

PARTE 8 – Misura di vibrazioni e Analisi Modale Sperimentale

LA CATENA DI MISURA

Le misure di vibrazioni possono essere effettuate con mezzi e fini diversi. Ad esempio:

- per vedere se un sistema meccanico rispetta le norme di sicurezza o di igiene del lavoro, se ne rileva il livello di vibrazione;
- per dimensionare le sospensioni di una macchina, si esegue la misura delle azioni eccitriche che nascono nella macchina stessa;
- se si vuole trovare un adeguato modello matematico del sistema meccanico vibrante, si effettua la misura della sua risposta ad una eccitazione nota.

La strumentazione per rilevare le vibrazioni comprende almeno un trasduttore, un amplificatore ed un indicatore. La *catena di misura* più completa è costituita da:

- trasduttore
- pre-amplificatore
- condizionatore di segnale
- convertitore analogico - digitale
- analizzatore di segnale
- altri dispositivi (visualizzatore, stampante, plotter, ...)

In pratica è spesso presente anche un registratore magnetico (ora sostituito spesso dalla memoria del calcolatore), che può essere situato prima o dopo il condizionatore di segnale ed è sempre presente un convertitore analogico-digitale.

Il *trasduttore* ha in uscita un segnale elettrico (in pratica una tensione) proporzionale alla grandezza meccanica da rilevare. Spesso il trasduttore è un accelerometro, per cui in uscita si ha una tensione proporzionale all'accelerazione.

L'*amplificatore* amplifica l'ampiezza del segnale proveniente dall'accelerometro, che è debolissimo. Il segnale viene poi trattato dal *condizionatore di segnale* che compie alcune eventuali operazioni, come il filtraggio, una ulteriore amplificazione, l'integrazione nel tempo, e così via. Il filtraggio si intende in frequenza: il segnale in entrata ha un certo spettro di frequenza, il filtro permette il passaggio solo di certe componenti. Un filtro passa-basso, ad esempio, permette il passaggio delle sole componenti a frequenza più bassa: il risultato del filtraggio è allora il segnale iniziale, in cui sono state eliminate le componenti alle frequenze più alte. L'integrazione permette il passaggio dall'accelerazione alla velocità e/o dalla velocità allo spostamento.

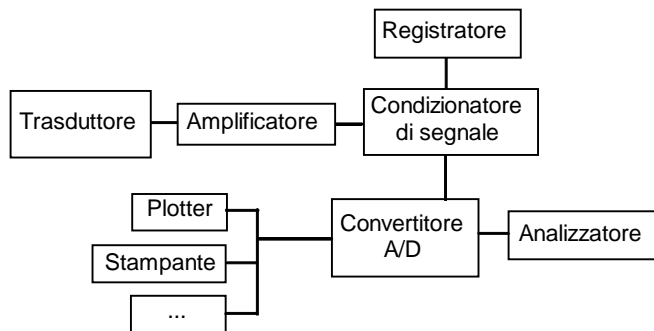


Fig. 8.1 – Catena di misura

Il *convertitore analogico digitale* (A/D) è uno strumento a rigore non indispensabile, ma usualmente presente perché permette di trattare il segnale con un calcolatore: il segnale proveniente dal trasduttore è un segnale "analogico" continuo, il cui andamento è analogo a quello della grandezza misurata; il

convertitore A/D rileva il valore istantaneo del segnale a intervalli regolari di tempo, trasformandolo in un insieme discreto di numeri (segnale "digitale"). In questo modo in uscita si hanno dei numeri che possono essere gestiti ed elaborati da un calcolatore.

L'*analizzatore di segnale* è infatti un computer, dotato di software adatto per elaborare il segnale.

Un altro strumento non indispensabile ma molto utile è il *registratore magnetico*, che permette di conservare i dati sperimentali.

ANALISI IN FREQUENZA

Serie di Fourier

Come è noto, una funzione $x(t)$ periodica di periodo T si può rappresentare mediante la serie di Fourier:

$$x(t) = X_0 + X_1 \cos(2\pi f_1 t + j_1) + X_2 \cos(2\pi 2 f_1 t + j_2) + \dots + X_n \cos(2\pi n f_1 t + j_n),$$

ovvero:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_1 t + j_n)$$

dove:

- f_1 è la frequenza fondamentale (frequenza dell'armonica fondamentale, che ha ampiezza X_1)
- X_0 è il valore medio di $x(t)$
- X_n è l'ampiezza della n -esima armonica, di frequenza $n f_1$
- j_n è la fase della n -esima armonica

Abbiamo riportato la notazione più usata, cioè quella solo in coseno ma, naturalmente, si può trovarla anche solo in seno o in seno e coseno.

Se si ha una funzione periodica, effettuare l'analisi di Fourier significa ricavare le ampiezze X_n e le fasi j_n . Si può pensare di compiere l'analisi di Fourier con un filtro che abbia la caratteristica di lasciar passare solo le componenti comprese tra una certa frequenza f^* e la f^* più un certo incremento. Ricordiamo che il filtro è un circuito elettronico (dato che il segnale è elettrico). In figura è rappresentato un filtro ideale; in realtà è presente una certa dispersione.

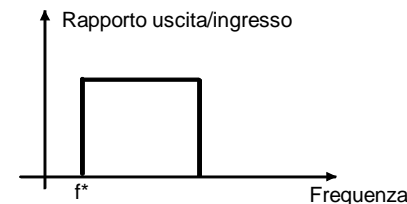


Fig. 8.2 – Filtro ideale

Trasformata di Fourier

Per una funzione $x(t)$ non periodica, con la condizione che l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ del valore assoluto di $x(t)$ sia una quantità finita, al posto della serie si definisce la *Trasformata di Fourier*:

$$X(f) = \mathbf{F}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

La trasformata di Fourier è una funzione complessa, per cui si rappresenta con la parte reale e la parte immaginaria:

$$X(f) = \Re[X(f)] + i\Im[X(f)]$$

oppure mediante modulo e fase: $X(f) = |X(f)|e^{i\Phi(f)}$

in cui: $|X(f)| = \sqrt{\Re[X(f)]^2 + \Im[X(f)]^2}$ $\text{tg}[\Phi(f)] = \frac{\Im[X(f)]}{\Re[X(f)]}$

La $X(f)$ si rappresenta graficamente mediante gli andamenti della parte reale e di quella immaginaria, o di ampiezza e fase in funzione della frequenza.

In realtà, però, il segnale che si ha a disposizione non permette, a rigore, di calcolare la trasformata di Fourier. Infatti ciò che si possiede è un segnale rilevato da un certo istante iniziale fino ad un tempo T^* finito.

Le conseguenze sono che:

- $X(f) = \mathbf{F}\{x(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t)e^{-i2\pi ft} dt$ può non esistere
- se si elabora questo segnale calcolandone la trasformata di Fourier, è come se si considerasse il segnale “prolungato” da $-\infty$ a $+\infty$ prima e dopo l’intervallo di acquisizione T^* . Cioè, è come se il segnale si ripetesse periodicamente, con periodo T^* , per t da $-\infty$ a $+\infty$.

