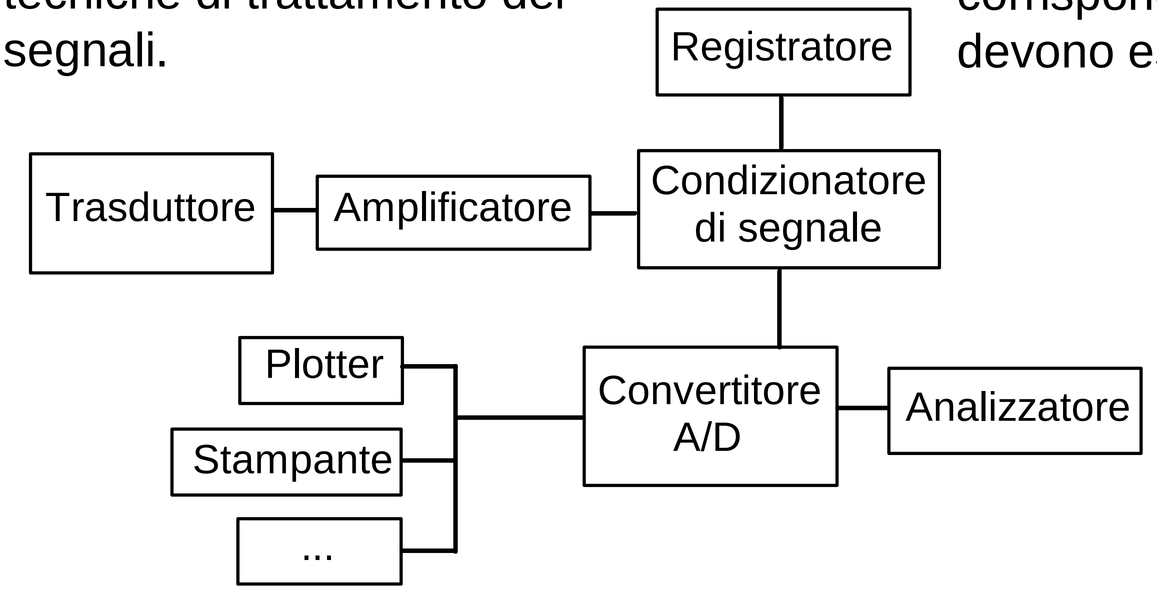
Frequenza: Hertz e Ordini – 1

- I segnali vanno preparati ai fini delle elaborazioni successive.
- Siamo nella fase di conversione del segnale ***analogico*** in un segnale ***digitale***.
- Il processo di ***digitalizzazione*** è alla base delle moderne tecniche di trattamento dei segnali.



- Due fasi distinte caratterizzano la digitalizzazione:
  - il campionamento
  - la quantizzazione
- Il ***campionamento*** consiste nel definire gli istanti di tempo in corrispondenza dei quali i dati devono essere osservati.
- La ***quantizzazione*** è la conversione del valore dei dati in una forma numerica.

APPENDICE A9-4

CAMPIONAMENTO

A9-4.1 CAMPIONAMENTO

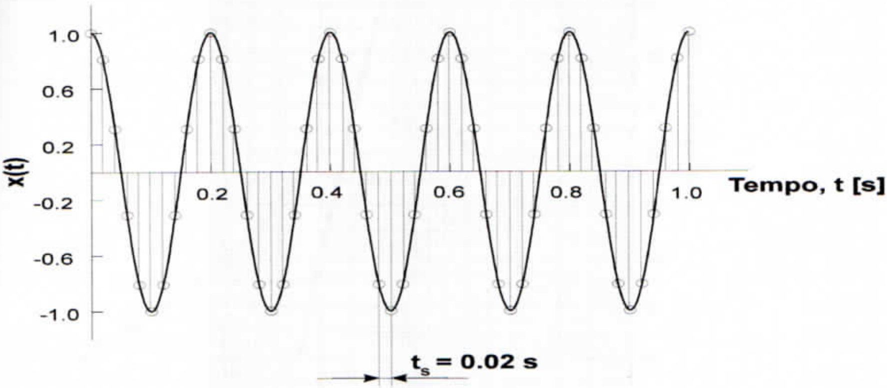


Fig. A9-4.1 – *Campionamento alla frequenza di 50 Hz di un segnale sinusoidale d frequenza 5 Hz.*

A9-4.2 FILTRAGGIO ANTI-ALIASING

Nelle figure A9-4.2, A9-4.3 e A9-4.4 sono ricapitolati i principali aspetti del filtraggio anti aliasing.

