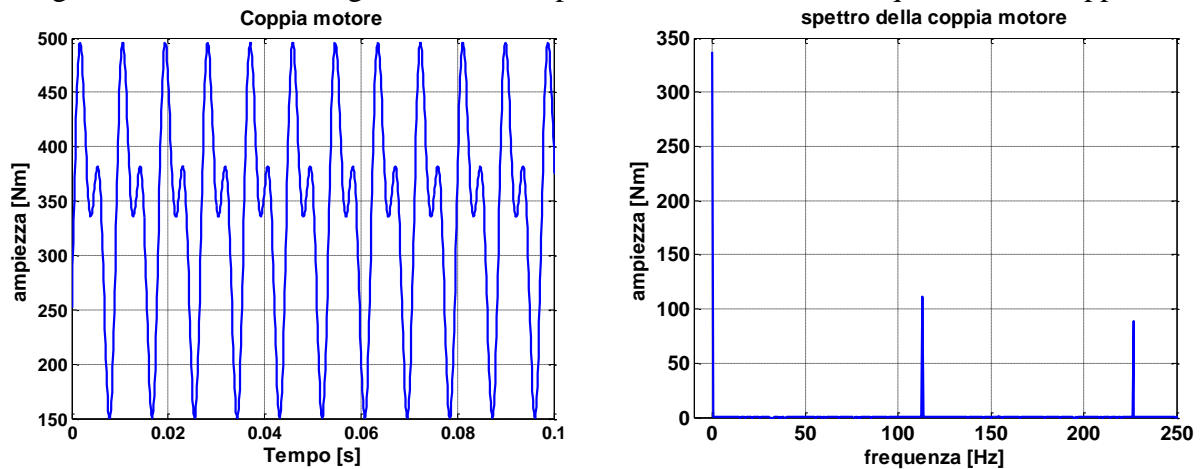


Figura 8. Coppia motore rappresentata nel dominio del tempo e delle frequenze.

L'espressione (7) nel dominio delle frequenze può essere scritta come segue:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_m &= \bar{H}_{mm}(2\Omega_{rot}) \cdot \bar{M}_m(2\Omega_{rot}) + \bar{H}_{mm}(4\Omega_{rot}) \cdot \bar{M}_m(4\Omega_{rot}) \\ \bar{\theta}_e &= \bar{H}_{em}(2\Omega_{rot}) \cdot \bar{M}_m(2\Omega_{rot}) + \bar{H}_{em}(4\Omega_{rot}) \cdot \bar{M}_m(4\Omega_{rot})\end{aligned}\quad (10)$$

dove :

$$\bar{M}_m(2\Omega_{rot}) = 111e^{-i2.014}$$

$$\bar{M}_m(4\Omega_{rot}) = 89e^{-i2.007}$$

Traccia di soluzione della domanda 1) in Matlab

1. Inizializzo le variabili

```
%%%DATI
```

```
Jv = 9000;
```

```
Jm = 1000;
```

```
.....
```

2. definisco le costanti elastiche torsionali

```
%%%costanti elastiche
```

```
k1 = pi*d1^4*G/(32*l1);
```

```
k2 = ...
```

3. definisco le matrici 3X3 massa e rigidezza

4. calcolo modi e frequenze naturali

```
[fi,omegaq] = eig(K,J);
```

```
freq_nat=...
```

5. normalizzo gli auto vettori rispetto al primo valore

```
for i =1:3,
```

```
    finorm(:,i) = fi(:,i)./fi(1,i);
```

```
end;
```

6. grafico dei modi

utilizzare il comando "plot"

7. utilizzare del comando "format short o long o long e" per mostrare il valore delle frequenze naturali con un sufficiente numero di cifre significative.

8. utilizzare edit/axes properties nella finestra grafica della figura di matlab per modificare la figura

Traccia di soluzione delle domande 2) e 3) in Matlab

1. Inizializzo le variabili

2. definisco le costanti elastiche torsionali

3. definisco le matrici 2X2 massa e rigidezza

4. calcolo modi e frequenze naturali

5. normalizzo gli auto vettori rispetto al primo valore

6. grafico dei modi

7. modifico il valore del Jv nel modello a 3 g.d.l. finche la prima frequenza torsionale del modello a 3 g.d.l. e la prima frequenza torsionale del modello a 2 g.d.l. non corrispondono con un errore del 5%

8. utilizzare edit/axes properties nella finestra grafica della figura di matlab per modificare la figura

Traccia di soluzione della domanda 4) in Matlab

1. Inizializzo le variabili (inserire i valori dello smorzamento modale (zita1 e zita2)
2. definisco le costanti elastiche torsionali
3. definisco le matrici 2X2 massa e rigidezza
4. calcolo modi e frequenze naturali

```
[fi,omegaq] = eig(K,J);  
freq_nat=..  
omega_nat=..
```

5. definisco i termini della matrice massa modale (che userò per normalizzare i modi)

```
M1=fi(:,1)'*J*fi(:,1);  
M2=
```

6. normalizzo i modi con la massa modale

```
fi_norm(:,1)=fi(:,1)/sqrt(M1);  
fi_norm(:,2)=...
```

7. calcolo delle FRF: Hmm, Hem

```
freq=[0:0.1:500];  
omega=2*pi*freq;
```

```
Hmm=(fi_norm(1,1)^2./(...;    (attenzione all'uso del puntino)  
Hme=...
```

8. grafico delle FRF utilizzando il comando *abs* e *angle* per ottenere ampiezza e fase
9. grafico delle FRF con smorzamento modale nullo
10. definisco i valori della coppia motrice per l'armonica 2X e 4X e la frequenza di rotazione

```
Mm_2X=...  
Mm_4X=...
```

11. selezione dalle FRF complesse per il valore corrispondente alla seconda armonica(velocità angolare di 2Xfreq_rot)

```
dF=0.1; freq_rot=3400/60;  
for k=1:length(freq)  
    if freq(k) >= 2*freq_rot-dF & freq(k) <= 2*freq_rot+dF  
        Hmm_2X=Hmm(k);  
        Hem_2X=Hem(k);  
    end  
end
```

12. selezione dalle FRF complesse per il valore corrispondente alla seconda armonica(velocità angolare di 4Xfreq_rot). Usare un indice diverso da “k”, ad esempio “j”.
13. calcolo rotazioni di motore e elica con formula 13 e 14.