Si deve perciò calcolare in realtà: $X(f, T^*) = \mathbf{F}\{x(t)\} = \int_0^{T^*} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$

chiamata *Trasformata Finita di Fourier*.

In questo modo la funzione che si considera non è più non periodica, ma “periodica” di periodo T^* , definita da $-\infty$ a $+\infty$.

Se si riportano le ampiezze in funzione delle frequenze, si ottiene uno spettro discontinuo, appunto per il fatto che la funzione viene trattata come periodica di periodo T^* .

Lo spettro ha una *risoluzione* (distanza tra due linee contigue): $\Delta f = 1/T^*$

È importante sottolineare che la frequenza Δf non è (in generale) una frequenza del segnale, ma dipende solo dal tempo di acquisizione T^* . Non è detto che tale frequenza, o qualcuno dei suoi multipli, siano effettivamente presenti nel segnale.

Supponiamo, ad esempio, di avere una struttura che vibra: essa avrà una certa frequenza f_I del primo modo, f_{II} del secondo modo e così via. Se si rileva il segnale mettendo il trasduttore sulla struttura, tali frequenze saranno presenti nel segnale. Se si rileva il segnale per un tempo T^* , nello spettro compaiono componenti alle frequenze pari ad un multiplo intero della frequenza fondamentale $\Delta f = 1/T^*$. Di regola succederà che f_I e f_{II} non siano dei multipli di Δf : nello spettro si trova allora solo un “addensamento” attorno a tali valori.

In corrispondenza delle componenti f_I e f_{II} , che non si ritrovano perché hanno una frequenza che non esiste sullo spettro discreto, compaiono allora delle componenti a frequenze vicine (vedi figura 8.3), la cui energia totale coincide con quella delle componenti f_I e f_{II} .

Questo fenomeno è detto *leakage* (dispersione): poiché si rileva la funzione in un tempo T^* finito, cioè guardando il segnale attraverso una finestra rettangolare, le frequenze effettivamente presenti si “disperdono” nelle frequenze prossime ad esse, ma sempre multiple di $\Delta f = 1/T^*$.

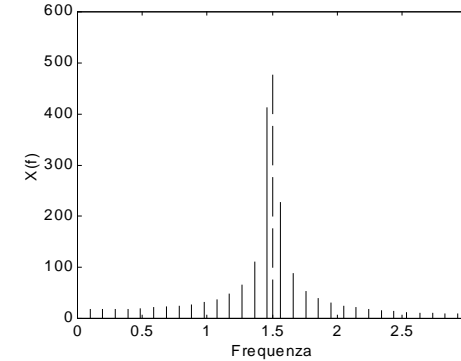


Fig. 8.3 – Dispersione

Per diminuire la dispersione si utilizzano *finestre* di forma diversa; uno dei tipi più usati è la finestra Hanning, che ha la proprietà di annullare il segnale all’inizio e alla fine dell’acquisizione, per cui si elimina la discontinuità che altrimenti si avrebbe all’inizio del periodo. Utilizzando le finestre si ottengono degli spettri più vicini alla realtà rispetto alla finestra rettangolare, che dà spettri più dispersi.

CAMPIONAMENTO

È possibile analizzare il segnale con un computer se è presente nella catena di misura un convertitore A/D che lo trasforma in una serie di numeri. L’operazione viene chiamata *campionamento*: ad intervalli regolari di tempo il convertitore legge il valore istantaneo del segnale.

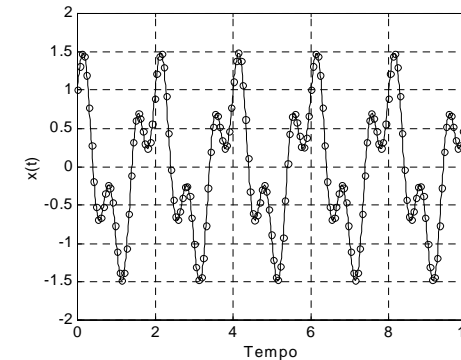


Fig. 8.4 – Campionamento

All'uscita dal convertitore A/D non si ha più un segnale continuo ma un segnale discreto. L'intervallo di tempo Δt_c tra due acquisizioni successive è detto *intervallo di campionamento*; il suo inverso $f_c = 1/\Delta t_c$ è detto *frequenza di campionamento*. Il campionamento permette un'analisi del segnale veloce e sofisticata, ma occorre che la f_c sia adeguata per non alterare il segnale.

ALIASING

Supponiamo che il segnale sia sinusoidale: effettuandone il campionamento con una f_c troppo bassa, il segnale viene interpretato come un segnale a frequenza più bassa. Qualsiasi analisi successiva dà allora risultati errati, perché è fatta su un segnale diverso da quello effettivo. Questo fenomeno è detto *aliasing* (alterazione). Per evitare l'aliasing deve essere soddisfatto il *Teorema di Shannon* o del campionamento, secondo il quale deve essere:

$$f_c \geq 2 f_{max} \quad \text{essendo } f_{max} \text{ la più alta frequenza contenuta nel segnale.}$$

Dato che non si conosce a priori il contenuto in frequenza del segnale da analizzare, affinché sia soddisfatta tale condizione bisogna usare un *filtro antialiasing* (AA), che è un filtro passa-basso che lascia passare solo le componenti con frequenza inferiore alla frequenza massima di interesse f_{max} . La frequenza di campionamento dovrà essere non inferiore a $2 f_{max}$. Solitamente si assume $f_c = 2.5 f_{max}$.

Valgono le seguenti relazioni:
$$T^* = N \cdot \Delta t_c = N \frac{1}{f_c} = \frac{1}{\Delta f}$$

in cui:

- Δf è la risoluzione dello spettro
- f_c è la frequenza di campionamento, che in pratica vale 2.5 volte la massima frequenza di interesse
- T^* è il tempo di acquisizione
- Δt_c è l'intervallo di campionamento
- N è il numero di campioni

In Appendice A1 è riportato un esempio di scelta dei parametri di acquisizione.

TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER

Ritornando all'analisi di Fourier, nel caso di un segnale campionato si parla di *trasformata discreta di Fourier* (DFT), perché l'analisi viene effettuata su una funzione discreta (segnale campionato):

$$X(k \Delta f) = \Delta t_c \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}$$

dove:

- x_n è il generico valore n -esimo di $x(t)$, cioè $x(t) = x(n \Delta t_c)$
- $X(k \Delta f)$ rappresenta il termine k -esimo dello spettro di $x(t)$
- N è il numero di campioni, cioè il numero di valori di $x(t)$ rilevati a intervalli regolari Δt_c
- k è l'ordine dell'armonica, che va da 0 a $(N-1)/2$.

