APPENDICE A5-3

SISTEMA CON TRE GRADI DI LIBERTÀ

Come esempio di applicazione di quanto esposto nel testo, eseguiamo lo studio del sistema di figura A5-3.1, che è un sistema con tre gradi di libertà, non smorzato.

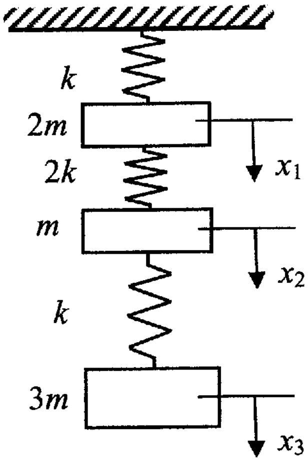

Fig. A5-3.1 – *Sistema con tre gradi di libertà, non smorzato.*

a) *Vibrazioni libere.* Le matrici di massa **M** e di rigidezza **K** sono:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 3m \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}. \tag{A5-3.1}$$

Essendo:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/3m \end{bmatrix}, \tag{A5-3.2}$$

la matrice dinamica è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3k/2m & -k/m & 0 \\ -2k/m & 3k/m & -k/m \\ 0 & -k/3m & k/3m \end{pmatrix}. \tag{A5-3.3}$$

Le radici quadrate degli autovalori e gli autovettori della matrice dinamica – normalizzati con il primo elemento posto uguale a 1 –, cioè le pulsazioni proprie e le forme modali del sistema, sono:

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 = 0.324305\sqrt{\frac{k}{m}}, &\quad \Phi_1 &= \begin{pmatrix} 0.3753 \\ 0.5235 \\ 0.7649 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.3948 \\ 2.0378 \end{pmatrix}; \\
&\omega_2 = 0.899227\sqrt{\frac{k}{m}}, &\quad \Phi_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0.6914 \\ -0.4849 \end{pmatrix}; \\
&\omega_3 = 1.97978\sqrt{\frac{k}{m}}, &\quad \Phi_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2.4196 \\ 0.2249 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{A5-3.4}
$$

La matrice modale (normalizzata) è allora:

R1

$$
\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.3948 & 0.6914 & -2.4196 \\ 2.0378 & -0.4849 & 0.2249 \end{pmatrix}. \tag{A5-3.5}
$$

R2

Le espressioni del moto libero generale delle tre masse sono:

R1 a1

R2 a2

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) + A_3\cos(\omega_3 t+\varphi_3) \\
x_2(t) &= 1.3948A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + 0.6914A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) - 2.4196A_3\cos(\omega_3 t+\varphi_3) \\
x_1(t) &= 2.0378A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) - 0.4849A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) + 0.2249A_3\cos(\omega_3 t+\varphi_3)
\end{aligned}
\tag{A5-3.6}
$$

L'inversa e la trasposta della matrice modale sono:

$$
\mathbf{\Phi}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.121926 & 0.085032 & 0.372691 \\ 0.628262 & 0.217181 & -0.456957 \\ 0.249811 & -0.302214 & 0.084266 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Phi}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1.3948 & 2.0378 \\ 1 & 0.6914 & -0.4849 \\ 1 & -2.4196 & 0.2249 \end{pmatrix}. \tag{A5-3.7}
$$

Le relazioni fra le coordinate fisiche x e coordinate principali q sono:

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.3948 & 0.6914 & -2.4196 \\ 2.0378 & -0.4849 & 0.2249 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & + & q_2 & + & q_3 \\ 1.3948q_1 & & +0.6914q_2 & & -2.4196q_3 \\ 2.0378q_1 & & -0.4849q_2 & & +0.2249q_3 \end{pmatrix}, \tag{A5-3.8}
$$

$\underline{\underline{\phi}}$

Φ^{-1}

$$\mathbf{q}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.121926 & 0.085032 & 0.372691\\0.628262 & 0.217181 & -0.456957\\0.249811 & -0.302214 & 0.084266\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.121926\ x_1+0.085032\ x_2+0.372691\ x_3\\0.628262\ x_1+0.217181\ x_2-0.456957\ x_3\\0.249811\ x_1-0.302214\ x_2+0.084266\ x_3\end{pmatrix}. \tag{A5-3.9}$$

