

Capitolo 1

Richiami di teoria dell'elasticità

1.1. Deformazione dei continui

Un corpo cambiando la propria forma subisce una *deformazione*, il cui studio può essere eseguito prescindendo dalle cause che l'hanno prodotta, ed eseguendo quindi un'analisi puramente geometrica.

Per *corpo continuo* si intende un corpo nello spazio il cui volume sia completamente occupato da materia, potendo accettare questa ipotesi anche, al limite, per elementi di volume infinitesimi.

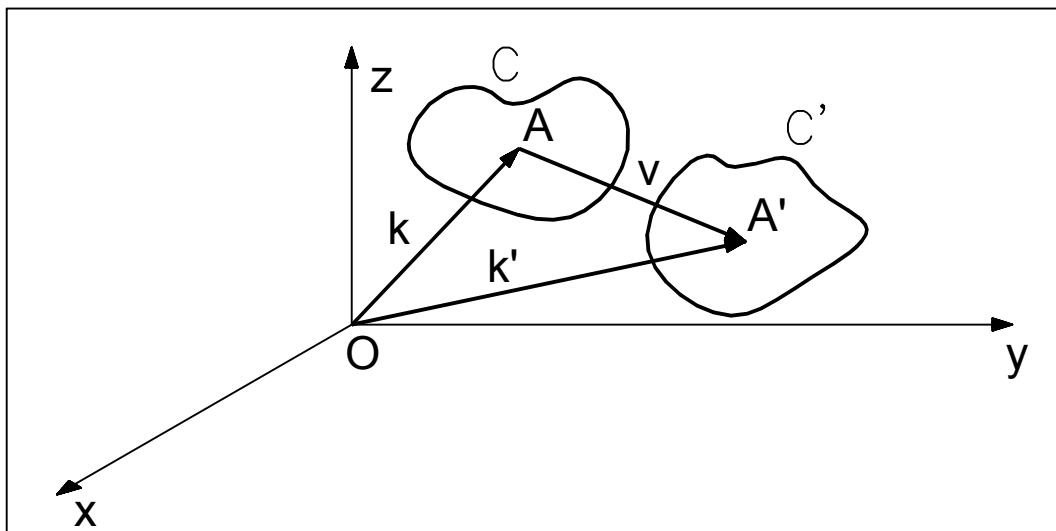


Figura 1.1: Vettori posizione e vettore campo di spostamento.

Si consideri un solido caratterizzato da uno stato tensionale che porti ad una deformazione del corpo stesso. Si indichi con C la configurazione iniziale e con C' la configurazione finale del corpo, ovvero la configurazione a deformazione avvenuta. Sia $A(x_1, y_1, z_1)$ un punto del corpo nella configurazione iniziale C e sia $A'(x_2, y_2, z_2)$ il corrispondente di A nella configurazione C' ; le coordinate dei punti vengono rilevate riferendosi ad una terna estrinseca trirettangola levogira $Oxyz$ (fig. 1.1).

In queste ipotesi i vettori di posizione di A e A' risultano:

$$\mathbf{k} = \mathbf{A} - \mathbf{O}; \mathbf{k}' = \mathbf{A}' - \mathbf{O}$$

Si può ora definire un vettore spostamento \mathbf{v} tale che:

$$\mathbf{v} + \mathbf{k} = \mathbf{k}' \quad (1.1)$$

da cui segue

$$\mathbf{v} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{A}' - \mathbf{A}$$

I vettori \mathbf{k} , \mathbf{k}' e \mathbf{v} sono definiti in funzione delle coordinate x_1, y_1, z_1 di A e x_2, y_2, z_2 di A' . Pertanto la posizione del punto A in C risulta completamente definita dal vettore \mathbf{k} , mentre per stabilire in maniera univoca la configurazione finale occorre che sia assegnata la funzione vettoriale $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$, detta *campo di spostamento*, funzione avente dominio in C e codominio C' . Occorre però che nella definizione del *campo degli spostamenti* \mathbf{v} ci si assicuri che le componenti

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x_1, y_1, z_1) \\ v_y &= v_y(x_1, y_1, z_1) \\ v_z &= v_z(x_1, y_1, z_1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

del vettore \mathbf{v} risultino funzioni continue, monodrome e con derivate parziali continue. Particolarmente importante risulta la condizione di monodromia, che assicura che punti interni al volume a trasformazione avvenuta non diventino punti di frontiera e viceversa, mentre per evitare separazione o compenetrazione di materia devono essere monodrome le funzioni:

$$\begin{aligned} v_x^{-1} &= v_x^{-1}(x_1, y_1, z_1) \\ v_y^{-1} &= v_y^{-1}(x_1, y_1, z_1) \\ v_z^{-1} &= v_z^{-1}(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

inverse delle (1.2) [1]. Per motivi invece di tipo analitico in seguito si riterrà che le (1.2) abbiano anche derivate parziali continue.