Se il numero di campioni elaborati è una potenza di 2, il calcolo viene effettuato con algoritmi chiamati FFT (*Fast Fourier Transform*), che velocizzano l'operazione (sono da 100 a 200 più veloci della procedura normale) e consentono di avere la trasformata di Fourier in tempo reale.

INTRODUZIONE ALL'ANALISI MODALE SPERIMENTALE

L'analisi modale è un procedimento sperimentale per l'identificazione dei sistemi mediante la determinazione di:

- FREQUENZE PROPRIE
- SMORZAMENTI
- MODI DI VIBRARE

L'analisi modale viene usualmente eseguita per mezzo della FUNZIONE RISPOSTA IN FREQUENZA.

L'analisi modale è impiegata soprattutto per

- VALIDARE MODELLI A PARAMETRI CONCENTRATI O AD ELEMENTI FINITI
- EFFETTUARE MODIFICHE STRUTTURALI
-

Le ipotesi fondamentali alla base dell'analisi modale sono:

- SISTEMA LINEARE
- SISTEMA TEMPORINVARIANTE
- SISTEMA OSSERVABILE

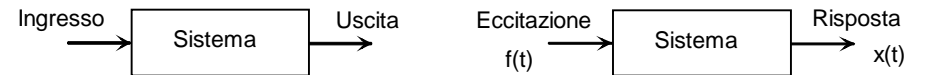
FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E FUNZIONE RISPOSTA IN FREQUENZA

Consideriamo un sistema *ideale* ossia quel sistema che ha *parametri costanti* ed è *lineare* tra due punti di interesse chiaramente definiti, detti ingresso o punto di eccitazione e uscita o punto di risposta.

Un sistema ha parametri costanti se tutte le proprietà fondamentali del sistema sono invarianti rispetto al tempo. Un sistema si dice *lineare* se le caratteristiche della risposta sono additive ed omogenee. Il termine *additivo* significa che l'uscita corrispondente alla somma di più ingressi è uguale alla somma delle uscite prodotte da ciascun ingresso individualmente. Il termine *omogeneo* significa che l'uscita prodotta da un ingresso moltiplicato per una costante è uguale alla costante per l'uscita prodotta dal solo ingresso.

L'ipotesi relativa alla costanza dei parametri è ragionevolmente valida per molti sistemi fisici. L'ipotesi di linearità per i sistemi reali è, in qualche modo, più critica. Tutti i sistemi fisici manifestano caratteristiche di risposta non lineari in condizioni di eccitazione estreme. Ciononostante, per molti sistemi fisici è lecito assumere l'ipotesi di linearità, almeno per campi di valori limitati dell'ingresso, senza commettere errori significativi.

Un sistema può essere identificato con l'uscita che corrisponde ad una determinata entrata. Nel caso di sistemi meccanici è più comune parlare di eccitazione e di risposta:



Le caratteristiche di un sistema lineare a parametri costanti possono essere descritte dalla *funzione risposta all'impulso unitario* $h(t)$, che viene definita come la risposta del sistema in dato istante t ad un impulso unitario applicato all'istante $t-t$. L'utilità della funzione risposta all'impulso unitario deriva dal fatto che la risposta $x(t)$ di un sistema ad un ingresso arbitrario $f(t)$ è data dall'*integrale di convoluzione*:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h(t-t) dt$$

o, con un semplice cambio di variabili:
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t) h(t) dt$$

Un sistema lineare a parametri costanti può anche essere caratterizzato dalla *funzione di trasferimento* $H(s)$, che è definita come la trasformata di Laplace della $h(t)$:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad s = \sigma + j\omega.$$

Le caratteristiche dinamiche del sistema possono essere descritte anche dalla *funzione risposta in frequenza* $H(\omega)$ (FRF), che è definita come la trasformata di Fourier della $h(t)$:

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

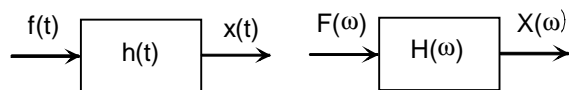
La funzione risposta in frequenza è semplicemente un caso particolare della funzione di trasferimento dove, nell'esponente $s = \sigma + j\omega$ si ha $\sigma = 0$.

Per sistemi fisici la funzione risposta in frequenza può sostituire la funzione di trasferimento senza alcuna perdita di informazione.

Una importante proprietà della funzione risposta in frequenza dei sistemi lineari a parametri costanti può essere evidenziata operando la trasformata di Fourier su entrambi i membri dell'integrale di convoluzione:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t)f(t-t)dt \right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)f(t-t)dt \right) e^{-j\omega(t+t-t)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t)e^{-j\omega(t-t)} d(t-t) = \\ &= H(\omega)F(\omega) \end{aligned}$$

dove $X(\omega)$ e $F(\omega)$ sono, rispettivamente, le trasformate di Fourier dell'uscita e dell'ingresso. Come si vede, nel dominio delle frequenze l'integrale di convoluzione si riduce ad una semplice espressione algebrica.



La FRF di un sistema è dunque il rapporto fra le trasformate di Fourier (FT) della risposta e dell'eccitazione:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)}$$

In appendice A2 è riportato un esempio di funzione di trasferimento e di FRF per un sistema ad un gdl.

Nella pratica, per diminuire gli errori di misura, si impiegano degli stimatori della FRF effettuando la media di più misure (vedi Appendice A3).

RILIEVO SPERIMENTALE DELLA FRF

Teoricamente, per rilevare la FRF H_{lm} di una struttura, occorre:

- * eccitare la struttura nel punto l con una forza sinusoidale di ampiezza e frequenza nota;
- * rilevare la vibrazione della struttura nel punto m ;
- * valutare il modulo $|H_{lm}|$ della FRF come rapporto del modulo della risposta diviso quello della forzante, e la fase $\angle H_{lm}$ come differenza fra la fase della risposta e quella della forzante;
- * ripetere l'operazione facendo variare ogni volta il valore della frequenza della forzante.

La risposta può essere costituita dallo spostamento, dalla velocità o dall'accelerazione rilevati nel punto m .

In realtà, non occorre eseguire l'operazione per ogni singola frequenza. Basta eccitare nel punto l con una eccitazione che abbia adeguato contenuto in frequenza in tutto il campo che interessa: rilevate sperimentalmente l'eccitazione e la risposta, se ne calcolano le trasformate di Fourier e si calcola poi il rapporto di tali trasformate, che è la FRF cercata.

Definizioni

INGRESSO	USCITA	FRF	1/FRF
Forza	Accelerazione	Inertanza	Massa apparente
	Velocità	Mobilità	Impedenza
	Spostamento	Ricettanza	Rigidità dinamica

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTÀ E SISTEMI CONTINUI

Sistemi a N gdl

Un sistema con N gradi di libertà si può studiare come se fosse costituito da N sistemi con un singolo gdl.

