

Sospensioni di un'autovettura

Esercizio da portare in forma scritta all'esame

In Figura 1 è mostrato lo schema delle sospensioni di un'autovettura a trazione posteriore: le ruote anteriori sono indipendenti fra loro e ciascuna di esse è collegata al telaio tramite la rispettiva sospensione; le ruote posteriore, al contrario, sono collegate fra loro tramite un assale, il quale è a sua volta collegato a telaio tramite due sospensioni. Nota la geometria del veicolo (Figura 2) e tutti i parametri relativi a massa e momento d'inerzia dei diversi componenti, così come i valori di rigidità delle diverse sospensioni considerate (Tabella 1), si determini:

- 1) Frequenza naturale del moto di pompaggio del telaio, ipotizzando un sistema a 1 grado di libertà (gdl).
- 2) Frequenze e modi di vibrare dei moti di pompaggio e beccheggio del telaio, ipotizzando un sistema a 2 gdl.
- 3) Frequenze e modi di vibrare dei moti di pompaggio, beccheggio e rollio del telaio, ipotizzando un sistema a 3 gdl.
- 4) Frequenze e modi di vibrare dei moti di:
 - a. pompaggio, beccheggio e rollio del telaio
 - b. pompaggio e rollio dell'assale posteriore
 - c. pompaggio delle ruote anterioriipotizzando un sistema a 7 gdl.
- 5) Frequenze e modi di vibrare dei moti di:
 - a. pompaggio, beccheggio e rollio del telaio
 - b. pompaggio e rollio dell'assale posteriore
 - c. pompaggio delle ruote anteriori
 - d. pompaggio dei sedili dei 4 passeggeriipotizzando un sistema a 11 gdl.

NOTA: Per la soluzione dei punti 1-2-3, si ipotizzino pneumatici infinitamente rigidi.

Tabella 1. Valori numerici relativi a proprietà d'inerzia e rigidità dei diversi componenti dell'autovettura.

Simbolo	Descrizione	Valore
m	Massa telaio	1130 kg
R_z	Raggio d'inerzia rispetto all'asse baricentrico di beccheggio del telaio	1.27 m
R_y	Raggio d'inerzia rispetto all'asse baricentrico di rollio del telaio	0.80 m
m_r	Massa ruota anteriore	45 kg
m_{ap}	Massa assale posteriore	135 kg
R_{yap}	Raggio d'inerzia rispetto all'asse baricentrico di rollio dell'assale	0.77 m
m_p	Massa di ciascun passeggero	80 kg
k_a	Rigidità sospensioni anteriori	17.5 kN/m
k_b	Rigidità sospensioni posteriori	10.5 kN/m
k_p	Rigidità pneumatici	412 kN/m
k_s	Rigidità sospensioni dei sedili	5.25 kN/m

