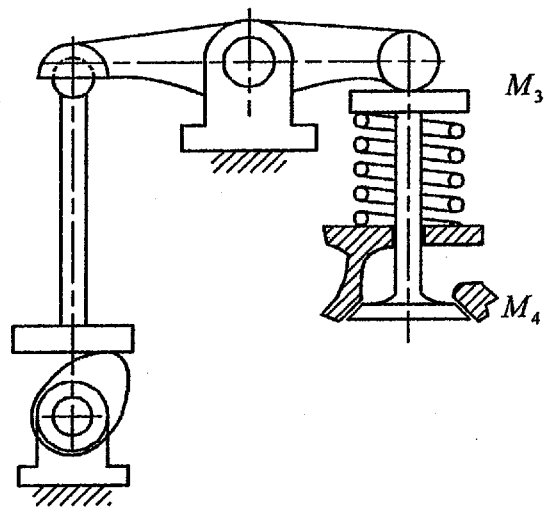
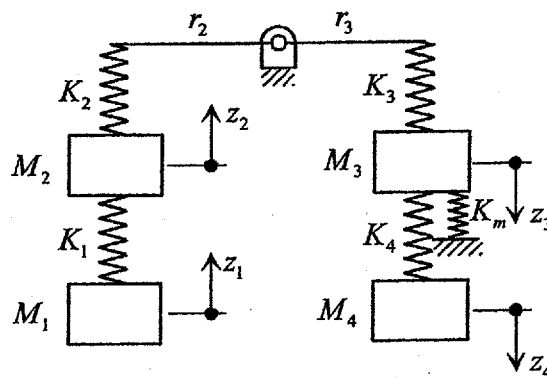


Fig. 7.10 – Sistema reale e suo modello fisico.

12

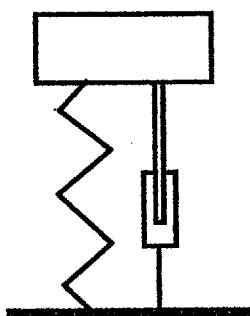
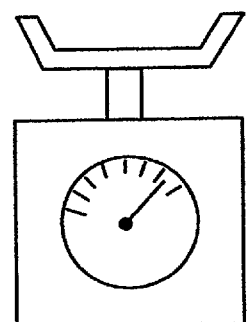


a)



b)

Fig. 7.20 – Meccanismo a camma per un motore a combustione interna: a) schema del meccanismo; b) modello iniziale con solo masse e molle. Lo spostamento z_1 rappresenta l'egge di moto imposta dalla camma.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

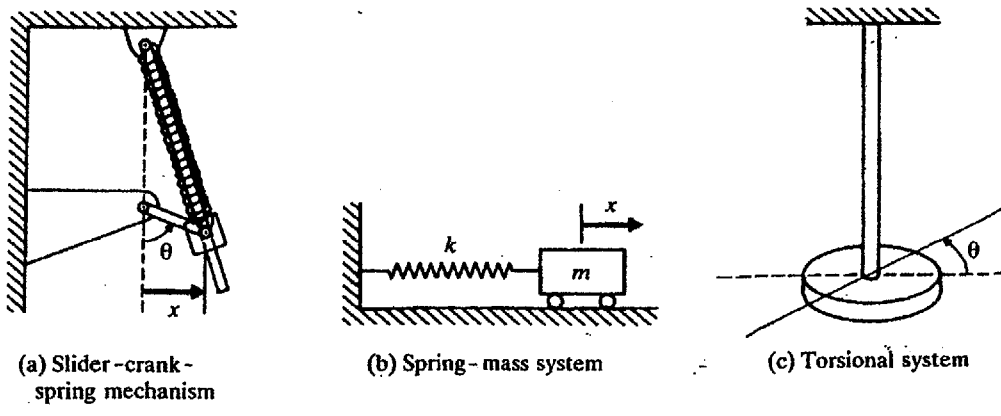


Fig. 3.1 – Single-degree of freedom (SDOF) systems ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 14)