Ad ogni modo corrispondono:

- * una pulsazione propria
- * uno smorzamento modale
- * una forma modale

Se in un punto del sistema con N gdl si applica una forzante sinusoidale $f(t) = F_0 \cos \omega t$, tutto il sistema vibra con pulsazione ω ; le ampiezze (e le fasi) delle risposte dipendono da ω ; si hanno N condizioni di risonanza.

La risposta del sistema viene descritta mediante funzioni risposta in frequenza (FRF):

$$H_{ij} = \frac{\text{risposta in "i"}}{\text{eccitazione in "j"}}$$

La FRF presenta n picchi di risonanza. La FRF del sistema è la "somma" delle FRF dei singoli modi propri.

Sistemi continui

Un sistema continuo ha infiniti gradi di libertà e infiniti modi propri, cioè infinite pulsazioni proprie e infinite forme modali.

Però, le pulsazioni proprie sono distinte e costituiscono pertanto una infinità discreta; inoltre al di sopra di una certa frequenza, i modi di vibrare non hanno più senso fisico e, comunque, non vengono mai eccitati.

Quando ad un sistema continuo si applica una forzante armonica:

* il sistema vibra con la stessa pulsazione della forzante,

* tutti i punti si muovono in fase fra loro ma con un certo sfasamento rispetto alla forzante.

Se siamo interessati al comportamento del sistema fino ad una certa pulsazione ω_m , è sufficiente che teniamo conto solo dei modi propri - siano r - con pulsazione non superiore ad ω_m .

Il moto libero generale è dato dalla somma dei primi r modi propri.

Anche la risposta del sistema ad una forzante di pulsazione inferiore ad ω_m è dato dalla somma delle risposte degli r sistemi ad un solo gdl, corrispondenti ai primi r modi propri.

Un sistema continuo può essere modellato con un sistema discreto, con un numero finito di gdl, ad esempio:

* con un modello modale (MM),

* con un modello a parametri concentrati (PC),

* con un modello a elementi finiti (EF).

Il *modello modale* è costituito da tanti sistemi ad un solo gdl quanti sono i modi che si vogliono mettere in conto. Il modello modale rappresenta bene il sistema per frequenze inferiori alla massima presente nel modello, cioè a quella del modo più alto.

FONDAMENTI ANALITICI DELL'ANALISI MODALE

Per effettuare l'analisi modale, si sceglie sulla struttura in esame un certo numero di punti, tali da definire adeguatamente la geometria della struttura e le sue forme modali.

Si eccita in un punto e si rilevano le risposte negli altri punti; oppure si rileva la risposta in un punto e si eccita in corrispondenza degli altri punti.

L'eccitazione ed il rilievo vengono effettuati in un intervallo $w_{min} \div w_{max}$ (di solito è $w_{min} \gg 0$): gli N modi rilevati sono tutti e solo quelli interni a tale intervallo.

Siano n_m i punti scelti sulla struttura e a questi si facciano corrispondere altrettanti gradi di libertà.

Scriviamo l'equazione del moto di un sistema a n_m gdl: $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\}$

Eccitando nel grado di libertà k : $\{f(t)\} = \{0, 0, \dots, F_k, 0, \dots, 0\}^T \cdot e^{i\omega t}$

e introducendo le coordinate modali: $\{x\} = [\Phi] \cdot \{q\}$

dove la matrice modale è in generale rettangolare, ($n_m \times N$), si ottiene:

$$[M] \cdot [\Phi] \cdot \{\ddot{q}\} + [K] \cdot [\Phi] \cdot \{q\} = \{f(t)\}$$

e premoltiplicando per $[\Phi]^T$: $[M]_p \{\ddot{q}\} + [K]_p \cdot \{q\} = [\Phi]^T \cdot \{f(t)\}$

Se si normalizzano gli autovettori rispetto alla matrice massa, la generica r -esima equazione è:

$$\ddot{q}_r + w_r^2 \cdot q_r = X_{kr} \cdot F_k \cdot e^{i\omega t}$$

Scritta la soluzione nella forma: $q_r = Q_r \cdot e^{i\omega t}$

si ha: $-w^2 Q_r e^{i\omega t} + w_r^2 Q_r e^{i\omega t} = X_{kr} \cdot F_k \cdot e^{i\omega t}$ da cui: $Q_r = \frac{X_{kr} \cdot F_k}{w_r^2 - w^2}$

ed infine: $q_r = \frac{X_{kr} \cdot F_k}{w_r^2 - w^2} \cdot e^{i\omega t}$.

Si ottiene pertanto: $x_l(t) = \sum_{r=1}^N \frac{X_{lr} \cdot X_{kr} \cdot F_k}{w_r^2 - w^2} \cdot e^{i\omega t}$ od anche: $x_l(t) = X_l(w) e^{i\omega t}$

Si può scrivere: $a_{lk}(w) = \frac{X_l(w)}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{X_{lr} \cdot X_{kr}}{w_r^2 - w^2}$

che rappresenta il rapporto tra l'ampiezza della vibrazione della coordinata l e l'ampiezza della forza impressa alla coordinata k .

Se il sistema è smorzato, l'equazione del moto assume la forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\}$$

Se lo smorzamento è proporzionale, tutto il procedimento svolto per il sistema non smorzato può venire ripetuto; si perviene così alla seguente espressione:

$$x_l(t) = \sum_{r=1}^N \frac{X_{lr} \cdot X_{kr} \cdot F_k}{(w_r^2 - w^2) + i \cdot (2z_r w w_r)} \cdot e^{i\omega t} \quad x_l(t) = X_l(w) e^{i\omega t}$$

E si può scrivere: $a_{lk}(w) = \frac{X_l(w)}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{X_{lr} \cdot X_{kr}}{(w_r^2 - w^2) + i \cdot (2z_r w w_r)}$

ESTRAZIONE DELLE FORME MODALI: METODO DEL SISTEMA AD UN SOLO GDL (METODO SDOF)

L'espressione del generico $a_{lk}(w)$ mostra che esso è funzione di w , e che per ogni valore di w è somma di termini relativi a tutti gli N modi di vibrare del sistema. Mettendo in evidenza il contributo di un particolare modo s -esimo, scriviamo l'espressione di a_{lk} nella forma:

$$a_{lk}(w) = \frac{X_{ls} \cdot X_{ks}}{(w_s^2 - w^2) + i \cdot (2z_s w w_s)} + \sum_{r=1(r \neq s)}^N \frac{X_{lr} \cdot X_{kr}}{(w_r^2 - w^2) + i \cdot (2z_r w w_r)}$$

Nell'ipotesi (non sempre accettabile) che quando $w = w_s$ i contributi degli altri modi siano trascurabili rispetto a quelli del modo s -esimo, possiamo scrivere:

$$a_{lk}(w) = \frac{X_{ls} \cdot X_{ks}}{2iz_s w_s^2} \quad \text{Ponendo } k = l, \text{ si ricava } X_{ls}: \quad X_{ls} = w_s \sqrt{2z_s \cdot |a_{ll}(w_s)|}$$

e successivamente X_{ks} : $X_{ks} = \frac{2z_s w_s^2 \cdot |a_{lk}(w)|}{X_{ls}}$ cioè le forme modali.