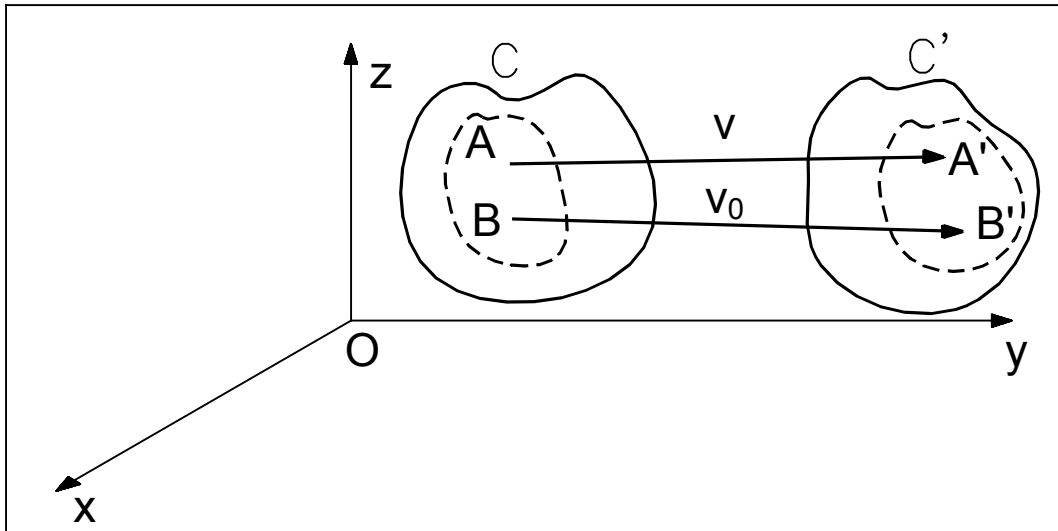


Figura 1.2: Definizione di un intorno infinitesimo.

Ulteriori considerazioni sulle componenti del campo degli spostamenti possono essere formulate considerando un intorno infinitesimo I del punto $A(x_1, y_1, z_1)$ (fig. 1.2).

Supponiamo di considerare all'interno di I il punto $B(x_2, y_2, z_2)$, per il quale valgono le relazioni (I è un intorno centrato in A e di raggio infinitesimo):

$$\begin{aligned} dx &= x_2 - x_1 \\ dy &= y_2 - y_1 \\ dz &= z_2 - z_1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Siano assegnati i vettori \mathbf{v} e \mathbf{v}_0 che permettono, a deformazione avvenuta, di individuare i punti $A'(x'_1, y'_1, z'_1)$ e $B'(x'_2, y'_2, z'_2)$ appartenenti all'intorno infinitesimo I' trasformato di I. Supponendo di sviluppare in serie di Taylor, nell'intorno I, arrestata al primo ordine, e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, le componenti dello spostamento di B si possono esprimere come:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_A dx + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_A dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_A dz \\ v_y &= v_{0y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_A dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_A dy + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_A dz \\ v_z &= v_{0z} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_A dx + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_A dy + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_A dz \end{aligned} \quad (1.4)$$

In forma matriciale le precedenti possono essere riscritte come:

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{v}_0] + [\mathbf{H}](\mathbf{d}) \quad (1.5)$$

con

$$[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{v}_0] = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

ove la matrice $[\mathbf{H}]$ viene definita *tensore della trasformazione*. Se definiamo le costanti, valutate nel punto $A(x_1, y_1, z_1)$:

$$\begin{aligned} h_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}; & h_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y}; & h_{xz} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ h_{yx} &= \frac{\partial v_y}{\partial x}; & h_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y}; & h_{yz} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ h_{zx} &= \frac{\partial v_z}{\partial x}; & h_{zy} &= \frac{\partial v_z}{\partial y}; & h_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

la prima delle (1.4) diventa, ricordando le (1.3),

$$v_x = v_{x0} + h_{xx}(x_2 - x_1) + h_{xy}(y_2 - y_1) + h_{xz}(z_2 - z_1) \Rightarrow v_x = h_{0x} + h_{xx}x_2 + h_{xy}y_2 + h_{xz}z_2$$