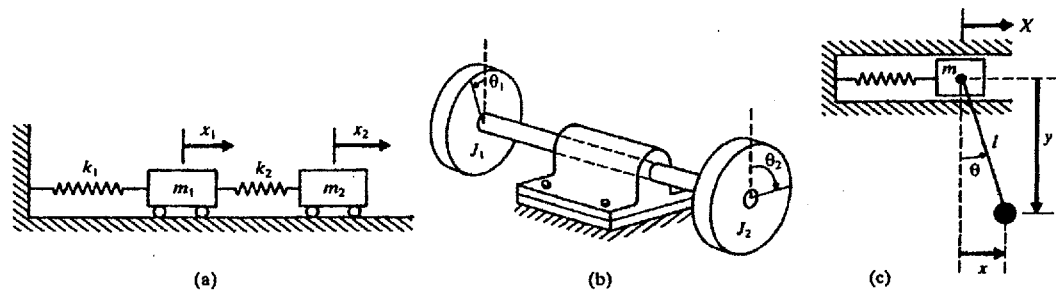


Fig. 3.2 – Two degree of freedom systems ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 14)

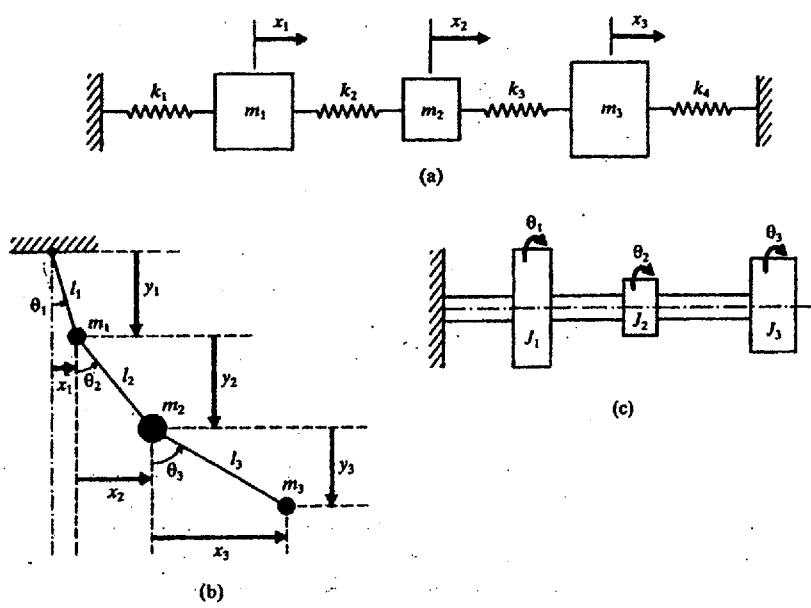


Fig. 3.3 – Three degree of freedom systems ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 15)

