Simbologia:

$\{X\} = \underline{\Phi}$

$\{X\}_j = \underline{\Phi}_j$

7.4 Quoziente di Rayleigh

Per un sistema a n gdl, l'energia cinetica e l'energia potenziale sono rispettivamente espresse dalle:

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T[M]\{\dot{x}\}\,; \qquad V = \frac{1}{2}\{x\}^T[K]\{x\}$$

che, inserita la soluzione armonica: $\{x(t)\} = \{X\}\ e^{i\omega t}$, diventano:

$$T = -\frac{1}{2}\omega^2\{X\}^T[M]\{X\}\,e^{i2\omega t}; \qquad V = \frac{1}{2}\{X\}^T[M]\{X\}\,e^{i2\omega t}$$

Se il sistema è conservativo vale il principio di conservazione dell'energia meccanica ($T_{MAX} = V_{MAX}$), per cui si ottiene:

$$T_{MAX} = \frac{1}{2}\omega^2\{X\}^T[M]\{X\} = V_{MAX} = \frac{1}{2}\{X\}^T[K]\{X\}$$

da cui si può ricavare il seguente rapporto:

$$\omega^2 = \frac{\{X\}^T[K]\{X\}}{\{X\}^T[M]\{X\}} = R(\{X\}) \tag{7.33}$$

noto come *quoziente di Rayleigh*.

Si può dimostrare che il quoziente di Rayleigh è stazionario in un intorno di $\{X\}_j$. In altre parole, se:

$$R\left(\{X\}_j\right) = {\omega_j}^2 \quad \text{allora risulta:} \quad R\left(\{X\}\right) = {\omega_j}^2\left[1 + O(\varepsilon^2)\right]$$

con $\{X\}$ arbitrario in un intorno di $\{X\}_j$.

Questa proprietà è molto utile in quanto permette di usare il quoziente di Rayleigh per determinare un valore approssimato della prima frequenza naturale di un sistema. Infatti, è sufficiente assumere un ragionevole primo modo di vibrare (l'autovettore $\{X\}_1$) ed il quoziente di Rayleigh fornirà una buona approssimazione del quadrato della pulsazione naturale ω_1. Ovviamente la stima di ω_1 sarà tanto migliore quanto più il primo modo ipotizzato è vicino a quello vero.

Si noti che il quoziente di Rayleigh si ottiene anche dall'equazione del moto del sistema libero non smorzato:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

Infatti, una volta sostituita una soluzione armonica si ottiene la:

$$-\omega^2[M]\{X\} + [M]\{X\} = \{0\}$$

in cui è sufficiente pre-moltiplicare per $\{X\}^T$ per ottenere il quoziente di Rayleigh.

7.5 Metodo di Rayleigh-Ritz

Si tratta di una generalizzazione, dovuta a Ritz, del metodo di Rayleigh. Il metodo viene impiegato per valutare le prime (le più basse) frequenze proprie di un sistema.

Il procedimento si basa sulla scelta di una *ragionevole deformata* per i primi r modi del sistema a n gdl ($r \ll n$). È evidente che, nel caso in cui $r = 1$, il metodo di Ritz coincide con quello di Rayleigh.
Sia $[\gamma]$ la matrice contenente le stime dei primi r modi. Si può scrivere:

$$\{x\} = [\gamma]\{p\}$$

dove $\{x\}$ è il vettore di dimensione n delle coordinate *fisiche*, $[\gamma]$ è una matrice di dimensioni $n \times r$ le cui colonne sono le "ragionevoli forme modali", e $\{p\}$ è un vettore di dimensione $r \ll n$. Naturalmente, la deformata prescelta deve soddisfare le condizioni al contorno.

Le espressioni dell'energia cinetica T e dell'energia potenziale V assumono la forma:

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T[M]\{\dot{x}\} = \frac{1}{2}\{\dot{p}\}^T[\gamma]^T[M][\gamma]\{\dot{p}\};$$

$$V = \frac{1}{2}\{x\}^T[K]\{x\} = \frac{1}{2}\{p\}^T[\gamma]^T[K][\gamma]\{p\}.$$

e pertanto le equazioni di Lagrange assumono la forma:

$$[\gamma]^T[M][\gamma]\{\ddot{p}\} + [\gamma]^T[K][\gamma]\{p\} = \{0\}$$

Il sistema così ottenuto è costituito da r equazioni, mentre quello di partenza ne conteneva $n \gg r$. La soluzione del sistema fornirà una stima delle prime r pulsazioni proprie del sistema.