ove sia definita la costante:

$$h_{0x} = v_{0x} - h_{xx}x_1 - h_{xy}y_1 - h_{xz}z_1 = \text{cost.}$$

Con un procedimento analogo si ottengono:

$$v_y = h_{0y} + h_{yx}x_2 + h_{yy}y_2 + h_{yz}z_2$$

$$v_z = h_{0z} + h_{zx}x_2 + h_{zy}y_2 + h_{zz}z_2$$

ove

$$h_{0y} = v_{0y} - h_{yx}x_1 - h_{yy}y_1 - h_{yz}z_1 = \text{cost.}$$

$$h_{0z} = v_{0z} - h_{zx}x_1 - h_{zy}y_1 - h_{zz}z_1 = \text{cost.}$$

In base a queste assunzioni, e ricordando la (1.1), è possibile ottenere il valore delle coordinate del punto B' trasformato di B a seguito della trasformazione $C \rightarrow C'$:

$$\begin{aligned} x'_2 &= h_{0x} + (1 + h_{xx})x_2 + h_{xy}y_2 + h_{xz}z_2 \\ y'_2 &= h_{0y} + h_{yx}x_2 + (1 + h_{yy})y_2 + h_{yz}z_2 \\ z'_2 &= h_{0z} + h_{zx}x_2 + h_{zy}y_2 + (1 + h_{zz})z_2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Le equazioni (1.7) rappresentano una affinità [2]. Una affinità ha la caratteristica di trasformare rette in rette, piani in piani e circonferenze in ellissi, mantenendo le relazioni di parallelismo, perdendo però le relazioni di ortogonalità, a meno che non si introduca *un sistema di riferimento principale*.

Le (1.7) possono essere espresse anche in forma matriciale, ovvero:

$$\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{0x} \\ h_{0y} \\ h_{0z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ h_{yx} & 1 + h_{yy} & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{zy} & 1 + h_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

e scomponendo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 + h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ h_{yx} & 1 + h_{yy} & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{zy} & 1 + h_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{zy} & h_{zz} \end{bmatrix}$$

si nota come a secondo membro la matrice identità rappresenti la parte non omogenea della trasformazione affine, mentre la seconda matrice a secondo membro, coincidente con la (1.6), rappresenti la parte omogenea della trasformazione affine.

Considerando nuovamente il solo tensore della trasformazione [H] si può osservare come tale matrice sia scomponibile in una parte simmetrica e una antisimmetrica:

$$[H] = [\varepsilon] + [\omega] \quad (1.8)$$

In base a questa scomposizione la deformazione dell'intorno I di centro A(x₁,y₁,z₁) può essere pensata come la composizione di un *moto rigido* (definito dalla matrice [ω]) e di un *moto di deformazione pura* (definito dalla matrice [ε]).

Le matrici [ε] e [ω] prendono la forma:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

ove le componenti delle due matrici siano valutate nel punto A.

Ricordando la (1.5) e la (1.8) il campo degli spostamenti può essere definito in forma matriciale come segue:

$$[v] = [v_0] + [\varepsilon](d) + [\omega](d)$$

Introducendo l'ipotesi *dei piccoli gradienti di spostamento* [3], ovvero

$$\left| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| \ll 1 \quad \dots \quad \left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right| \ll 1,$$

gli elementi che compongono la matrice simmetrica e quella emisimmetrica risultano tutti dello stesso ordine di grandezza e quindi diventa possibile fornire una interpretazione fisica degli elementi di tali matrici: le componenti non nulle della (1.10) rappresentano le componenti del vettore rotazione in un atto di moto di un corpo rigido, mentre le componenti della (1.9) descrivono una deformazione pura. In particolare, con riferimento alla (1.9), se si pone:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.11)$$

$$\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \varepsilon_{yz} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (1.12)$$

si può definire il *tensore di deformazione* come:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