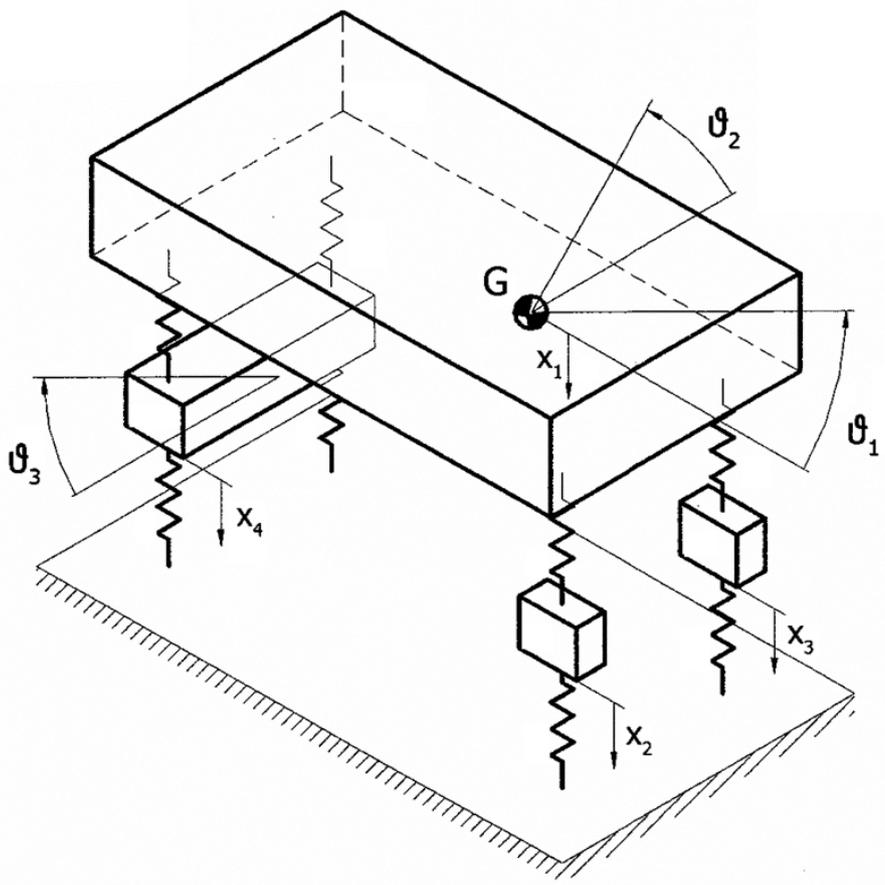
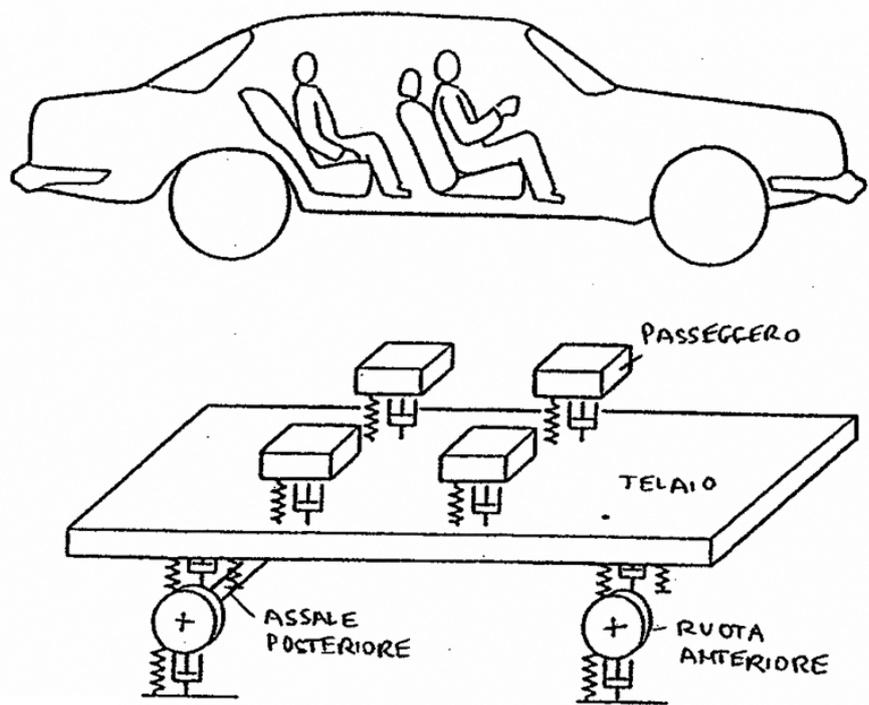
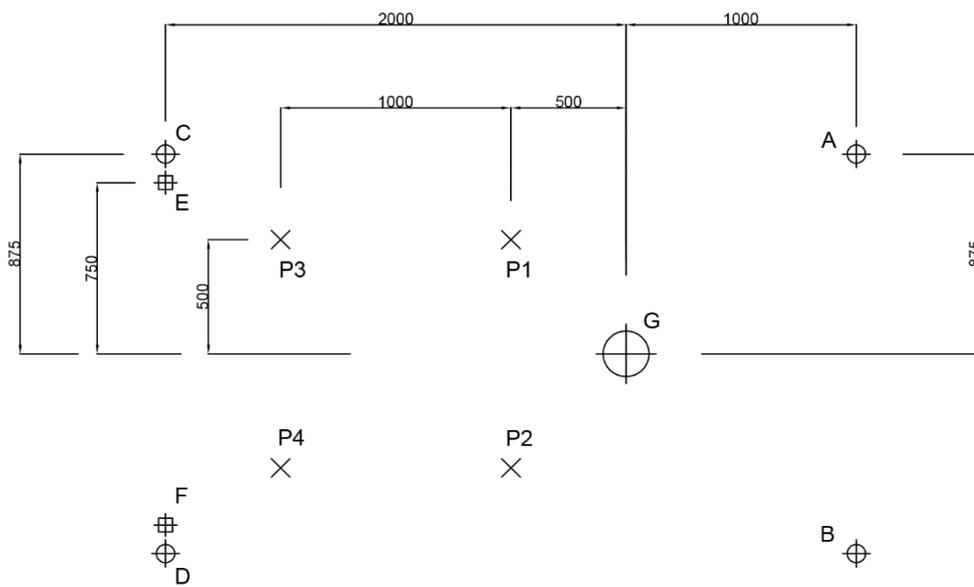


Figura 1. Schema di modellazione del veicolo.



LEGENDA

- G: baricentro telaio
- A,B: ruote e sospensioni anteriori
- C,D: ruote posteriori
- E,F: sospensioni posteriori
- P1,P2,P3,P4: passeggeri

NOTE: tutte le distanze sono espresse in mm.

Figura 2. Posizione di sospensioni, ruote e passeggeri rispetto al baricentro del telaio.