7.5.1 Esempio

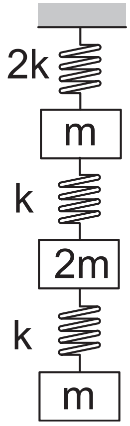

Figura 7.1: Esempio di applicazione del metodo di Rayleigh-Ritz

Come esempio di applicazione del metodo si consideri il sistema a $n = 3$ gdl. rappresentato in Fig. 7.1, le cui pulsazioni e modi (soluzioni esatte) sono:

$$\omega_1 = 0.4450\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = 1.2470\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_3 = 1.8019\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.8020 \\ 3.4940 \end{Bmatrix} \quad \{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.4451 \\ -2.6040 \end{Bmatrix} \quad \{X\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.1470 \\ 0.1099 \end{Bmatrix}$$

Caso $r = 1$ (metodo di Rayleigh). Si assuma come ragionevole deformata, la deformata statica sotto l'azione della forza peso. Risulta:

$$\{\gamma\}^T = \begin{Bmatrix} 2 & 5 & 6 \end{Bmatrix}^T$$

che, normalizzato, diventa:

$$\{\gamma\}^T = \begin{Bmatrix} 1 & 2.5 & 3 \end{Bmatrix}^T$$

e si ottiene:

$$\{\gamma\}^T[M]\{\gamma\} = \{1 \quad 2.5 \quad 3\} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 3 \end{Bmatrix} = 22.5\ m$$

$$\{\gamma\}^T[K]\{\gamma\} = \{1 \quad 2.5 \quad 3\} \begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 3 \end{Bmatrix} = 4.5\ k$$

da cui l'equazione del moto diventa:

$$22.5\ m\ \ddot{p} + 4.5\ k\ p = 0$$

La stima della prima pulsazione del sistema è pertanto:

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{4.5\ k}{22.5\ m}} = \sqrt{\frac{k}{5\ m}} == 0.4472\sqrt{\frac{k}{m}}$$

con un errore dello 0.5% rispetto al valore esatto.

Caso $r = 2$ (metodo di Ritz). Considerando lo stesso sistema dell'esempio precedente, si vogliano ora stimare le prime due frequenze proprie. Si assumano come ragionevoli forme modali, quella appena impiegata:

$$\{\gamma\}_1^T = \begin{Bmatrix} 1 & 2.5 & 3 \end{Bmatrix}^T \quad \text{e, arbitrariamente:} \quad \{\gamma\}_2^T = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{Bmatrix}^T$$

cioè in definitiva:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ovvero:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

Si ottiene allora:

$$[\gamma]^T[M][\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 2.5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.5 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} m$$

$$[\gamma]^T[K][\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 2.5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} k$$

Le equazioni del moto sono pertanto:

$$m \begin{bmatrix} 22.5 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \{\ddot{p}\} + k \begin{bmatrix} 4.5 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \{p\} = \{0\}$$

L'equazione caratteristica è:

$$161\, m^2\, \omega^4 - 283\, k\, m\omega^2 + 50\, k^2 = 0$$

Si ottengono dunque le seguenti stime delle prime due pulsazioni naturali:

$$\tilde{\omega}_1 = 0.4464\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \tilde{\omega}_2 = 1.2484\sqrt{\frac{k}{m}}$$

con un errore sulla prima pulsazione dello 0.3% e sulla seconda dello 0.1% rispetto ai valore esatti. I corrispondenti modi sono:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.0405 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.9199 \end{Bmatrix}$$

da cui si ricavano:

$$\{\tilde{X}\}_1 = [\gamma]\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.521 \\ 3.169 \end{Bmatrix} \qquad \{\tilde{X}\}_2 = [\gamma]\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.739 \\ -3.084 \end{Bmatrix}$$