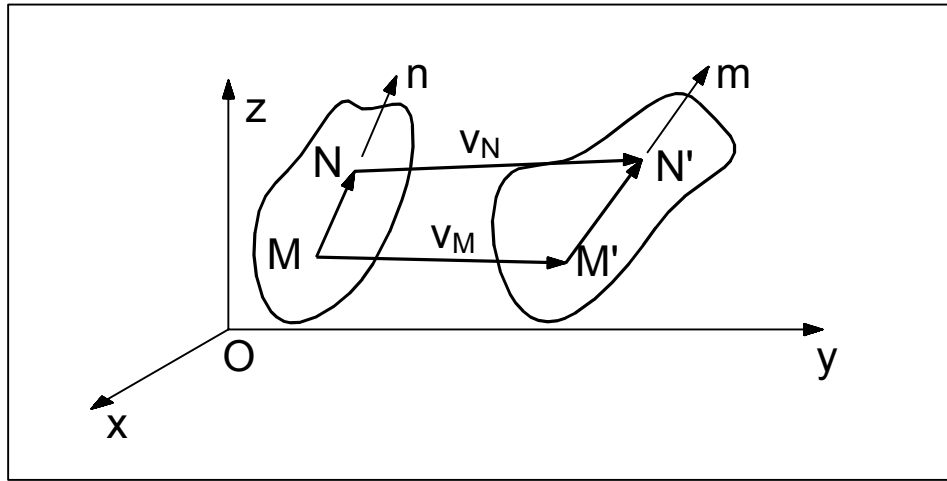


Figura 1.3: Dilatazione lineare specifica.

Per l'ipotesi dei piccoli gradienti di spostamento le (1.11) rappresentano le dilatazioni lineari specifiche, mentre le (1.12) assumono il significato di scorrimenti angolari. In particolare considerando i punti M e N ed i loro trasformati M' e N' la dilatazione lineare specifica è definita come (fig. 1.3):

$$\Delta_n = \frac{|N'-M'| - |N-M|}{|N-M|}$$

mentre, con la simbologia della figura 1.4, lo scorrimento angolare è definito come:

$$\Gamma_{mn} = \varphi_{mn} - \varphi'_{mn}.$$

In base quindi alle precedenti considerazioni diventa possibile individuare le componenti del moto dovute alla sola deformazione, ovvero:

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

e quindi grazie a questa ultima espressione diventa possibile valutare gli spostamenti dei punti dell'intorno I di $A(x_1, y_1, z_1)$ in conseguenza alla sola deformazione pura dell'intorno stesso.

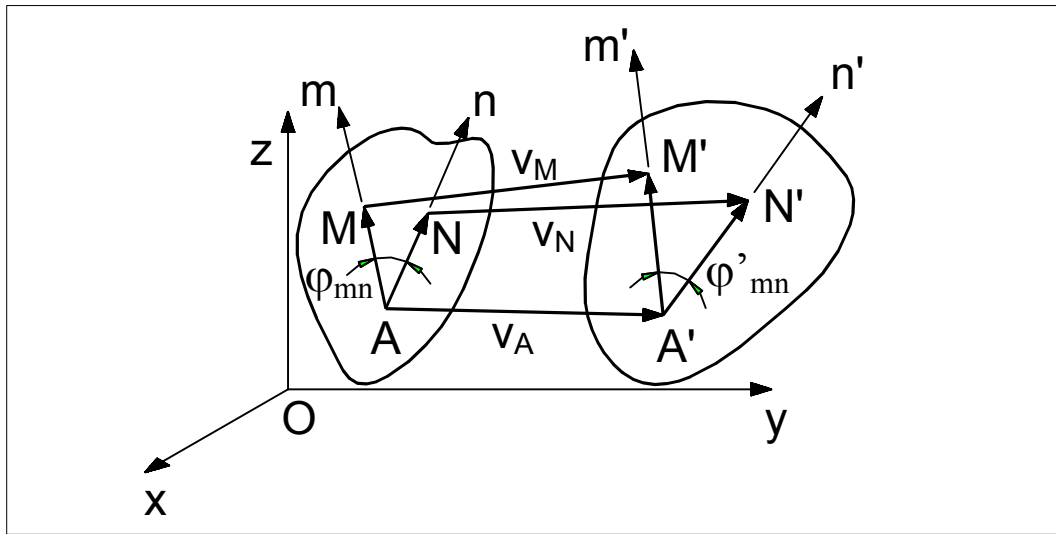


Figura 1.4: Definizione di scorrimento angolare.

In conclusione si può affermare che la deformazione di un corpo risulta completamente descritta dal *tensore di deformazione* $[\varepsilon]$, tuttavia è d'obbligo sottolineare come al variare della terna di riferimento varino anche le componenti del tensore in esame. Infatti assegnato il campo degli spostamenti \mathbf{v} , le componenti di tale vettore vengono definite solo in funzione del riferimento estrinseco, pertanto se viene fatto variare il riferimento, variano anche le componenti del campo \mathbf{v} e quindi risultano modificati i valori delle componenti del tensore di deformazione.