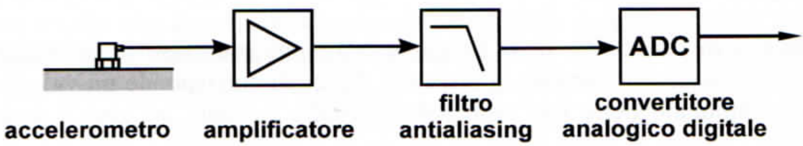


Fig. A9-4.2 – *Posizione del filtro antialiasing nella catena di misura.*

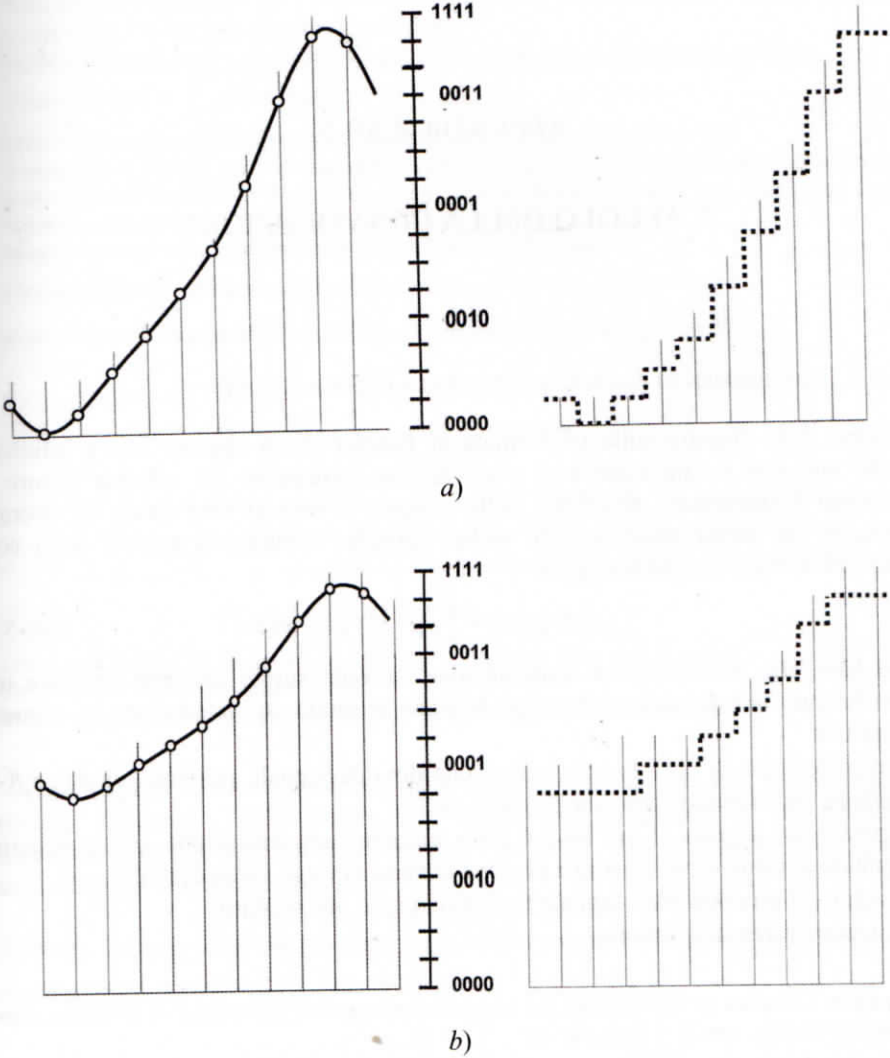


Fig. A9-4.5 – *Quantizzazione del segnale con uno strumento a quattro bit.*

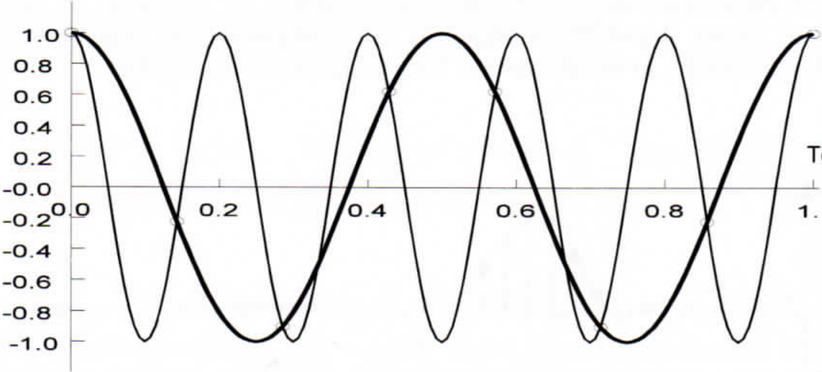
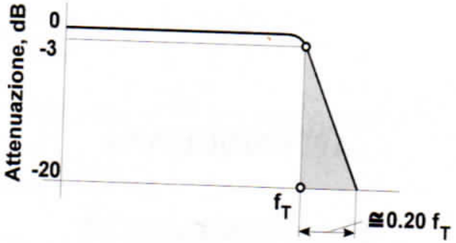


Fig. 9.7 - *Aliasing dovuto al campionamento non corretto di un segnale sinusoidale: il segnale con frequenza 5 Hz (linea fine), campionato alla frequenza di 7 Hz, viene interpretato come un segnale sinusoidale con la frequenza di 2 Hz (linea grossa).*



$$f_c \geq 2(1.2 f_T)$$

f_c = frequenza di campionamento; f_T = frequenza nominale di taglio del filtro AA.

Fig. A9-4.3 – *Frequenza di taglio e frequenza di campionamento.*

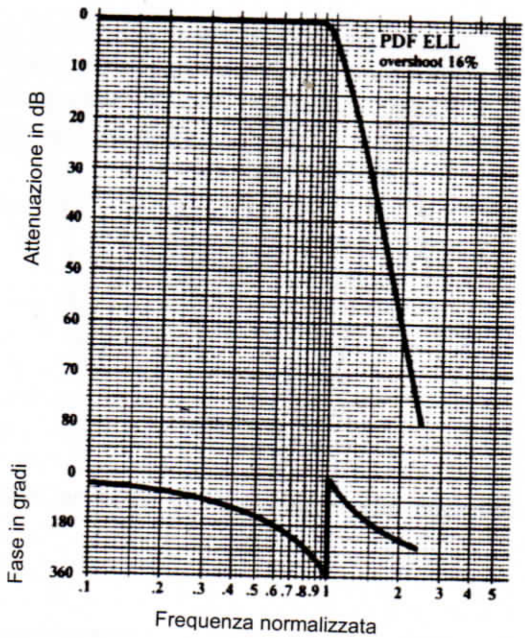


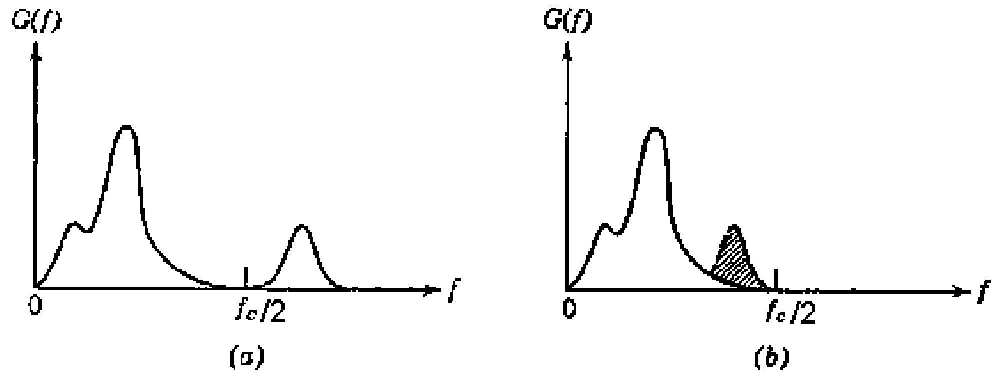
Fig. A9-4.4 – *Caratteristica di un filtro antialiasing..*

Frequenza: Hertz e Ordini – 2

- ***Campionamento***
  - a determinati intervalli di tempo il convertitore A/D legge il valore istantaneo del segnale.
- Solitamente il campionamento avviene ad intervalli di tempo regolari.
- L'intervallo di tempo Δt_c tra due campionamenti successivi è detto ***intervallo di campionamento***.
- Il suo inverso $f_S = 1/\Delta t_c$ è detto ***frequenza di campionamento***.
- ***Frequenza di Nyquist***
  - Il teorema di ***Shannon*** ci assicura che se il segnale che stiamo campionando ha una banda di frequenza limitata superiormente da f_N, allora non si compie errore di ***ALIASING***.

$$f_N = \frac{f_S}{2}$$

- ***ALIASING*** - alterazione nella "lettura" del contenuto in frequenza del segnale.