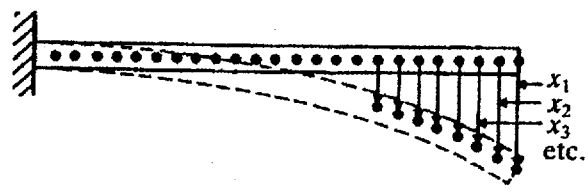
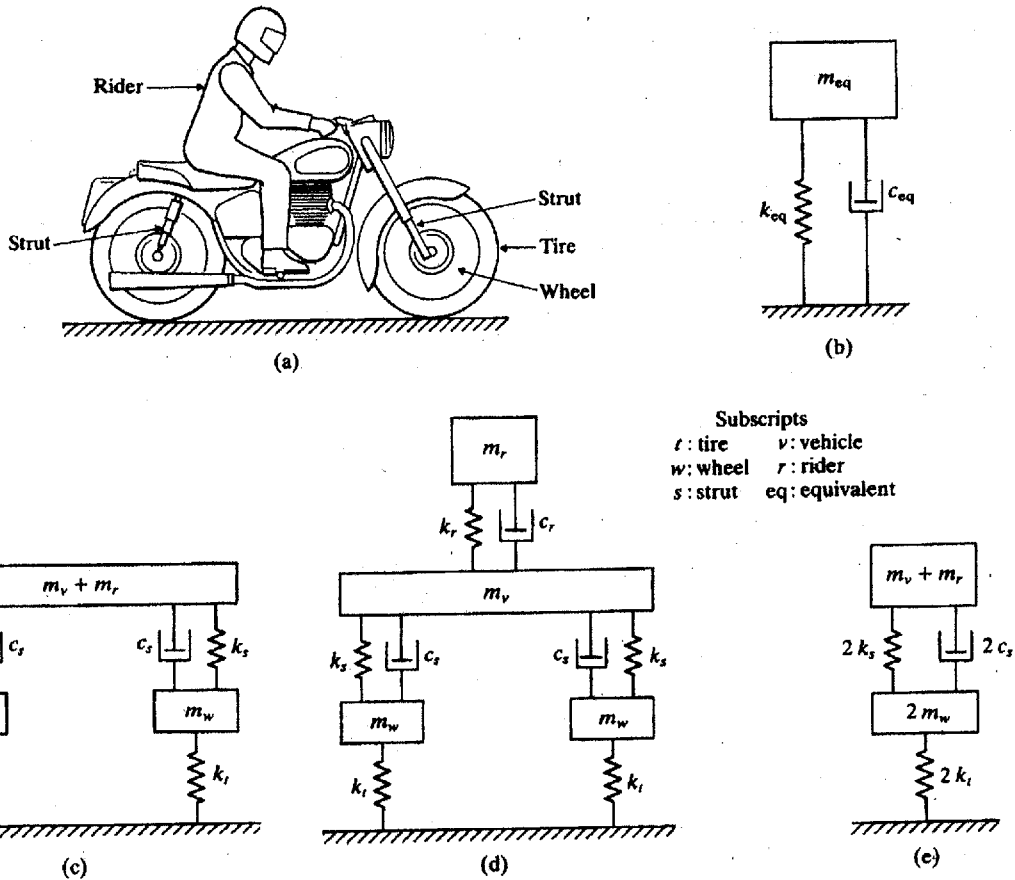


Fig. 3.4 – An infinite number of dof system: a cantilever beam ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 16)

volte rivelano certe caratteristiche del sistema che non possono essere correttamente predette impiegando modelli lineari.

A volte il modello viene gradualmente migliorato in modo da ottenere risultati più accurati. Inizialmente viene usato un modello elementare per investigare rapidamente il comportamento globale del sistema. Successivamente il modello viene raffinato includendo altri componenti ed effetti in modo che il comportamento del sistema possa essere osservato più nel dettaglio.



Modellazione di un motociclo con pilota ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 21)

IL MODELLO MATEMATICO

Una volta individuato il modello fisico del sistema, si può procedere a determinarne il modello matematico, cioè un insieme di relazioni matematiche che descrivono il comportamento del modello fisico stesso.

La scrittura di tali equazioni avviene impiegando i principi della dinamica: si possono seguire approcci differenti tra i quali il principio di d'Alembert, il principio dei lavori virtuali, il principio di conservazione dell'energia, le equazioni di Lagrange.

Le equazioni del moto sono solitamente equazioni differenziali ordinarie, per un sistema discreto, ed equazioni differenziali alle derivate parziali, per un sistema continuo. Le equazioni possono essere lineari o non lineari a seconda della tipologia dei componenti il sistema.

Si passerà infine alla realizzazione di un algoritmo di risoluzione delle equazioni del modello matematico. Solo in casi semplici la soluzione può venire ottenuta in forma chiusa: di solito si ottiene la soluzione per via numerica, mediante l'uso di un calcolatore.

In funzione della natura del problema si può usare una delle seguenti tecniche per trovare la soluzione: metodi standard per la soluzione di equazioni differenziali, metodi basati sulla trasformata di Laplace, metodi matriciali, metodi numerici.