1.1.1. Deformazioni principali e loro direzioni

Si consideri ora un intorno I, ove sia definito il tensore $[\varepsilon]$, del punto $A(x, y, z)$ nella configurazione indeformata C; sia $A'(x', y', z')$ il trasformato di A; sia altresì assegnato il vettore spostamento $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ relativo unicamente alla deformazione pura (fig. 1.5). Ci si propone ora di determinare le rette del fascio di centro O i cui punti abbiano il vettore spostamento avente la stessa direzione di dette rette, questa condizione può essere espressa imponendo che il segmento OA sia parallelo al segmento AA' , ovvero:

$$\frac{v_x}{x} = \frac{v_y}{y} = \frac{v_z}{z} = \frac{|A'-O| - |A-O|}{|A-O|} = \frac{|A'-A|}{|A-O|} = \Delta$$

Se le rette in esame esistono, allora per ognuno dei punti A di tali rette devono essere valide le relazioni:

$$v_x = \Delta x; \quad v_y = \Delta y; \quad v_z = \Delta z.$$

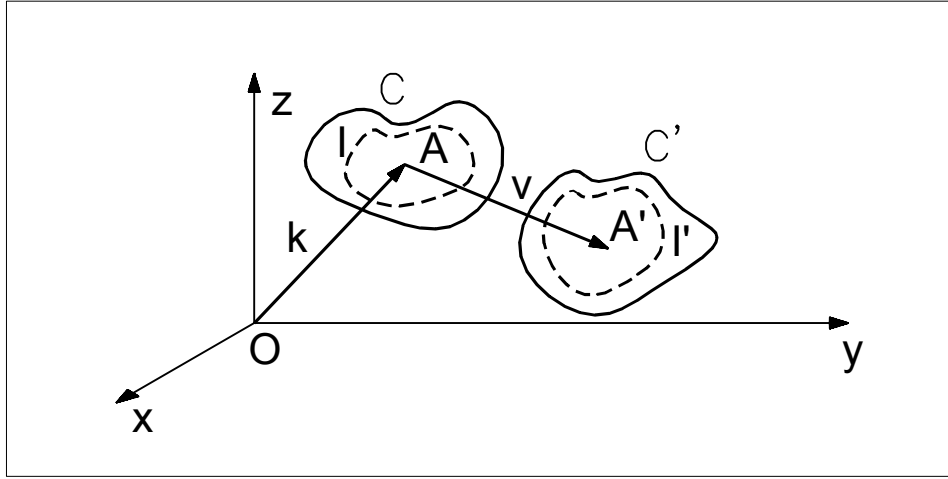


Figura 1.5: Vettore spostamento relativo a deformazione pura.

Si definiscano ora i coseni direttori a_x, a_y, a_z di tali rette:

$$a_x = \frac{x}{|A-O|}; \quad a_y = \frac{y}{|A-O|}; \quad a_z = \frac{z}{|A-O|}$$

In base a queste assunzioni, e ricordando la (1.14), è possibile scrivere il sistema che permette di determinare le *deformazioni principali* $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$:

$$\begin{bmatrix} (\epsilon_x - \Delta) & \frac{1}{2}\epsilon_{xy} & \frac{1}{2}\epsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{yx} & (\epsilon_y - \Delta) & \frac{1}{2}\epsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{zx} & \frac{1}{2}\epsilon_{zy} & (\epsilon_z - \Delta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Affinché il sistema precedente sia risolubile occorre che il determinante della prima matrice a primo membro si annulli; tale condizione può essere soddisfatta risolvendo l'*equazione secolare*:

$$\Delta^3 - I_{1\epsilon}\Delta^2 - I_{2\epsilon}\Delta - I_{3\epsilon} = 0 \quad (1.16)$$

quando siano definiti il *primo, secondo e terzo invariante di deformazione*:

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$I_{2\varepsilon} = - \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

$$I_{2\varepsilon} = \det[\varepsilon]$$

Perché dalla (1.15) non si ottenga la soluzione banale occorre imporre anche un'ulteriore condizione sui coseni direttori:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1.$$