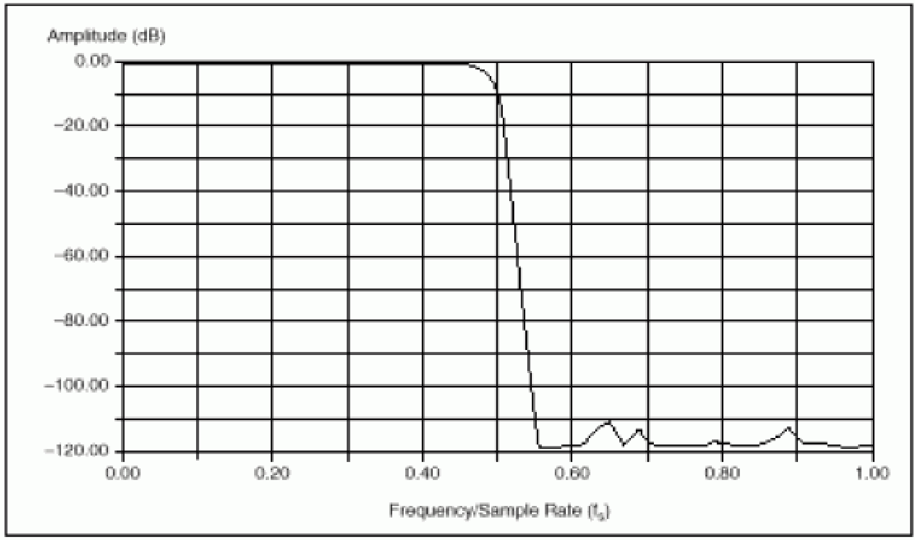


Frequenza: Hertz e Ordini – 3

- Nella pratica, dato che non si conosce a priori il contenuto in frequenza del segnale da analizzare, affinché sia soddisfatto il teorema di Shannon, occorre eliminare dai dati analogici tutte le frequenze superiori a $f_S/2$.
- Si usano dei filtri passa-basso (***filtri Anti-Aliasing***).
- Siccome la funzione di risposta dei filtri presenta sempre una certa pendenza in corrispondenza della frequenza di taglio (f_{AA}), si suole porre quest'ultima ad un valore pari a circa l'80 % della frequenza di Nyquist.
- La frequenza di campionamento è quindi pari a circa 2.5 volte la frequenza di taglio del filtro.

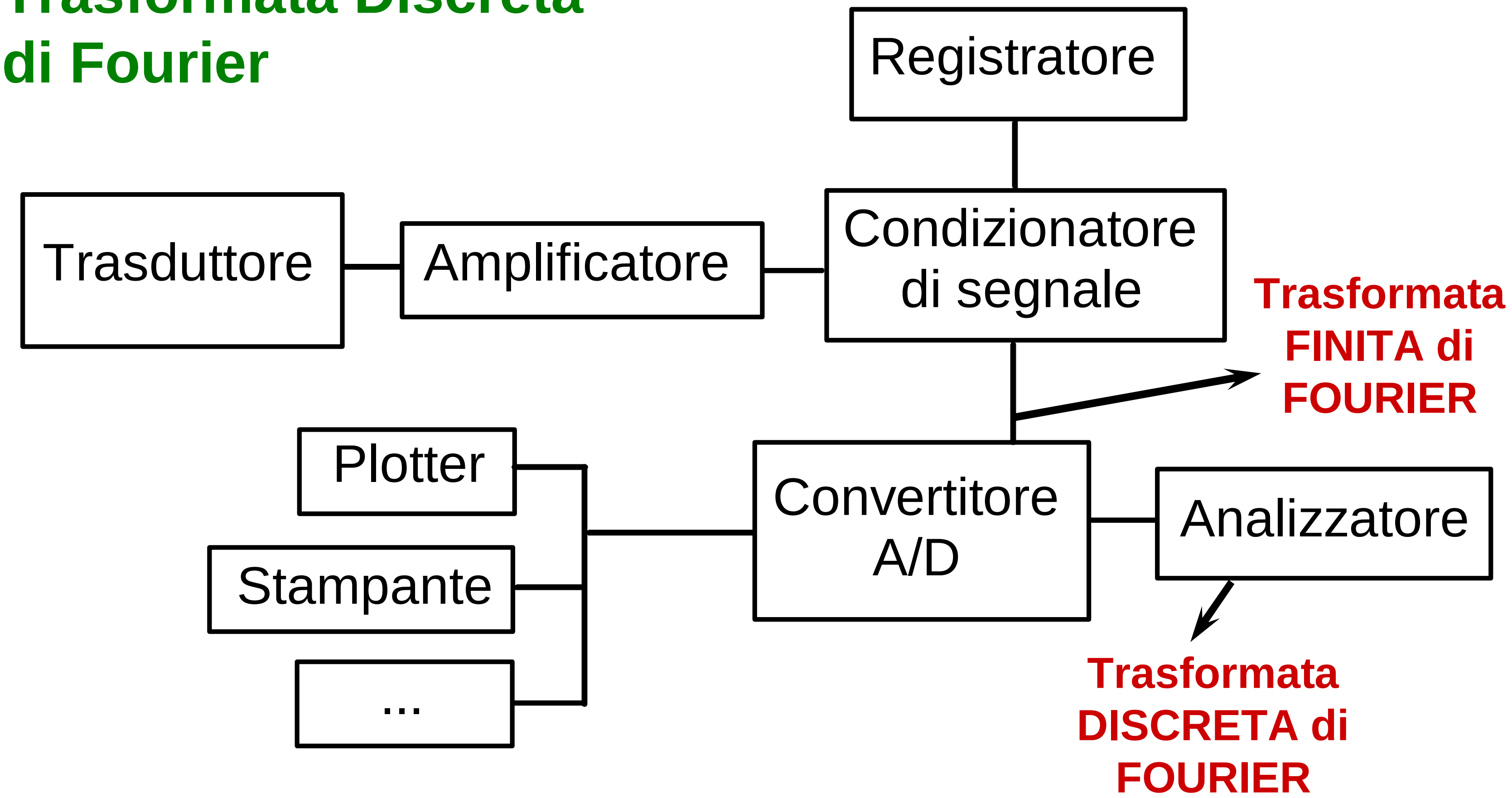
$$f_{AA} \cong 0.8\, f_N = 0.8\,\frac{f_S}{2}$$

$$f_S = 2.56\ f_{AA}$$



Spettri:

Trasformata di Fourier
Trasformata Finita di Fourier
Trasformata Discreta di Fourier