Se le equazioni sono non lineari difficilmente possono essere risolte in forma chiusa.

11. PROGRAMMI A ELEMENTI FINITI

- Per risolvere problemi con il metodo degli elementi finiti sono oggi disponibili molti programmi commerciali, che – oltre a quello ovvio di risparmiare la scrittura e l'assemblaggio delle matrici – offrono numerosi vantaggi, quali:
- comode interfaccia per la "mesciatura" automatica, spesso collegabili con programmi CAD;
 - uscite anche grafiche. Nel caso dell'analisi dinamica, è di solito possibile visualizzare anche l'animazione dei modi di vibrare;

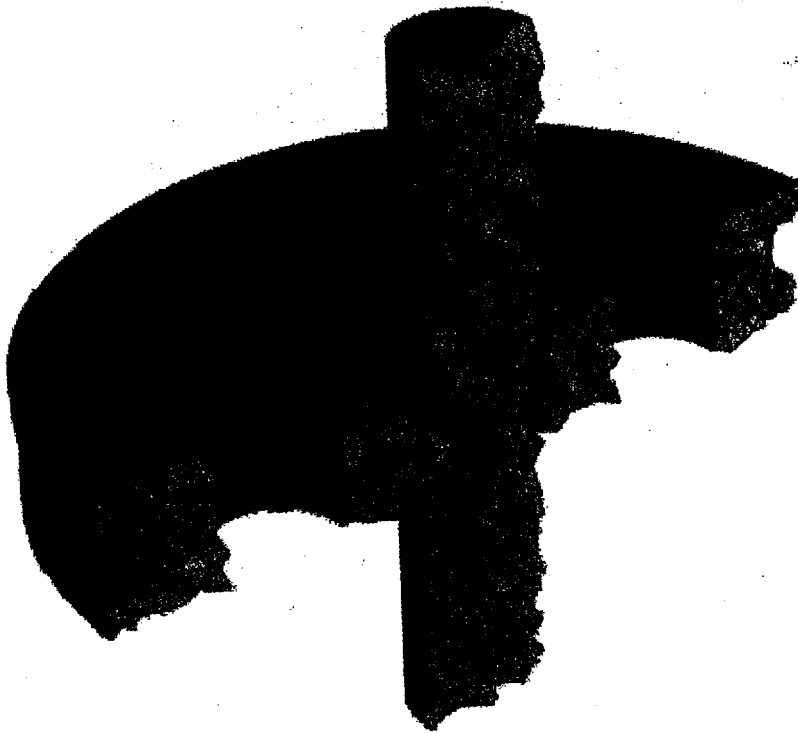
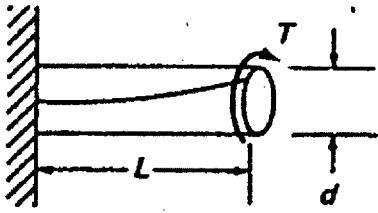


Fig. 8.10 - Esempio di reticolo per una struttura complessa.