Dalla (1.16), con le limitazioni imposte, si ottengono, nel caso più generale, tre soluzioni reali:

$$\Delta = \varepsilon_x; \quad \Delta = \varepsilon_y; \quad \Delta = \varepsilon_z,$$

che sostituite una alla volta nella (1.15) permettono di ottenere i coseni direttori delle tre *direzioni principali* cercate:

$$\{\xi\} = \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{bmatrix}; \quad \{\eta\} = \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{bmatrix}; \quad \{\varsigma\} = \begin{bmatrix} \varsigma_x \\ \varsigma_y \\ \varsigma_z \end{bmatrix}.$$

La determinazione delle direzioni principali avviene pertanto risolvendo un problema agli *autovalori*. È importante sottolineare, a conclusione di quanto detto, come le tre soluzioni ottenute rappresentino una *base ortonormale* [2] poiché i tre vettori in esame, oltre ad essere linearmente indipendenti, risultano tra loro mutuamente ortogonali.

1.2. Lo stato tensionale

Le forze applicate ad un corpo possono essere di due tipi: *forze di superficie* e *forze di volume*.

Con riferimento alla figura 1.6 si considerino un elemento di superficie ΔS contenente il punto M e un elemento di volume ΔV contenente il punto N. Sia $\Delta \mathbf{P}$ la risultante delle forze agenti su ΔS , e sia $\Delta \mathbf{F}$ la risultante delle forze agenti su ΔV .

Si definisce allora la forza di superficie \mathbf{p} come:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{P}}{dS} = \mathbf{p} = \mathbf{p}(M),$$

mentre la forza di massa \mathbf{f} risulta definita da:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \mathbf{f} = \mathbf{f}(N)$$

La definizione di questi due tipi di forze è stata data supponendo implicitamente che il corpo fosse in equilibrio, ma non si è assolutamente specificato se l'analisi dello stato tensionale venisse eseguita nella configurazione deformata o in quella indeformata. Nell'ipotesi però dei piccoli spostamenti si può supporre che anche i gradienti di spostamento siano piccoli in confronto all'unità, quindi la configurazione iniziale può essere confusa con la configurazione finale, rendendo lecita la possibilità di riferirsi alla sola *configurazione indeformata* [1].

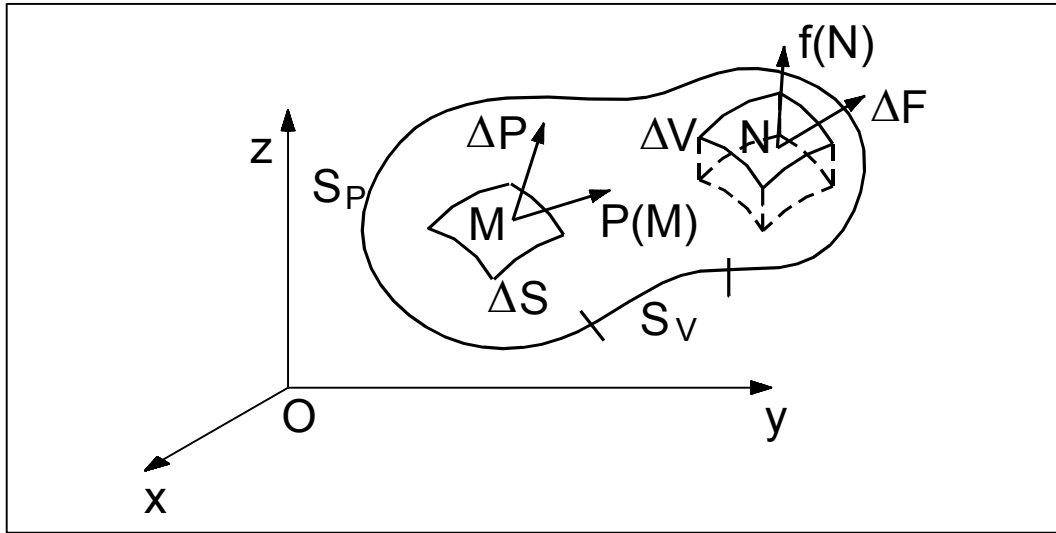


Figura 1.6: Forze di volume e forze di superficie.

Supponiamo ora di avere un corpo inizialmente in equilibrio, per cui, cioè, siano verificate le equazioni cardinali della statica. Si consideri un punto A interno al volume e si esegua una sezione con un piano passante per il punto A. Affinché siano mantenute le condizioni di equilibrio occorre che sulla faccia di sezione del corpo (I) agisca una forza uguale alla risultante di quelle che il corpo (II) esercitava su (I) prima che avvenisse il sezionamento (fig. 1.7).