Trasformata Finita di Fourier

- Trasformata di Fourier

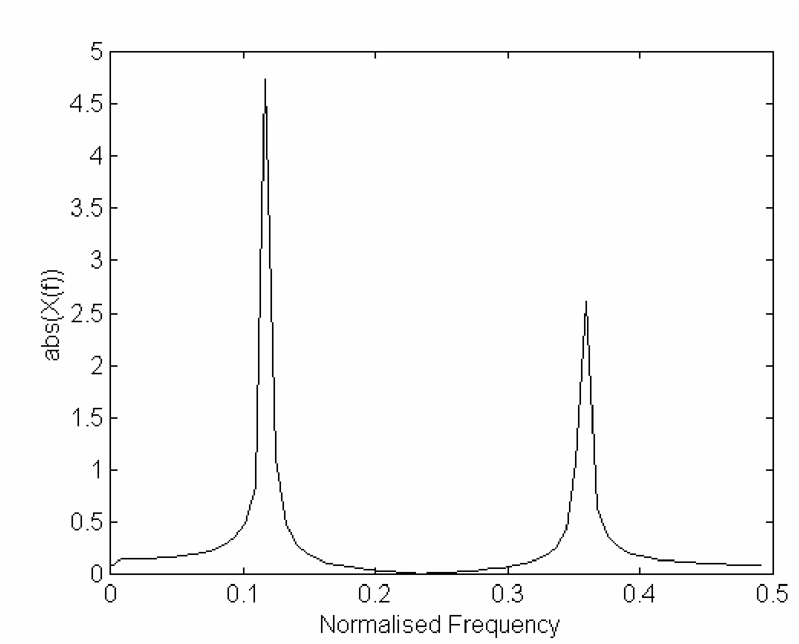
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i2p\, f\, t}\, dt$$

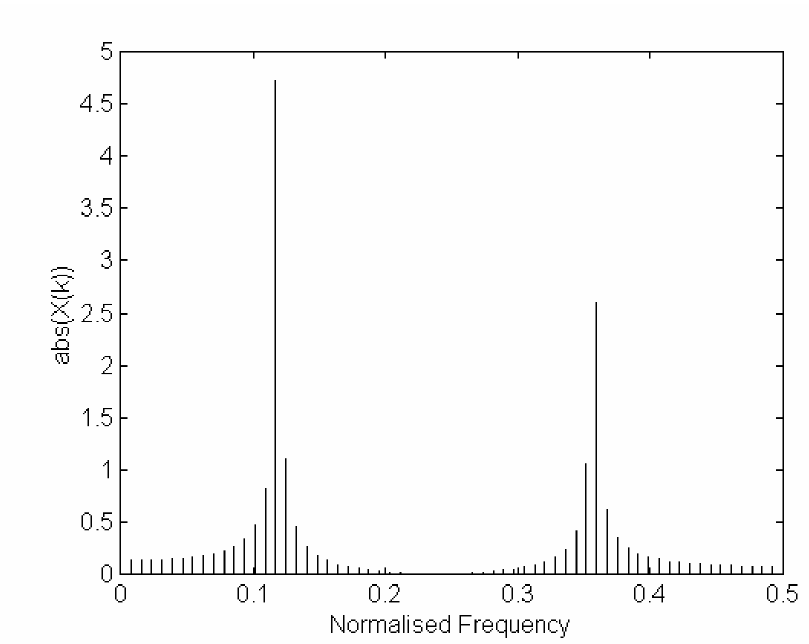
- E' una funzione della variabile **continua** f

- Trasformata **Finita** di Fourier

$$X(k\Delta f, T^*) = \int_{0}^{T^*} x(t)\, e^{-i2p\, f\, t}\, dt$$

- E' una funzione della variabile **discreta** k Δf

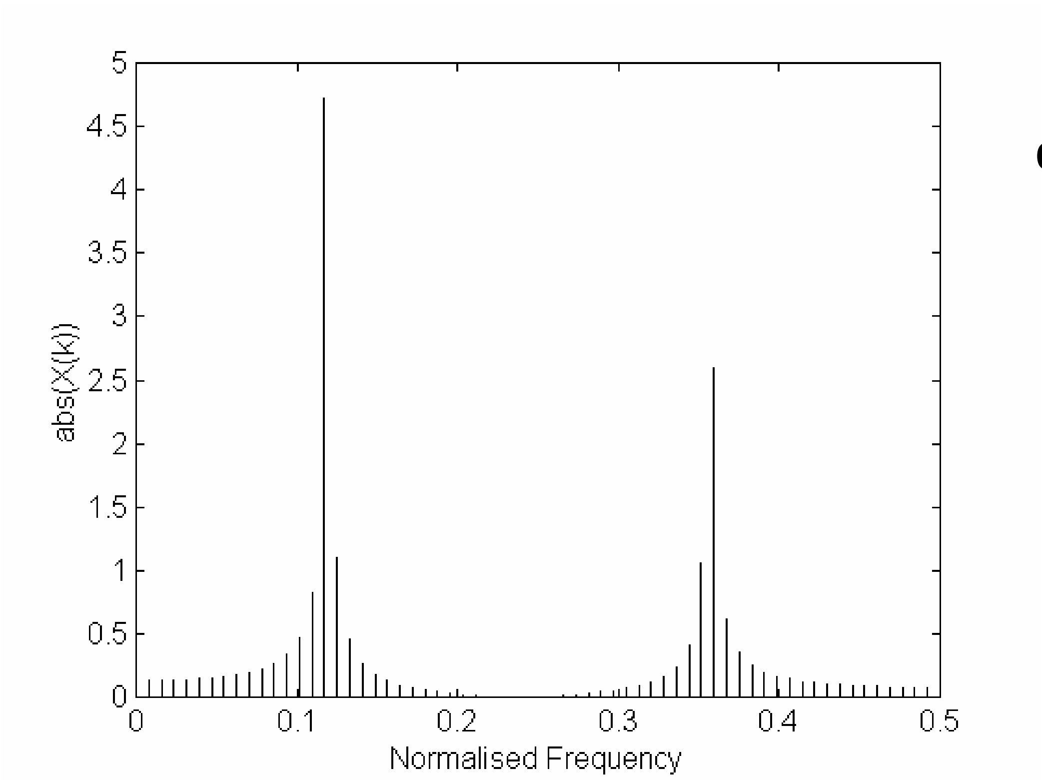




Trasformata Finita di Fourier:
Risoluzione dello spettro

q Trasformata **Finita** di Fourier

$$X(k\Delta f, T^*) = \int_0^{T^*} x(t)\, e^{-i2p\, f\, t} dt$$



q La distanza tra due linee spettrali contigue è la **RISOLUZIONE** D**f** dello spettro