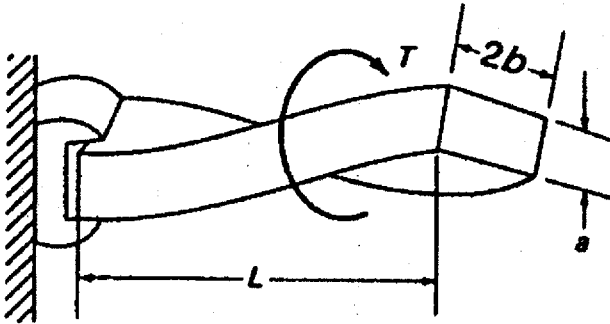


1. Round rod

$$K_{eq} = \frac{\pi d^4 G}{32L}$$

where

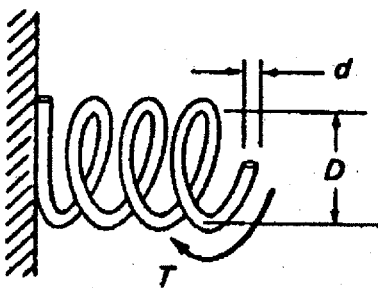
G = modulus in shear



2. Rectangular bar

$$K_{eq} = \frac{CG}{L}$$

$$C = ab^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$$



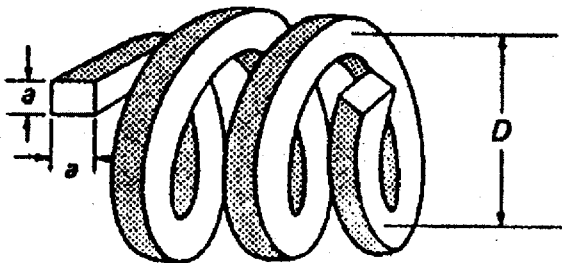
3. Coiled spring in torsion (round wire)

$$K_{eq} = \frac{Ed^4}{64DN}$$

where

E = Young's modulus

N = number of coils



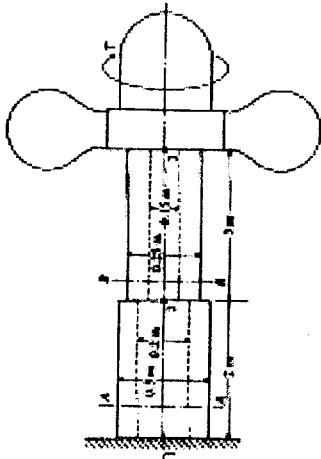
4. Square wire coiled spring

$$K_{eq} = \frac{Ea^4}{12\pi DN}$$

Esercizio 6 - CALCOLO DI COSTANTI ELASTICHE

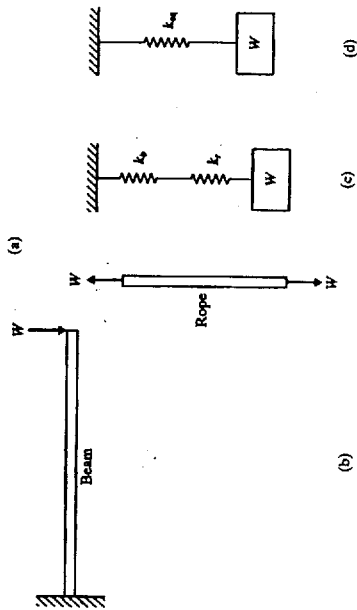
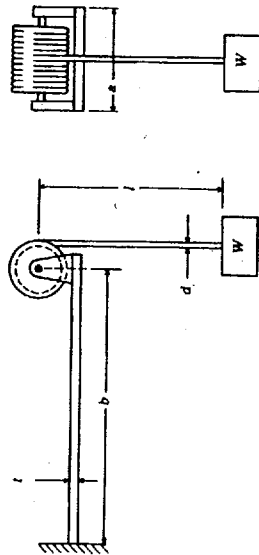
Esercizio 1

Con riferimento al propulsore ad elica di figura, determinare la rigidità torsionale dell'albero, noto il modulo di elasticità tangenziale del materiale $G = 8 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$.



Esercizio 2

Con riferimento all'impianto di sollevamento di figura, determinare la costante elastica equivalente del sistema quando la lunghezza libera della fune è pari a l .