Eseguendo un'analisi locale, e quindi riferendosi ad un intorno Ω di A(x,y,z) si può definire il *vettore tensione in A relativo alla giacitura Ω_A* :

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta\Omega_A \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta\Omega_A} = \frac{d\mathbf{T}}{d\Omega_A}.$$

Poiché le giaciture passanti per A sono in numero infinito, per ciascuna di esse si può definire un vettore tensione \mathbf{t} . È logico intuire che tale vettore, come anche le sue componenti, varia al variare del piano rispetto al quale viene valutato:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}_n.$$

Se si sceglie un riferimento locale *Ansr* come in figura 1.8, le componenti del vettore tensione possono essere riscritte come: $\mathbf{t}(\sigma_n, \tau_{ns}, \tau_{nr})$.

La componente σ_n si definisce *componente di tensione normale*, le componenti τ_{ns} e τ_{nr} si definiscono *componenti di tensione tangenziali*, mentre con

$$\tau_n = \sqrt{\tau_{ns} + \tau_{nr}}$$

si indica la *componente tangenziale totale*.

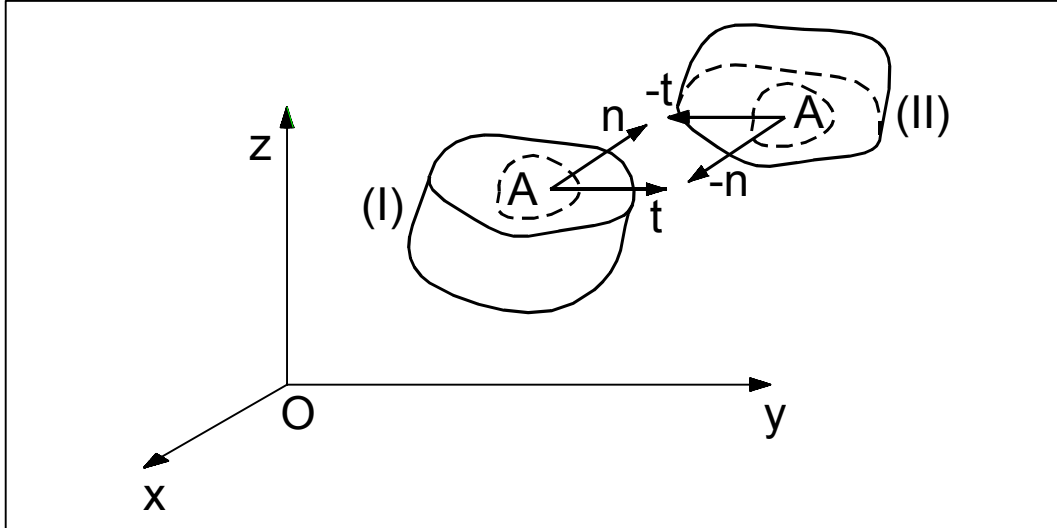


Figura 1.7: Vettore tensione.

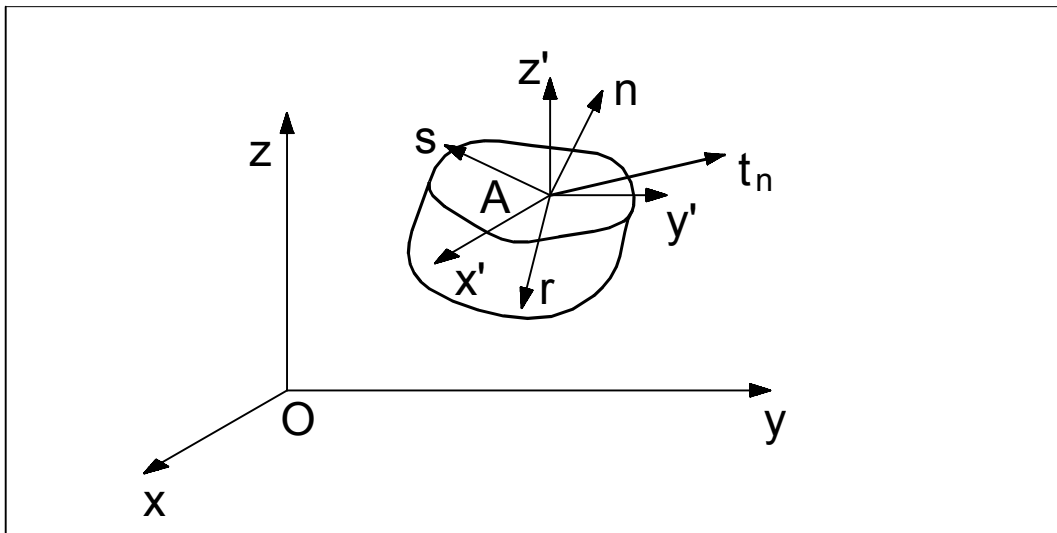


Figura 1.8: Componenti del vettore tensione.