SCHEMA DEL PROCEDIMENTO

1. Si scelgono i vincoli della struttura: se possibile, si preferiscono di solito vincoli molto cedevoli, a cui corrispondono moti di corpo rigido a frequenze molto basse, che non interferiscono con i modi di vibrare della struttura.
2. Si scelgono i punti (e quindi i corrispondenti n_m gradi di libertà) sulla struttura.
3. Si eccita in un punto (ad es. con uno *shaker elettrodinamico*) e si rilevano (ad es. con accelerometri) le risposte negli altri punti; oppure si rileva la risposta in un punto (ad es. con un accelerometro) e si eccita (ad es. con un martello strumentato) in corrispondenza di tutti gli altri punti.
4. L'eccitazione ed il rilievo vengono effettuati in un intervallo w_{min} , w_{max} (di solito è $w_{min} \gg 0$): i modi rilevati sono tutti e solo quelli interni a tale intervallo.
5. Si trovano così n_m FRF.
6. Su ciascuna delle FRF così ottenute sono presenti N picchi, corrispondenti alle N pulsazioni proprie comprese nell'intervallo w_{min} , w_{max} considerato, salvo l'eventuale presenza di nodi: se un gdl l cade in corrispondenza di un nodo del modo s , nella relativa FRF il picco in corrispondenza di w_s non compare.
7. Si possono così ricavare, con la semplice osservazione dei picchi di risonanza ("peak picking"), le N pulsazioni proprie del sistema nell'intervallo di interesse.
8. Nell'intorno di ogni pulsazione naturale w_s , trattando il sistema come se fosse ad un solo gdl, si ricava il coefficiente di smorzamento ζ_s (per esempio con il metodo della banda di mezza potenza).
9. Con il metodo del sistema ad un solo grado di libertà (*SDOF*), si ricavano infine X_{ls} e X_{ks} :

$$X_{ls} = w_s \sqrt{2\zeta_s \cdot |a_{lk}(w_s)|} \qquad X_{ks} = \frac{2\zeta_s w_s^2 \cdot |a_{lk}(w)|}{X_{ls}}$$

È opportuno mettere bene in evidenza che:

- * il numero di modi che si prendono in considerazione dipende solo dal campo di frequenza;
- * il numero e la posizione dei punti di rilievo vanno scelti in modo da rappresentare in modo accurato e corretto le forme modali della struttura.

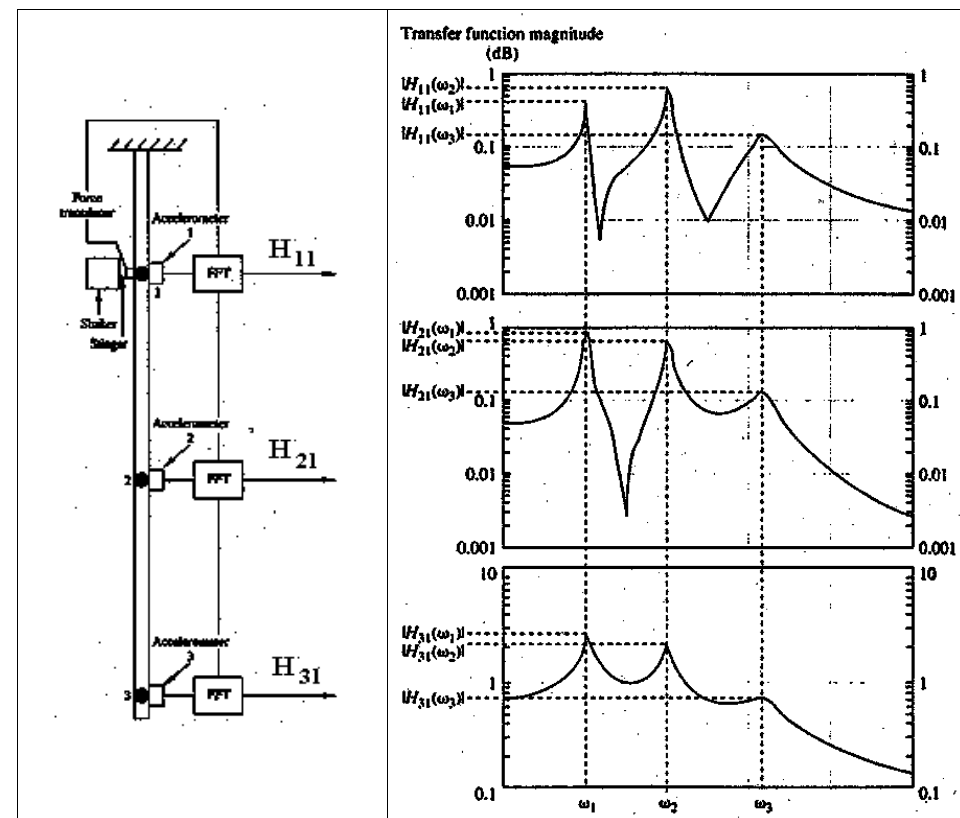
Esempio

La figura illustra sommariamente l'attrezzatura ed il procedimento: la mensola viene eccitata nel punto 1, gli accelerometri A_1, A_2, A_3 rilevano le risposte nei punti 1, 2, 3 e l'analizzatore di segnale calcola le tre FRF H_{11}, H_{21}, H_{31} .

I picchi delle FRF individuano le *frequenze proprie*.

L'acutezza delle FRF in corrispondenza di ciascuna frequenza propria permette di valutare il corrispondente *smorzamento*.

Le ampiezze e le fasi delle tre FRF in corrispondenza di ciascuna frequenza propria permettono di determinare la corrispondente *forma modale*.



BIBLIOGRAFIA

- * S.S. Rao, Mechanical vibrations, Third edition, Addison Wesley Pub. Company, 1995.
- * D.J. Inman, Engineering Vibration, Prentice Hall, 1994.

APPENDICE A1 – Scelta dei Parametri di acquisizione

Individuata la frequenza di interesse (f_{utile}) si sceglie la FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO.
 Per evitare il fenomeno dell'aliasing deve essere: $f_{\text{camp}} \geq 2 f_{\text{utile}}$ (teorema di Shannon)
 Nella pratica: $f_{\text{camp}} \geq 2.5 f_{\text{utile}}$ (per tener conto dell'imperfezione del filtro anti-aliasing)

La RISOLUZIONE dello spettro è pari a: $\Delta f = 1/T^*$ $T^* = \text{PERIODO DI ACQUISIZIONE}$
 $\Delta f = \text{distanza tra due linee spettrali}$
 Se Δf risulta "piccolo" si parla di elevata RISOLUZIONE dello spettro.