$$\Delta f = \frac{1}{T^*}$$

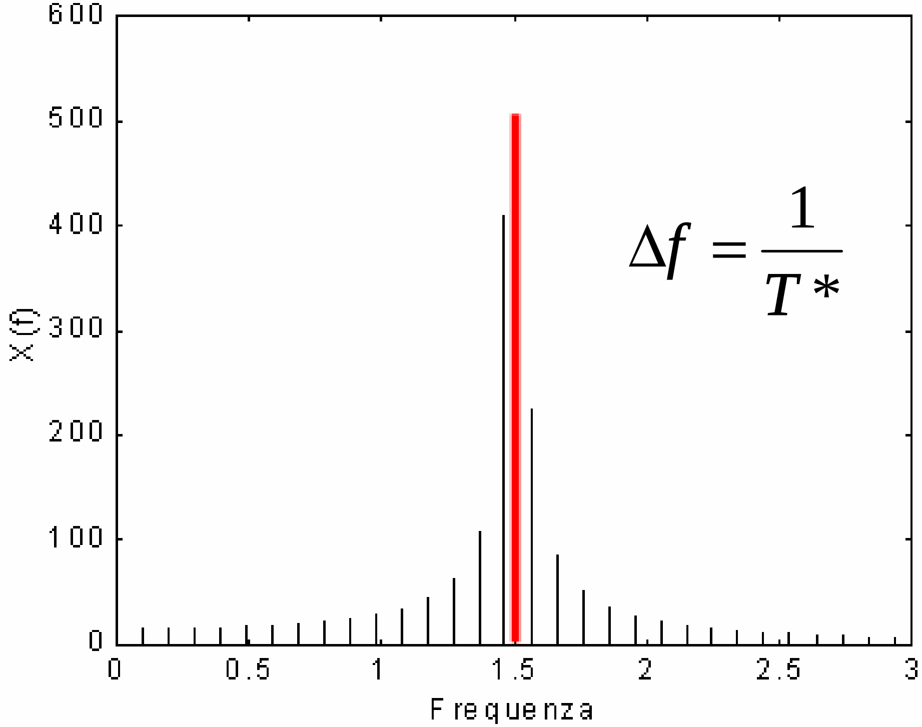
T* periodo di acquisizione

Trasformata Finita di Fourier:
il fenomeno del ***leakage***

- È importante sottolineare che la risoluzione Δf dipende solo dal periodo di acquisizione T*.

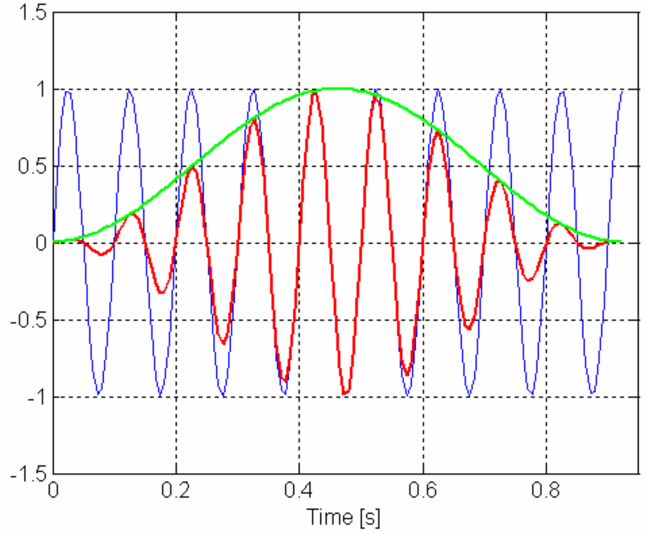
- Non è detto che il segnale possieda effettivamente una frequenza pari a Δf o qualcuno dei suoi multipli.

- Nello spettro si "addensano" linee attorno alla frequenza del effettiva del segnale.



- Si parla di ***leakage*** (dispersione).

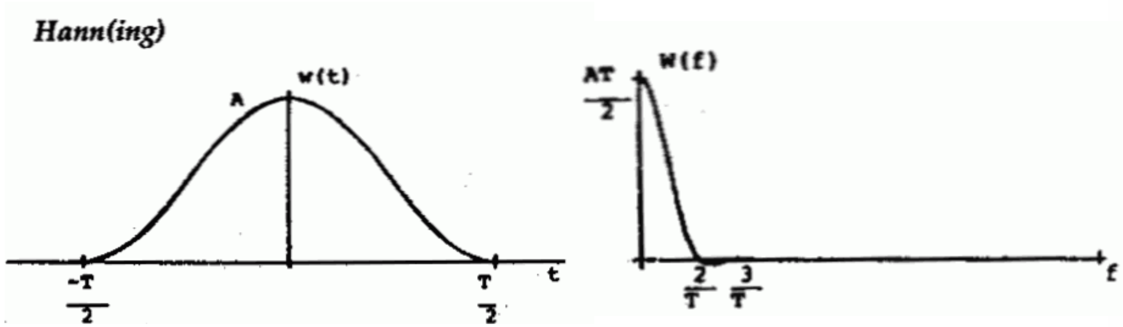
Trasformata Finita di Fourier:
le ***Finestre***

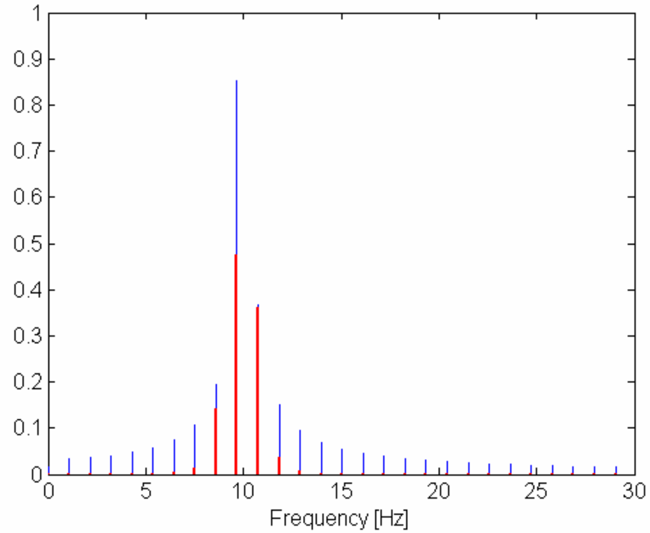


- Per diminuire la dispersione si utilizzano le cosiddette ***finestre***: prima di calcolare la Trasformata di Fourier, si moltiplica il segnale *x*(*t*) per una opportuna funzione *w*(*t*).

$$x_w(t) = x(t)w(t)$$

$$F[x_w(t)] = F[x(t)w(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(g)W(f-g)\,dg$$





Trasformata DISCRETA di Fourier (DFT)

- Trasformata di Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i2p\, f\, t}\, dt$$

- Trasformata inversa di Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{i2p\, f\, t}\, df$$