Traccia di soluzione

Domanda 1

Come primo passo, si calcola la massa equivalente del sistema data dalla somma della massa del telaio e quella dei passeggeri:

$$m_{eq} = m + 4m_p$$

La rigidezza equivalente sarà invece:

$$k_{eq} = 2k_a + 2k_b$$

Pertanto, la frequenza naturale del sistema risulta essere:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = 0.9891 \text{ Hz}$$

Domanda 2

Si considerano ora entrambi i moti di pompaggio e beccheggio del telaio; è necessario quindi calcolare il momento d'inerzia del telaio rispetto al beccheggio:

$$J_z = mR_z^2 + 2 \cdot m_p 0.5^2 + 2 \cdot m_p 1.5^2 = 2222.6 \text{ kgm}^2$$

Con il metodo dei coefficienti di influenza, si ricavano le matrici massa e rigidezza:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{eq} & 0 \\ 0 & J_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2(k_a + k_b) & 2(k_b b - k_a a) \\ 2(k_b b - k_a a) & 2(k_a a^2 + k_b b^2) \end{bmatrix}$$

Le due frequenze naturali del sistema risultano pertanto essere:

$$f_1 = 0.977 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 1.175 \text{ Hz}$$

La rispettiva matrice degli autovettori (normalizzati al primo valore unitario) risulta pertanto:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.20 & 3.29 \end{bmatrix}$$

Risulta pertanto che pompaggio e beccheggio sono accoppiati e le forme modali sono date dalla combinazione dei due moti. Tuttavia, calcolando i centri di rotazione, si evidenzia come il primo modo è prevalentemente di pompaggio, mentre il secondo è prevalentemente di beccheggio. Come si può notare, sebbene l'ordine di grandezza del risultato ottenuto è lo stesso del modello a 1gdl.

Domanda 3

Si considerano ora i moti di pompaggio, beccheggio e rollio del telaio; è necessario quindi calcolare il momento d'inerzia del telaio rispetto al rollio:

$$J_y = mR_y^2 + 4 \cdot m_p 0.5^2 = 803.2 \text{kgm}^2$$

Con il metodo dei coefficienti di influenza, si ricavano le matrici massa e rigidezza:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{eq} & 0 & 0 \\ 0 & J_z & 0 \\ 0 & 0 & J_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2(k_a + k_b) & 2(k_b b - k_a a) & 0 \\ 2(k_b b - k_a a) & 2(k_a a^2 + k_b b^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2(k_a c^2 + k_b d^2) \end{bmatrix}$$

Le due frequenze naturali del sistema risultano pertanto essere:

$$f_1 = 0.977 \text{Hz}$$

$$f_2 = 1.005 \text{Hz}$$

$$f_3 = 1.175 \text{Hz}$$

La rispettiva matrice degli autovettori (normalizzati al primo valore unitario) risulta pertanto:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -0.20 & 0 & 3.29 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Risulta pertanto che il primo e terzo modo sono identici al caso a 2gdl e rappresentano le forme modali accoppiate di beccheggio e pompaggio; il moto di rollio, invece, è descritto dal secondo modo. Come si può notare già dalla matrice rigidezza, il rollio è completamente disaccoppiato da pompaggio e beccheggio e ciò risulta ovviamente anche dagli autovettori.

Domanda 4

Consideriamo come primi quattro gradi di libertà le traslazioni di telaio, ruote anteriori e assale posteriore, rispettivamente. Si associano poi i moti di beccheggio e rollio del telaio e rollio dell'assale ai successivi tre gradi di libertà (secondo l'ordine descritto).

Il momento d'inerzia dell'assale rispetto al moto di rollio risulta:

$$J_{yap} = m_{ap} R_{yap}^2$$

Adottando il metodo dei coefficienti di influenza, si ricavano le matrici massa e rigidezza:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{eq} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{ap} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{yap} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2(k_a + k_b) & -k_a & -k_a & -2k_b & 2(k_b b - k_a a) & 0 & 0 \\ -k_a & k_a + k_p & 0 & 0 & k_a a & -k_a c & 0 \\ -k_a & 0 & k_a + k_p & 0 & k_a a & k_a c & 0 \\ -2k_b & 0 & 0 & 2(k_p + k_b) & -2k_b b & 0 & 0 \\ 2(k_b b - k_a a) & k_a a & k_a a & -2k_b b & 2(k_a a^2 + k_b b^2) & 0 & 0 \\ 0 & -k_a c & k_a c & 0 & 0 & 2(k_a c^2 + k_b d^2) & 2k_b d^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_b d^2 & 2(k_p e^2 + k_b d^2) \end{bmatrix}$$

Le frequenze naturali del sistema sono:

$$f_1 = 0.960 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 0.988 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 1.157 \text{ Hz}$$

$$f_4 = 12.59 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 14.26 \text{ Hz}$$

$$f_6 = 15.55 \text{ Hz}$$

$$f_7 = 15.55 \text{ Hz}$$

Gli autovettori sono invece:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0.033 & 1 & -0.181 & -0.037 & 0.0003 & 1 & -394 \\ 0.033 & -1 & -0.181 & -0.037 & -0.0003 & -1 & -394 \\ 0.035 & 0 & +0.146 & -430 & 0 & 0 & 0.015 \\ -0.191 & 0 & +3.408 & 1.309 & 0 & 0 & -0.654 \\ 0 & 27.94 & 0 & 0 & 0.0015 & -0.0033 & 0 \\ 0 & -0.516 & 0 & 0 & 1 & -0.0033 & 0 \end{bmatrix}$$