Scelte la frequenza di campionamento e la risoluzione, il NUMERO DI CAMPIONI risulta:
 $N = T^* / \Delta t$ $\Delta t = 1 / f_{\text{camp}}$ $\Delta t = \text{TEMPO DI CAMPIONAMENTO}$
 $N = T^* f_{\text{camp}}$ Generalmente il numero N di campioni deve essere potenza di 2 (per poter usare l'algoritmo veloce FFT).

Esempio

Si vogliono rilevare le frequenze proprie di un sistema libero-libero nel range 0-3000 Hz.
 Da uno studio preliminare (eseguito utilizzando, per esempio, il metodo degli elementi finiti) tali frequenze risultano essere le seguenti:

$f_1 = 800 \text{ Hz}$ $f_2 = 1300 \text{ Hz}$ $f_3 = 1500 \text{ Hz}$ $f_4 = 2300 \text{ Hz}$ $f_5 = 2315 \text{ Hz}$ $f_6 = 2800 \text{ Hz}$

Fissiamo innanzitutto la frequenza di campionamento. Per evitare il fenomeno dell'aliasing deve essere:

$f_{\text{camp}} \geq 2.5 f_{\text{utile}}$ $f_{\text{utile}} = 3000 \text{ Hz}$ $\implies f_{\text{camp}} \geq 2.5 * 3000 = 7500 \text{ Hz}$

La distanza tra due linee spettrali adiacenti della Trasformata Finita di Fourier è pari a:

$\Delta f = 1/T^*$ $T^* = \text{periodo di acquisizione}$

Dal momento che la quarta e la quinta frequenza differiscono tra loro di 15 Hz, è necessario che la risoluzione dello spettro sia piuttosto alta (Δf sufficientemente piccolo).

Imponiamo che sia: $\Delta f = 2 \text{ Hz}$ $\implies T^* = 1/\Delta f = 0.5 \text{ s}$

A questo punto calcoliamo il numero di campioni che sono contenuti in 0.5 secondi:

$N = T^* / \Delta t$ $\Delta t = 1/f_{\text{camp}}$ $N = T^* f_{\text{camp}} = 3750$

Perché possa essere eseguita la FFT (Fast Fourier Transform) il numero N di campioni deve necessariamente essere potenza di 2.

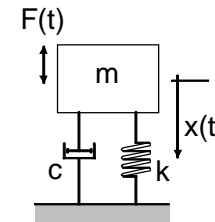
Scegliamo quindi il primo numero potenza di 2 superiore a 3750: $N = 4096$

A questo punto abbiamo due possibilità:

Manteniamo la risoluzione	$\Delta f = 2 \text{ Hz}$	Manteniamo la frequenza di campionamento
Numero di campioni	$N = 4096$	$f_{\text{camp}} = 7500 \text{ Hz}$
Durata dell'acquisizione	$T^* = 0.5 \text{ s}$	
Frequenza di campionamento		Numero di campioni $N = 4096$
$f_{\text{camp}} = N / T = 8192 \text{ Hz}$		Durata dell'acquisizione $T^* = N / f_{\text{camp}} = 0.546 \text{ s}$
Frequenza utile		Risoluzione dello spettro $\Delta f = 1 / T^* = 1.831 \text{ Hz}$
$f_{\text{utile}} = f_{\text{camp}} / 2.5 = 3276.8 \text{ Hz}$		Frequenza utile $f_{\text{utile}} = f_{\text{camp}} / 2.5 = 3000 \text{ Hz}$

APPENDICE A2 – Funzione Risposta in Frequenza e Funzione di Trasferimento

Modello del sistema:



Equazione del moto
 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$

Forzante armonica
 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

Risposta a regime
 $x = X_0 \cos(\omega t - y)$

Introducendo la Trasformata di Laplace, l'equazione del moto delle vibrazioni forzate si scrive:

$L\{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx\} = L\{f(t)\}$ o anche, posto: $X(s) = L\{x(t)\}$ e $F(s) = L\{f(t)\}$

$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s) + [-msx(0) - m\dot{x}(0) - cx(0)]$

ovvero, se le condizioni iniziali sono tutte nulle: $(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s)$

Si scrive anche: $X(s) = H(s) F(s)$

dove: $H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$ è la **funzione di trasferimento** del sistema.

Nella pratica, si impiega la Trasformata di Fourier, il che significa che in luogo della variabile $s = \sigma + i\omega$ si usa la variabile $i\omega$.

Pertanto in luogo della **funzione di trasferimento** si introduce la **funzione risposta in frequenza (FRF)**:

$H(i\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} = \frac{1/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + i2z \frac{\omega}{\omega_n}}$ dove: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $z = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n}$

La funzione risposta in frequenza può venire *misurata sperimentalmente*.

Trattandosi di una funzione complessa, si rappresenta con parte reale e parte immaginaria oppure con modulo e fase.

$|H(i\omega)| = \frac{1/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$ $tgY = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2z \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$

Valgono infine le seguenti:

$\frac{X_0}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$ $tgY = \frac{2z \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$

APPENDICE A3 – Stima sperimentale della FRF

AUTOCORRELAZIONE (AUTOCORRELATION)

L'autocorrelazione $R_{xx}(\tau)$ di una funzione $x(t)$ indica quanto la funzione stessa è correlata con sé stessa. La definizione è:

$$R_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+t)dt$$

L'autocorrelazione di una funzione periodica è periodica. L'autocorrelazione di una funzione casuale tende a zero per $\tau \neq 0$.

La trasformata di Fourier di $R_{xx}(\tau)$ è detta *densità di potenza spettrale* (PSD) o *densità di autospettro* (ASD) e si indica di solito con $S_{xx}(\omega)$:

$$S_{xx}(\omega) = \mathbf{F}\{R_{xx}(t)\}$$

La funzione $S_{xx}(\omega)$ è legata alla trasformata di Fourier di $x(t)$ dalla relazione:

$$S_{xx}(\omega) = X^*(\omega)X(\omega) = |X(\omega)|^2$$

dove il simbolo * indica il complesso coniugato.

La funzione $S_{xx}(\omega)$ è reale e contiene le informazioni sulle frequenze presenti in $x(t)$, ma non quelle sulle fasi.

Per diminuire gli errori di misura, si effettua la media di più misure:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k^*(\omega)X_k(\omega)$$

CORRELAZIONE INCROCIATA (CROSS-CORRELATION)

La *correlazione incrociata* $R_{xy}(\tau)$ di due funzioni $x(t)$, $y(t)$ indica quanto le due funzioni sono correlate fra loro. La definizione è:

$$R_{xy}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+t)dt$$

La trasformata di Fourier di $R_{xy}(\tau)$ è detta *densità di spettro incrociato* (CSD) e si indica di solito con $S_{xy}(\omega)$:

$$S_{xy}(\omega) = \mathbf{F}\{R_{xy}(t)\}$$

La funzione $S_{xy}(\omega)$ è legata alle trasformate di Fourier di $x(t)$ e di $y(t)$ dalla relazione:

$$S_{xy}(\omega) = X^*(\omega)Y(\omega)$$

La funzione $S_{xy}(\omega)$ è una funzione complessa e contiene informazioni sulle frequenze e sulle fasi; inoltre risulta:

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}^*(\omega)$$

Per diminuire gli errori di misura, si effettua la media di più misure:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k^*(\omega)Y_k(\omega)$$

STIMA DELLA FRF

Se $f(t)$ è l'eccitazione e $x(t)$ è la risposta del sistema, la FRF si definisce come rapporto delle loro trasformate di Fourier:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)}$$

Per diminuire gli errori di misura, si impiegano degli *stimatori* della FRF effettuando la media di più misure.