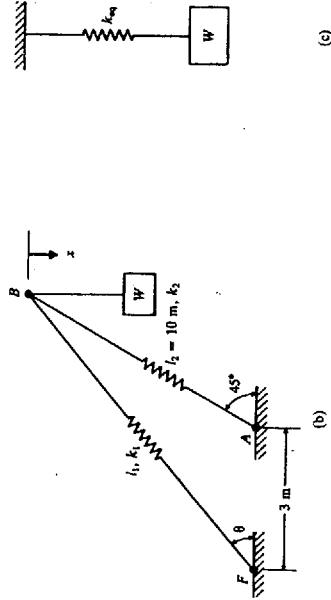
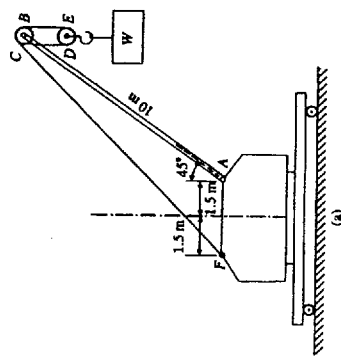


Esercizio 3

Con riferimento al carrello ferroviario mostrato in figura, determinare la costante elastica equivalente di ciascuna sospensione realizzata con tre molle ad elica in acciaio (modulo di elasticità tangenziale $G = 8 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$) aventi diametro $D = 20 \text{ cm}$ e diametro della spira $d = 2 \text{ cm}$.

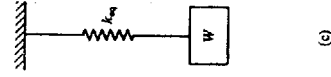


Esercizio 4

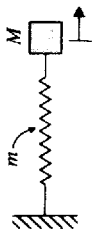


Con riferimento alla macchina per sollevamento carichi di figura, determinare la costante elastica equivalente del sistema in direzione verticale.

Il puntone è realizzato in acciaio ed ha una sezione costante pari a 2500 mm^2 , il cavo è anch'esso in acciaio con sezione pari a 100 mm^2 . Si trascuri l'influenza del tratto di cavo CDEB.

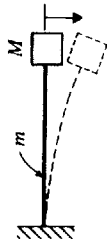


Equivalent masses



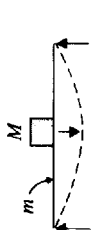
Mass (M) attached at end of spring of mass m

$$m_{eq} = M + \frac{m}{3}$$



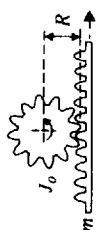
Cantilever beam of mass m carrying an end mass M

$$m_{eq} = M + 0.23 m$$



Simply supported beam of mass m carrying a mass M at the middle

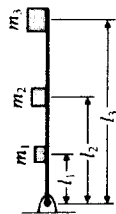
$$m_{eq} = M + 0.5 m$$



Coupled translational and rotational masses

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2}$$

$$J_{eq} = J_0 + mR^2$$



Masses on a hinged bar

$$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 m_3$$

Equivalent springs



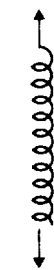
Rod under axial load (l = length, A = cross sectional area)

$$k_{eq} = \frac{EA}{l}$$



Tapered rod under axial load (D, d = end diameters)

$$k_{eq} = \frac{\pi EDd}{4l}$$



Helical spring under axial load ρ (CWS) (d = wire diameter, D = mean coil diameter, n = number of active turns)

$$k_{eq} = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$



Fixed-fixed beam with load at the middle

$$k_{eq} = \frac{192EI}{l^3}$$



Cantilever beam with end load

$$k_{eq} = \frac{3EI}{l^3}$$

Simply supported beam with load at the middle

$$k_{eq} = \frac{48EI}{l^3}$$

Springs in series

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

Springs in parallel

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

Hollow shaft under torsion (l = length, D = outer diameter, d = inner diameter)

$$k_{eq} = \frac{\pi G}{32l}(D^4 - d^4)$$

Relative motion between parallel surfaces (A = area of smaller plate)

$$c_{eq} = \frac{\mu A}{h}$$

Dashpot (axial motion of a piston in a cylinder)

$$c_{eq} = \mu \frac{3\pi D^3 l}{4d^3} \left(1 + \frac{2d}{D}\right)$$

Torsional damper

$$c_{eq} = \frac{\pi \mu D^2 (l - h)}{2d} + \frac{\pi \mu D}{32h}$$

Dry friction (Coulomb damping) (N = friction force, ω = frequency, X = amplitude of vibration)

$$c_{eq} = \frac{4N}{\pi \omega X}$$