- Trasformata **DISCRETA** di Fourier

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-i2p\, k \frac{n}{N}}$$

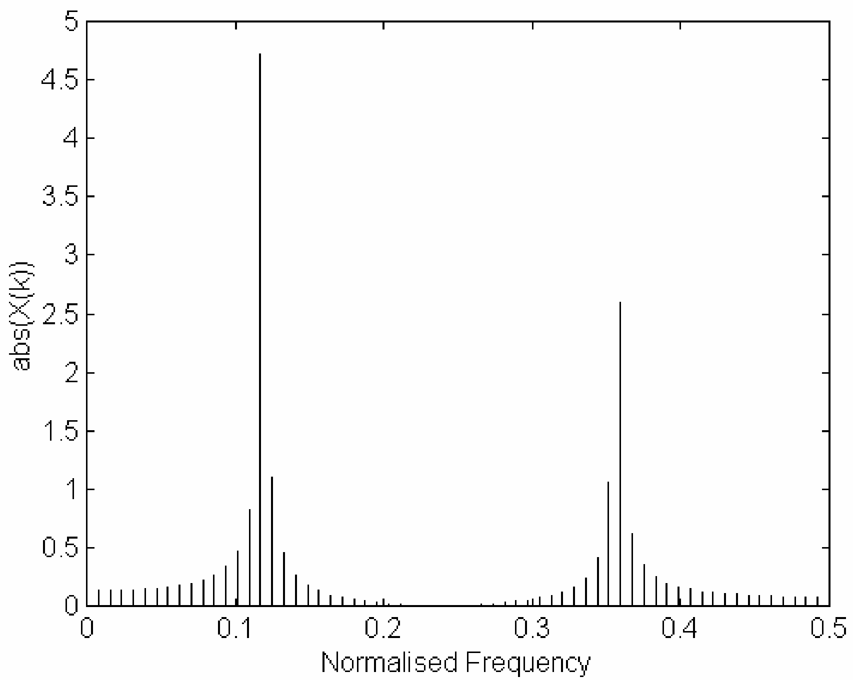
- Trasformata inversa **DISCRETA** di Fourier

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k)\, e^{i2p\, k \frac{n}{N}}$$

Trasformata DISCRETA di Fourier (DFT)

- Trasformata **DISCRETA** di Fourier

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-i2p\, k\frac{n}{N}}$$



- La **RISOLUZIONE** D**f** dello spettro

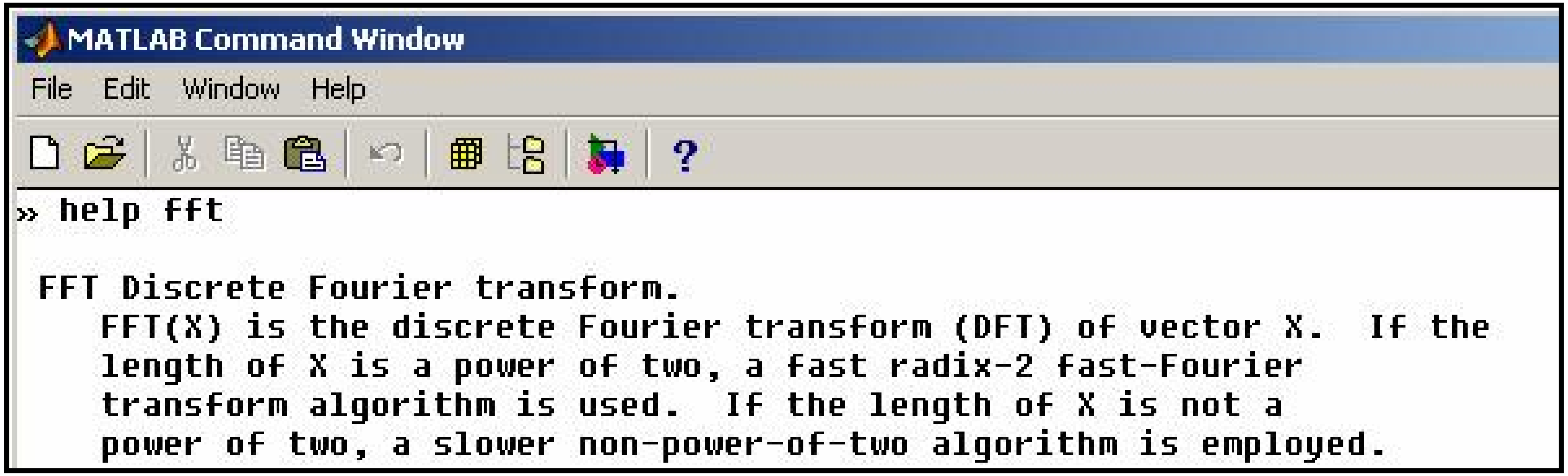
$$\Delta f = \frac{1}{T^*} = \frac{1}{N \cdot \Delta t_S} = \frac{f_S}{N}$$

T*	periodo di acquisizione
Δt_S	intervallo di campionamento
f_S	frequenza di campionamento
N	numero di punti (potenza di 2)

FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)

FFT in MATLAB

Trasformata Diretta **X=fft(x)** Trasformata Inversa **X=ifft(x)**



ESEMPIO

$$x(t) = x_m + A\cos(2p\ f_0\, t)$$

$$x_m = 3$$

$$f_0 = 2\,Hz$$

$$A = 5$$

T* periodo di osservazione = 1 s

N numero di punti = 16

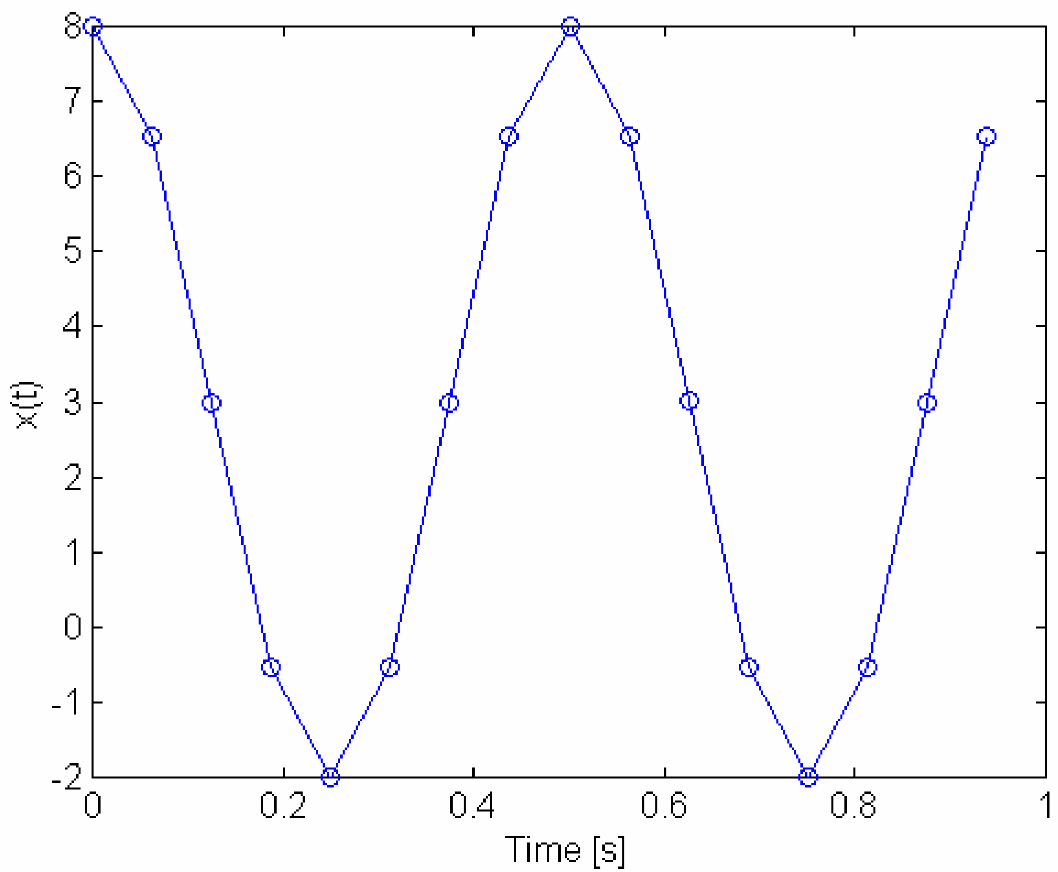
	x(t) =	k	N=16
1	8.0000	1	
2	6.5355	2	
3	3.0000	…	
4	-0.5355	…	
5	-2.0000	…	
6	-0.5355	…	
7	3.0000	…	
8	6.5355	N/2	
9	8.0000	N/2+1	
10	6.5355	N/2+2	
11	3.0000	…	
12	-0.5355	…	
13	-2.0000	…	
14	-0.5355	…	
15	3.0000	…	
16	6.5355	N	