Stimatore H_1 :

$$H(\omega) = \frac{F^*(\omega)X(\omega)}{F^*(\omega)F(\omega)} = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} = H_1(\omega)$$

Lo stimatore H_1 riduce gli effetti dei disturbi all'uscita.

Stimatore H_2 :

$$H(\omega) = \frac{X^*(\omega)X(\omega)}{X^*(\omega)F(\omega)} = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)} = H_2(\omega)$$

Lo stimatore H_2 riduce gli effetti dei disturbi all'ingresso.

In assenza di errori di misura, sarebbe $H_1(\omega) = H_2(\omega)$.

Per giudicare l'attendibilità della misura si può usare la *funzione coerenza* γ^2 che indica quanto la risposta è coerente con l'eccitazione:

$$g^2(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} = \frac{|S_{fx}(\omega)|^2}{S_{ff}(\omega)S_{xx}(\omega)}; \quad \text{risulta: } 0 \leq g^2 \leq 1.$$

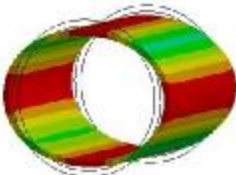
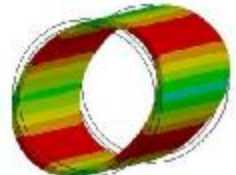
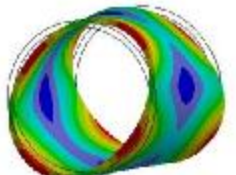
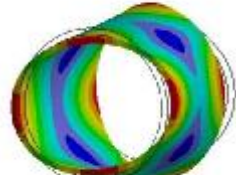


Se $\gamma^2 < 0.75$, i risultati sono poco attendibili, cioè il rapporto segnale/rumore è basso.

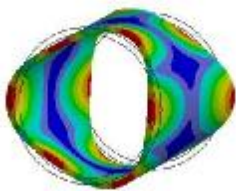
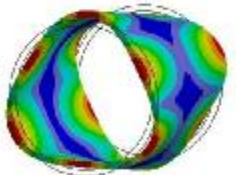

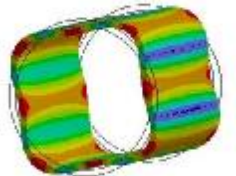
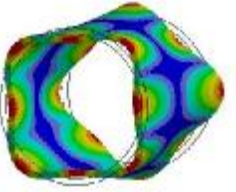
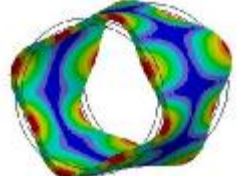
Altre cause che danno luogo a bassi valori della coerenza sono le seguenti:

- * sono presenti altre eccitazioni che però non vengono misurate
- * il sistema presenta delle non linearità

APPENDICE A4 – Prova sperimentale no.1

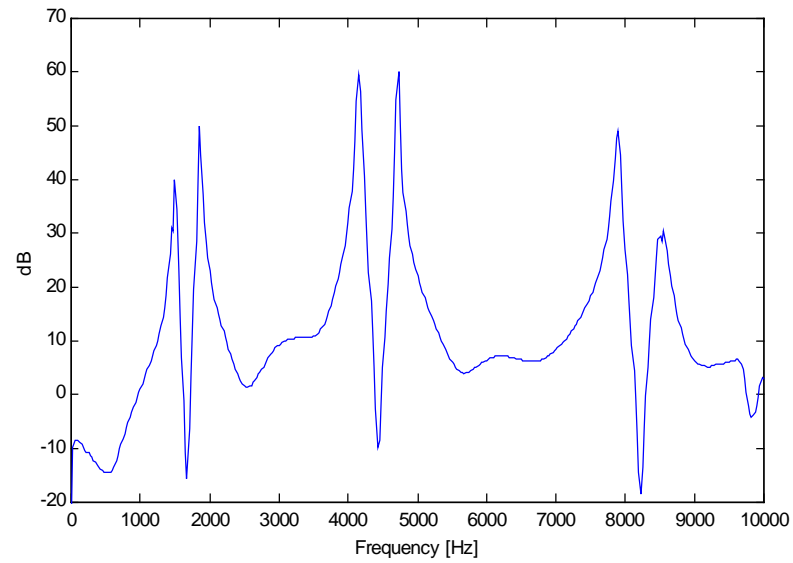
Si vogliono misurare le frequenze naturali di un tratto di tubo a sezione circolare.
Una prima indagine con il metodo degli elementi finiti ha portato al risultato sintetizzato nella tabella seguente.

Modo	Modo	Frequenza naturale [Hz]
		1470
		1800
		4200

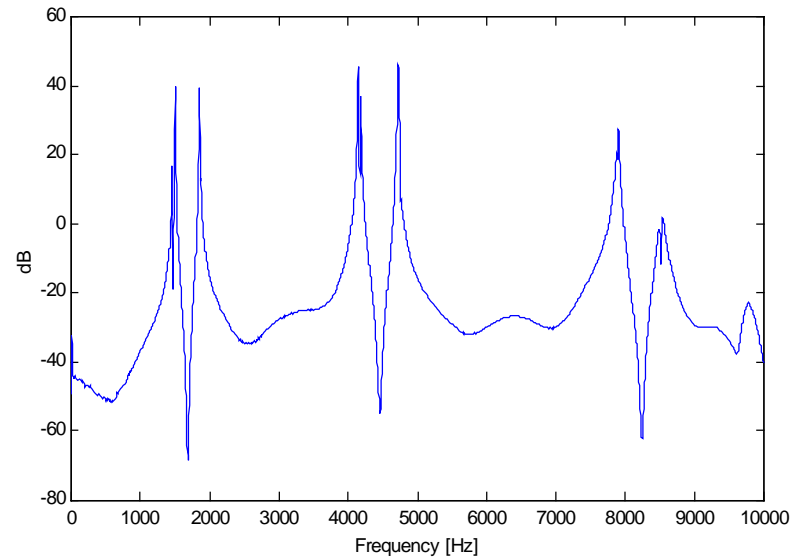
Modo	Modo	Frequenza naturale [Hz]
		4700
		7880
		8500