Si osservi che se si fosse assunto:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

si sarebbe ottenuto:

$$[\gamma]^T[M][\gamma] = \begin{bmatrix} 22.5 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix} m \qquad [\gamma]^T[K][\gamma] = \begin{bmatrix} 4.5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} k$$

da cui:

$$\tilde{\omega}_1 = 0.4461\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \tilde{\omega}_2 = 1.2488\sqrt{\frac{k}{m}}$$

con un errore sulla prima pulsazione dello 0.25% e sulla seconda dello 0.15% rispetto ai valore esatti. I corrispondenti modi sono:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.1066 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.6242 \end{Bmatrix}$$

da cui si ricavano:

$$\{\tilde{X}\}_1 = [\gamma]\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.5596 \\ 3.2386 \end{Bmatrix} \qquad \{\tilde{X}\}_2 = [\gamma]\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.199 \\ -2.204 \end{Bmatrix}$$

7.6 Modifiche strutturali

Il quoziente di Rayleigh può venire impiegato per valutare l'effetto di piccole modifiche strutturali. Si consideri il quoziente di Rayleigh per il modo j-esimo:

$${\omega_j}^2 = \frac{{\{X\}_j}^T[K]\{X\}_j}{{\{X\}_j}^T[M]\{X\}_j} = R\left(\{X\}_j\right)$$

esso non è altro che il rapporto tra la rigidezza modale K_j e la massa modale M_j.

Se alcune masse e/o rigidezze del sistema subiscono una modifica, ovviamente anche le frequenze e i modi cambiano. Se con $[M + \Delta M]$ e $[K + \Delta K]$ si indicano rispettivamente le nuove matrici massa e rigidezza, si avrà:

$${\omega_j}^* = \omega_j + \Delta\omega_j \qquad \{X\}_j^* = \{X\}_j + \Delta\{X\}_j$$

La nuova pulsazione j-esima è dunque:

$$\omega_j^{*2} = \frac{\{X\}_j^{*T}[K + \Delta K]\,\{X\}_j^*}{\{X\}_j^{*T}[M + \Delta M]\,\{X\}_j^*} = R\left(\{X\}_j^*\right)$$

Se ora si assume che sia $\{X\}_j^* = \{X\}_j$, ossia che la forma modale conseguente alle modifiche coincida con quella relativa al sistema senza modifiche, si può scrivere:

$$\omega_j^{*2} \cong \frac{{\{X\}_j}^T[K + \Delta K]\{X\}_j}{{\{X\}_j}^T[M + \Delta M]\{X\}_j} = \frac{{\{X\}_j}^T[K]\{X\}_j + {\{X\}_j}^T[\Delta K]\{X\}_j}{{\{X\}_j}^T[M]\{X\}_j + {\{X\}_j}^T[\Delta M]\{X\}_j}$$

ovvero:

$$\omega_j^{*2} \cong {\omega_j}^2 \frac{1 + \dfrac{{\{X\}_j}^T [\Delta K] \{X\}_j}{{\{X\}_j}^T [K] \{X\}_j}}{1 + \dfrac{{\{X\}_j}^T [\Delta M] \{X\}_j}{{\{X\}_j}^T [M] \{X\}_j}}$$

7.6.1 Esempio 1

Come esempio di applicazione del metodo si consideri il sistema a n=3 gdl rappresentato in Fig. 7.2, le cui matrici massa e rigidezza sono:

$$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 3m \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

Le soluzioni esatte sono le seguenti:

$$\omega_1 = 0.3243\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = 0.8992\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_3 = 1.9798\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.3948 \\ 2.0378 \end{Bmatrix} \quad \{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6914 \\ -0.4849 \end{Bmatrix} \quad \{X\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.4195 \\ 0.2249 \end{Bmatrix}$$

Si impieghi il metodo di Rayleigh per trovare il nuovo valore ω_3^* della terza pulsazione naturale se la rigidezza della seconda molla viene portata da $2k$ a $2.5k$. L'energia potenziale e cinetica massime del terzo modo sono rispettivamente:

$$V_{3_{MAX}} = \frac{1}{2}{\{X\}_3}^T [K] \{X\}_3 = \frac{1}{2} K_3; \qquad T_{3_{MAX}} = \frac{1}{2}{\omega_3}^2 {\{X\}_3}^T [M] \{X\}_3 = \frac{1}{2}{\omega_3}^2 M_3$$

dove K_3 e M_3 sono rispettivamente la terza rigidezza modale e la terza massa modale. A seguito della modifica di rigidezza, si ha:

$$V^*_{3_{MAX}} = \frac{1}{2}{\{X\}_3}^T [K + \Delta K] \{X\}_3; \qquad T^*_{3_{MAX}} = \frac{1}{2}{\omega_3}^{*2} {\{X\}_3}^T [M] \{X\}_3 = \frac{1}{2}{\omega_3}^{*2} M_3$$