$$x(t) = x_m + A\cos(2p\ f_0\, t)$$

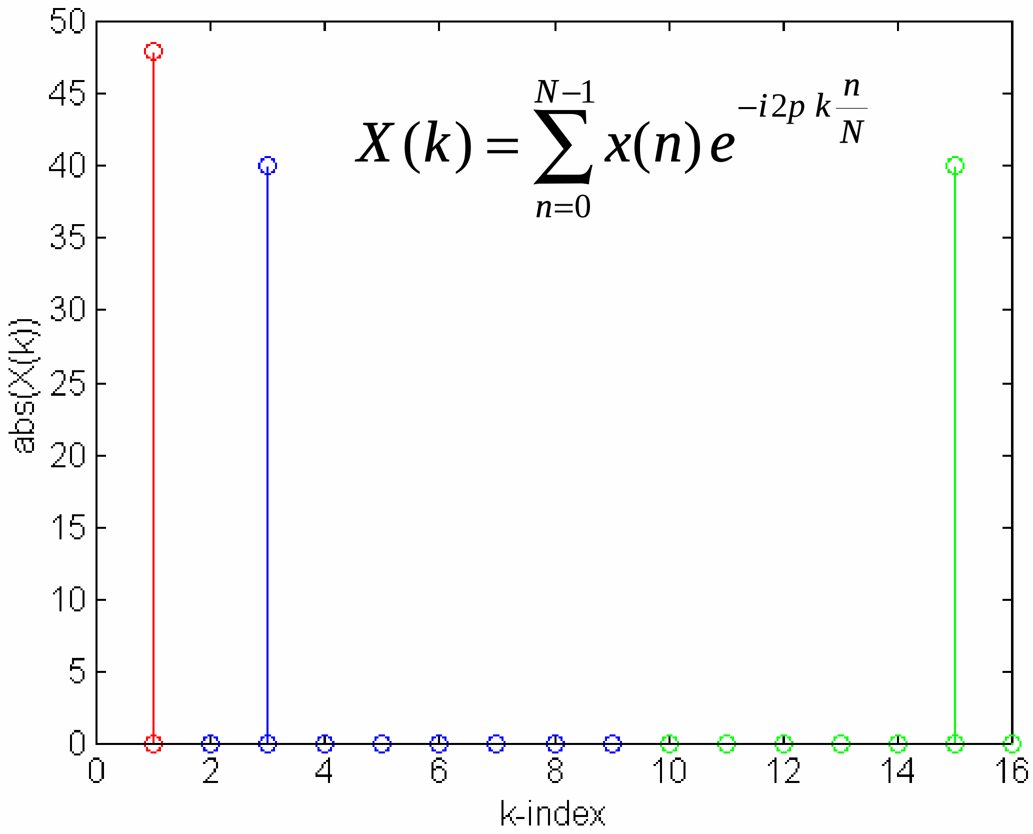
$$x_m = 3$$

$$f_0 = 2\,Hz$$

$$A = 5$$

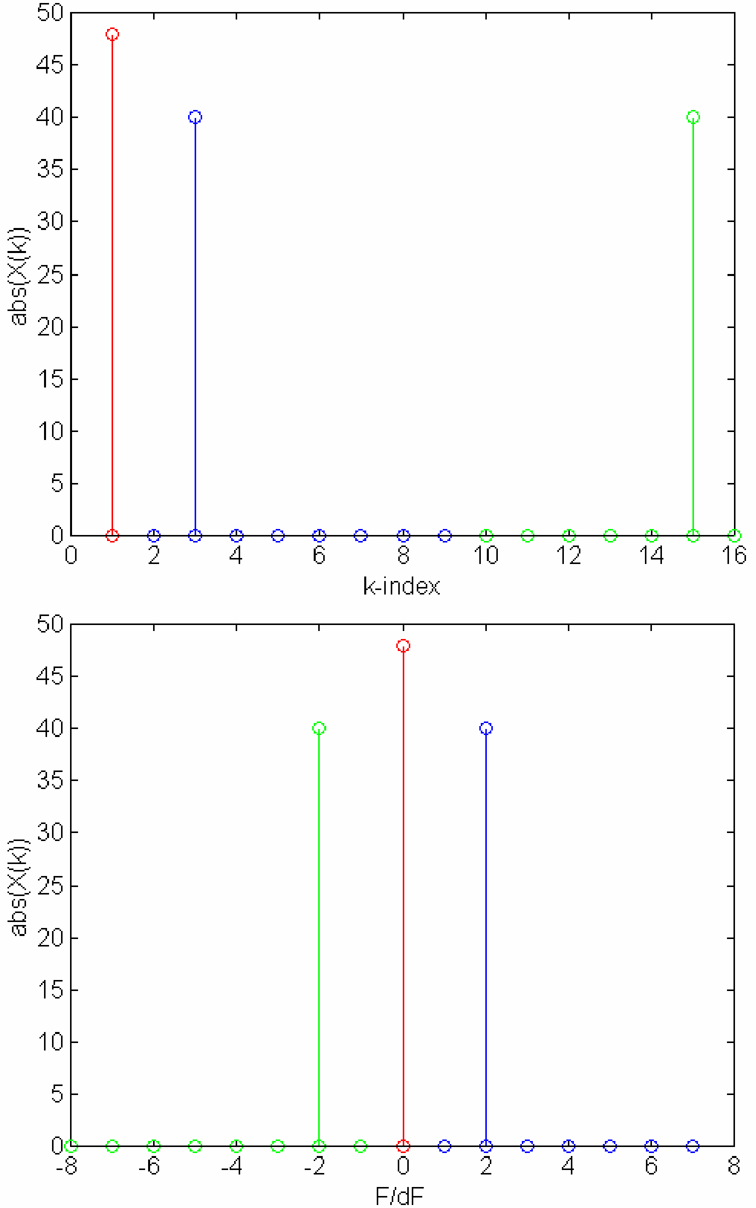


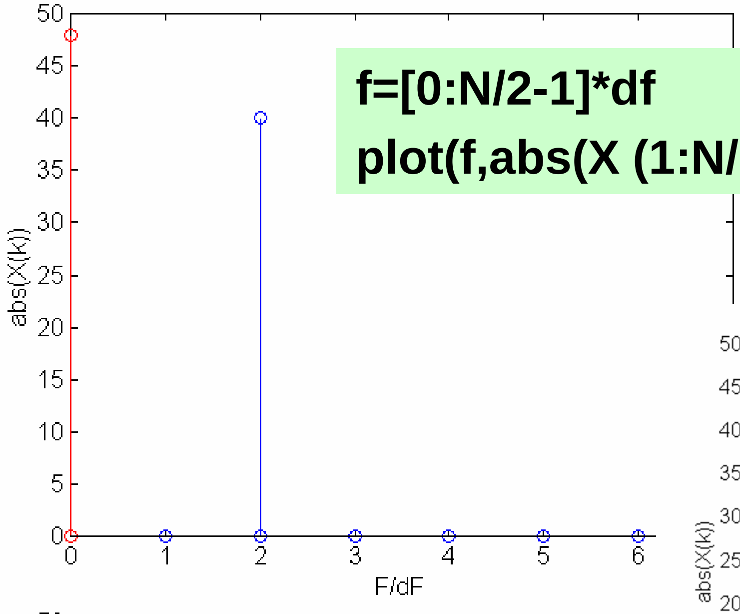
k	$\lvert X(k)\rvert$ =	f/df
1	**48.00**	**0**
2	**0.00**	**1**
…	**40.00**	**2**
…	**0.00**	**…**
…	**0.00**	**…**
…	**0.00**	**…**
…	**0.00**	**…**
N/2	**0.00**	**N/2-1**
N/2+1	0	-N/2
N/2+2	**0.00**	**-(N/2-1)**
…	**0.00**	**…**
…	**0.00**	**…**
…	**0.00**	**…**
…	**0.00**	**…**
…	**40.00**	**-2**
N	**0.00**	**-1**



INDICI		
Il primo	1	valor medio
da 2 a N/2	(N/2-1)	frequenze positive
da N/2+2 a N	(N/2-1)	frequenze negative

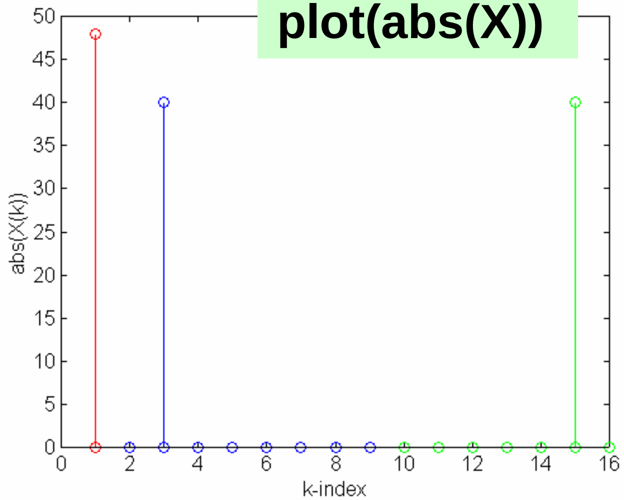
k	$\lvert X(k)\rvert$ =	f/df	$\lvert X(f/df)\rvert$ =
1	**48.00**	-N/2	0
2	**0.00**	**-(N/2-1)**	**0.00**
…	**40.00**	**…**	**0.00**
…	**0.00**	**…**	**0.00**
…	**0.00**	**…**	**0.00**
…	**0.00**	**…**	**0.00**
…	**0.00**	**-2**	**40.00**