Autospettro della risposta ad una eccitazione impulsiva

Fcamp = 25600 Hz
N = 1024

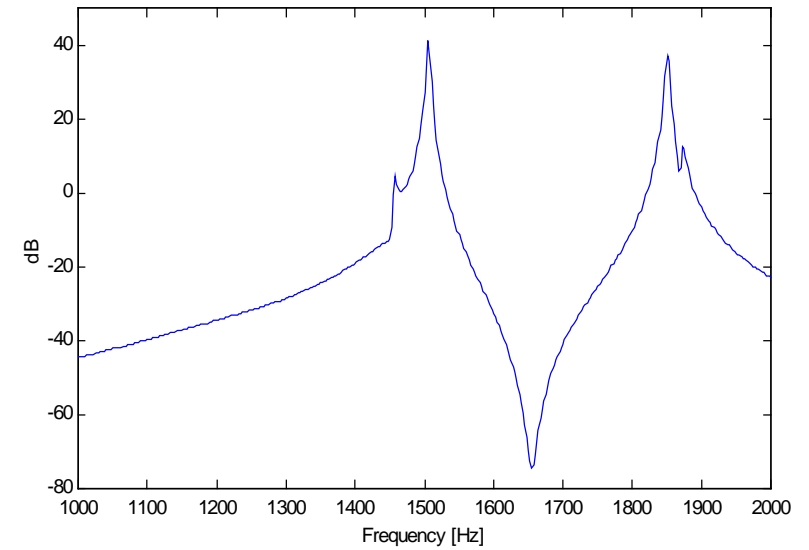


Fcamp = 25600 Hz
N = 8192

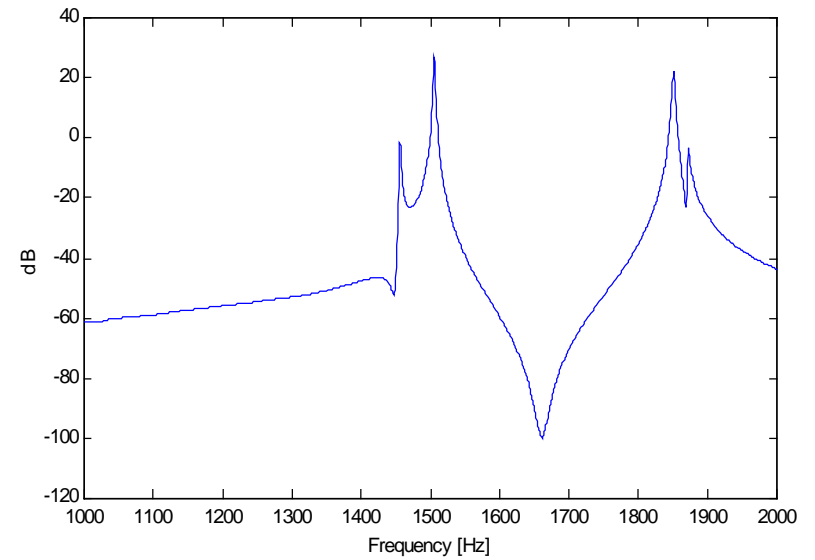


Autospettro della risposta ad una eccitazione impulsiva

Fcamp = 5120 Hz
N = 1024

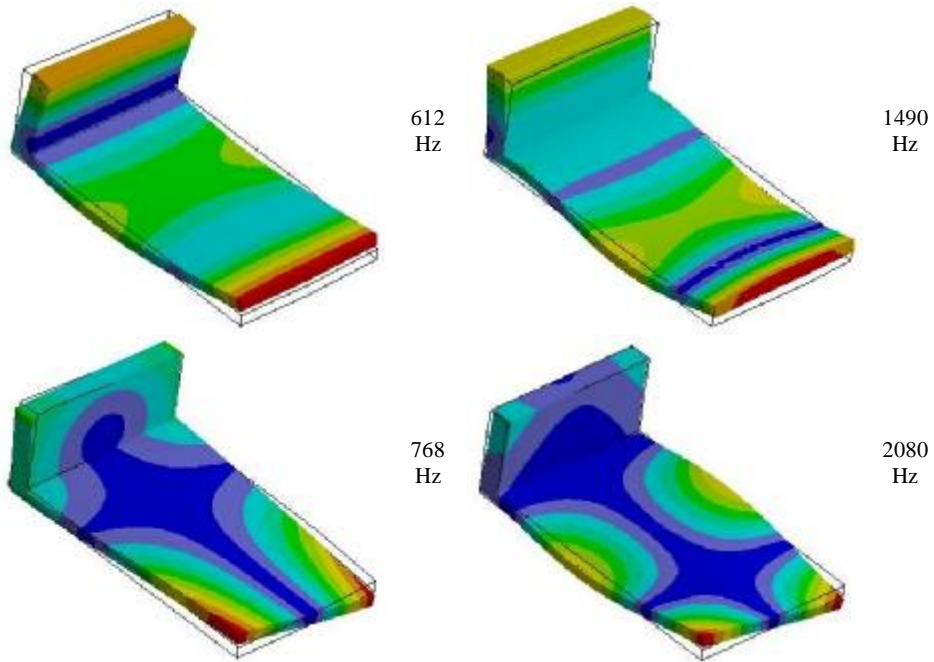


Fcamp = 5120 Hz
N = 8192



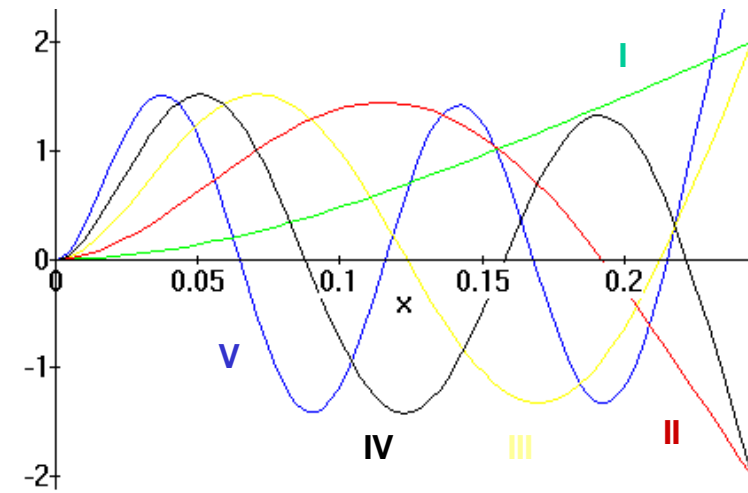
APPENDICE A5 – Prova sperimentale no.2

Misura delle frequenze naturali di una struttura “ad elle” in acciaio.



APPENDICE A6 – Prova sperimentale no.3

Prove con shaker elettrodinamico su lamina in alluminio.



Frequenza naturali [Hz]

$f_1=14$	$f_2=85$	$f_3=240$	$f_4=472$
$f_5=868$	$f_6=1164$	$f_7=1625$	$f_8=2164$