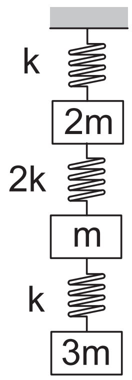

Figura 7.2: Modifiche strutturali

Applicando il metodo di Rayleigh, risulta:

$$V_{3_{MAX}} = T_{3_{MAX}} \qquad V^*_{3_{MAX}} = T^*_{3_{MAX}}.$$

Dividendo membro a membro si ha poi:

$$\frac{{\omega_3}^{*2}}{{\omega_3}^2} = \frac{T^*_{3_{MAX}}}{T_{3_{MAX}}} = \frac{V^*_{3_{MAX}}}{V_{3_{MAX}}} = \frac{{\{X\}_3}^T[K+\Delta K]\{X\}_3}{{\{X\}_3}^T[K]\{X\}_3}$$

o anche:

$$\frac{{\omega_3}^{*2}}{{\omega_3}^2} = \frac{{\{X\}_3}^T[K+\Delta K]\{X\}_3}{K_3} = 1 + \frac{{\{X\}_3}^T[\Delta K]\{X\}_3}{K_3}.$$

Ora, sostituendo i valori, la variazione di matrice rigidezza vale:

$$[\Delta K] = \begin{bmatrix} 0.5k & -0.5k & 0 \\ -0.5k & 0.5k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_k & -\delta_k & 0 \\ -\delta_k & \delta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La terza rigidezza modale K_3 è:

$$K_3 = {\{X\}_3}^T[K]\{X\}_3 = 31.38\,k.$$

Inoltre è:

$${\{X\}_3}^T[\Delta K]\{X\}_3 = \delta_k(X_{13} - X_{23})^2 = 0.5\,k\,(1 + 2.4195)^2.$$

Infine:

$${\omega_3}^* = \omega_3\sqrt{1 + \frac{{\{X\}_3}^T[\Delta K]\{X\}_3}{K_3}} = 1.9798\sqrt{1 + \frac{0.5\,k\,(1+2.4195)^2}{31.38\,k}}\sqrt{\frac{k}{m}} = 2.1563\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Il valore esatto della terza pulsazione a seguito della variazione della rigidezza della seconda molla è: $\omega^*_{3ESATTO} = 2.1549\sqrt{k/m}$ ovvero si è compiuto un errore pari a 0.1%.

7.6.2 Esempio 2

Si consideri ancora lo stesso sistema di Fig. 7.2 ma si calcoli la terza frequenza naturale qualora la seconda massa passi al valore 1.3 m. Questa volta risulta:

$$\frac{{\omega_3}^{*2}}{{\omega_3}^2} = \frac{1}{\dfrac{{\{X\}_3}^T[M+\Delta M]\{X\}_3}{M_3}} = \frac{1}{1 + \dfrac{{\{X\}_3}^T[\Delta M]\{X\}_3}{M_3}}$$

$$[\Delta M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La terza massa modale M_3 è:

$$M_3 = {\{X\}_3}^T[M]\{X\}_3 = 8.006\,m.$$

Inoltre è:

$${\{X\}_3}^T[\Delta M]\{X\}_3 = \delta_m(X_{23})^2 = 0.3\,m\,(-2.4195)^2$$

$${\omega_3}^* = \omega_3\sqrt{\frac{1}{1 + \dfrac{{\{X\}_3}^T[\Delta M]\{X\}_3}{M_3}}} = 1.9798\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{1}{1 + \dfrac{0.3\,m\,(-2.4195)^2}{8.006\,m}}} = 1.793\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Il valore esatto della terza pulsazione a seguito della variazione della seconda massa è: $\omega^*_{3ESATTO} = 1.807\sqrt{k/m}$ ovvero si è compiuto un errore pari a 0.77%.