Le masse modali e le rigidezze modali dei tre modi propri sono:

$$\begin{aligned} m_1&=\mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_1=16.403\ m, & k_1&=\mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_1=1.7252\ k,\\ m_2&=\mathbf{\Phi}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_2=3.1834\ m, & k_2&=\mathbf{\Phi}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_2=2.5741\ k,\\ m_3&=\mathbf{\Phi}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_3=8.0062\ m, & k_3&=\mathbf{\Phi}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_3=31.381\ k.\end{aligned} \tag{A5-3.10}$$

Si verifica subito che è:

$$\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}=0.3243\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}=0.8992\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \sqrt{\frac{k_3}{m_3}}=1.9798\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{A5-3.11}$$

in accordo con le espressioni (A5-3.4) delle pulsazioni proprie del sistema.

b) Vibrazioni forzate. Studiamo ora la risposta del sistema ad una forzante armonica $F_0\sin(\Omega t)$ applicata alla massa m_2 (v. fig. A5-3.2).

La forzante è:

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}0\\F_0\sin(\Omega t)\\0\end{pmatrix}, \tag{A5-3.12}$$

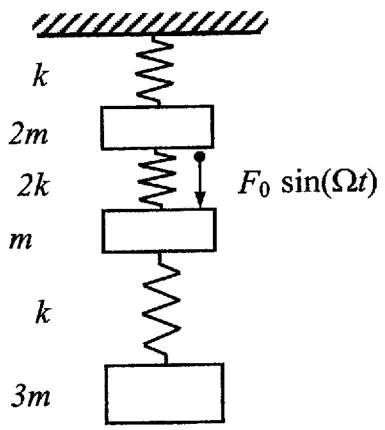

Fig. A5-3.2 – *Sistema con tre gradi di libertà, non smorzato.*

per cui risulta:

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1.3948 \\ 0.6914 \\ -2.4196 \end{pmatrix} F_0 \sin(\Omega t) \tag{A5-3.13}$$

e le equazioni del moto nelle coordinate principali (approccio modale) sono:

$$\begin{aligned} 16.403\ m\,\ddot{q}_1 + 1.7252\ k\,q_1 &= 1.3948\ F_0 \sin(\Omega t) \\ 3.1834\ m\,\ddot{q}_2 + 2.5741\ k\,q_2 &= 0.6914\ F_0 \sin(\Omega t) \\ 8.0062\ m\,\ddot{q}_3 + 31.381\ k\,q_3 &= -2.4196\ F_0 \sin(\Omega t). \end{aligned} \tag{A5-3.14}$$