N/2	**0.00**	**-1**	**0.00**
N/2+1	0	**0**	**48.00**
N/2+2	**0.00**	**1**	**0.00**
…	**0.00**	**2**	**40.00**
…	**0.00**	**…**	**0.00**
…	**0.00**	**…**	**0.00**
…	**0.00**	**…**	**0.00**
…	**40.00**	**…**	**0.00**
N	**0.00**	**N/2-1**	**0.00**

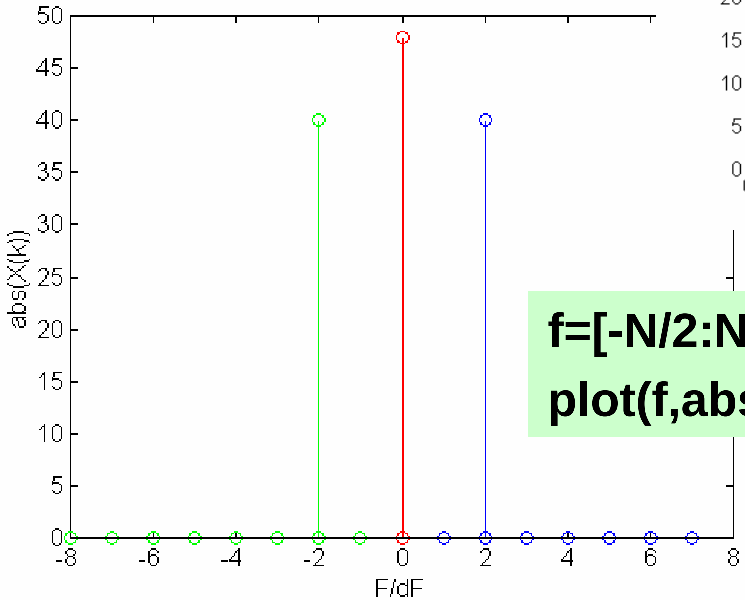




f=[0:N/2-1]*df
plot(f,abs(X (1:N/2-1))

X=fft(x)
plot(abs(X))





f=[-N/2:N/2-1]*df
plot(f,abs(fftshift(X))

k	f/df
1	-N/2
2	**-(N/2-1)**
…	**…**
…	**…**
…	**…**
…	**…**
…	**-2**
N/2	**-1**
N/2+1	**0**
N/2+2	**1**
…	**2**
…	**…**
…	**…**
…	**…**
…	**…**
N	**N/2-1**

k	|X(k)| =		|X(k)| =
1	48.00	$\div N$	3.00
2	0.00		0.00
…	40.00		5.00
…	0.00		0.00
…	0.00		0.00
…	0.00		0.00
…	0.00		0.00
N/2	0.00		0.00
N/2+1	0	$\div \frac{N}{2}$	0
N/2+2	0.00		0.00
…	0.00		0.00
…	0.00		0.00
…	0.00		0.00
…	0.00		0.00
…	40.00		5.00
N	0.00		0.00

$$x(t) = x_m + A\cos(2p\ f_0\, t)$$

$$x_m = 3$$

$$f_0 = 2\,Hz$$

$$A = 5$$