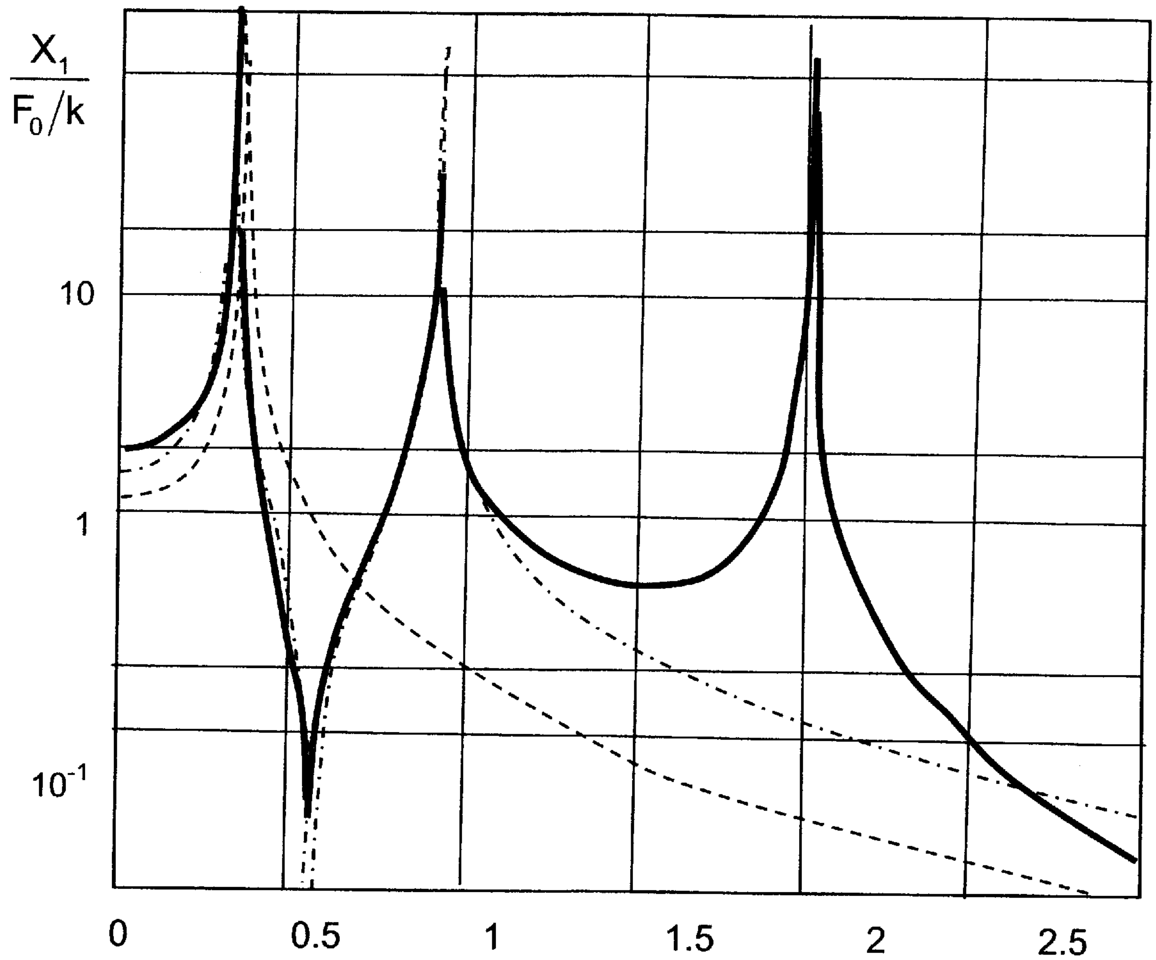

Fig. A5-3.3 – *Risposta del solo primo modo (- - - -), del primo e secondo modo (— · — · -), di tutti e tre i modi (——).*

$$\bar{Q}_j = \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\phi_{\ell j} F_\ell}{k_j - \Omega^2 M_j}$$

$$\bar{q}_j = \bar{Q}_j e^{i\Omega t}$$

Gli integrali delle tre equazioni disaccoppiate (A5-3.14) sono:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= Q_1 \sin(\Omega t), & Q_1 &= \frac{1.3948\ F_0}{1.725\ k - 16.41\ m\,\Omega^2} = \frac{0.8086\,F_0/k}{1-(\Omega/\omega_1)^2},\\
q_2 &= Q_2 \sin(\Omega t), & Q_2 &= \frac{0.6914\ F_0}{2.574\ k - 3.1834\ m\,\Omega^2} = \frac{0.2686\,F_0/k}{1-(\Omega/\omega_2)^2},\\
q_3 &= Q_3 \sin(\Omega t), & Q_3 &= -\frac{2.4186\ F_0}{31.381\ k - 8.006\ m\,\Omega^2} = -\frac{0.0770\,F_0/k}{1-(\Omega/\omega_3)^2}.
\end{aligned}
\qquad \text{(A5-3.15)}
$$

da cui si deduce, per le coordinate fisiche $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi q}$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= X_1 \sin(\Omega t), & X_1 &= \left(\frac{0.8086}{1-(\Omega/\omega_1)^2} + \frac{0.2686}{1-(\Omega/\omega_2)^2} - \frac{0.0770}{1-(\Omega/\omega_3)^2}\right)\frac{F_0}{k},\\
x_2 &= X_2 \sin(\Omega t), & X_2 &= \left(\frac{1.12177}{1-(\Omega/\omega_1)^2} + \frac{0.1857}{1-(\Omega/\omega_2)^2} - \frac{0.1865}{1-(\Omega/\omega_3)^2}\right)\frac{F_0}{k},\\
x_3 &= X_3 \sin(\Omega t), & X_3 &= \left(\frac{1.6478}{1-(\Omega/\omega_1)^2} - \frac{0.1302}{1-(\Omega/\omega_2)^2} - \frac{0.01734}{1-(\Omega/\omega_3)^2}\right)\frac{F_0}{k}.
\end{aligned}
\qquad \text{(A5-3.16)}
$$

Nella figura A5-3.3 sono riportati gli andamenti di X_1 tenendo conto solo del primo modo, solo dei primi due modi e di tutti e tre i modi. Si vede che per valori molto bassi di Ω è sufficiente tenere conto del primo modo, per valori più alti si deve tenere conto anche del secondo modo e per valori elevati occorre mettere in conto tutti e tre i modi propri del sistema.