Si è già accennato in precedenza come la definizione del vettore \mathbf{t}_n dipenda dalla giacitura del piano di sezione; la determinazione del legame tra il vettore \mathbf{t}_n e la normale \mathbf{n} a tale piano permette di arrivare alla definizione del *tensore degli sforzi*.

Si consideri un volume tetraedrico avente come vertice il punto A. Sia O l'origine del sistema di riferimento Oxyz orientato in modo che i piani coordinati siano paralleli ai piani individuati dai tre spigoli del tetraedro incidenti in A (fig. 1.9).

Con la simbologia della figura in esame e sfruttando la condizione di equilibrio data dalla prima equazione della statica (le cui notazioni sono riferite alla figura 1.6):

$$\mathbf{R} = \int_S \mathbf{p}(\mathbf{M})dV + \int_V \mathbf{p}(\mathbf{N})dV = 0 \quad (1.17)$$

si può dimostrare [3] che, trascurando i contributi dati dai termini $\mathbf{f}dV$ nella (1.17) perché di ordine superiore rispetto ai termini $\mathbf{p}dS$, vale la relazione:

$$\mathbf{t}_n = t_x \mathbf{n}_x + t_y \mathbf{n}_y + t_z \mathbf{n}_z$$

che può essere espressa in forma scalare come:

$$\begin{aligned} t_{nx} &= t_{xx}n_x + t_{xy}n_y + t_{xz}n_z = \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z \\ t_{ny} &= t_{yx}n_x + t_{yy}n_y + t_{yz}n_z = \tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z \\ t_{nz} &= t_{zx}n_x + t_{zy}n_y + t_{zz}n_z = \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{aligned} \quad (1.18)$$

con

$$\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z).$$

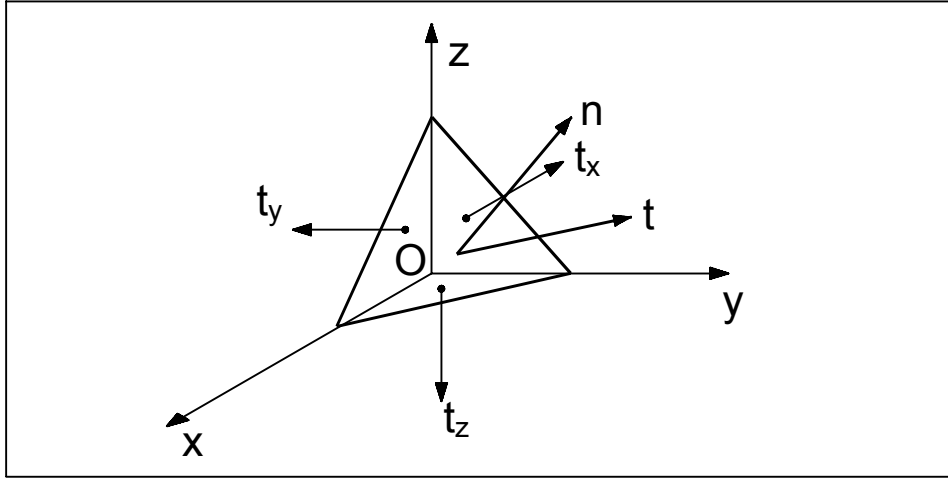


Figura 1.9: Tetraedro di Cauchy.

Le (1.18), dette equazioni di Cauchy, possono essere definite anche in forma matriciale, ovvero:

$$\begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

ove la prima matrice a secondo membro viene indicata con $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Sfruttando le condizioni imposte dalla seconda equazione cardinale della statica (le notazioni sono riferite alla figura 1.6):

$$\mathbf{M}_0 = \int_S (\mathbf{M} - \mathbf{O}) \otimes \mathbf{p}(\mathbf{M}) dS + \int_V (\mathbf{N} - \mathbf{O}) \otimes \mathbf{f}(\mathbf{N}) dV$$

si può dimostrare [3] che il tensore $[\sigma]$ è un tensore doppio-simmetrico, ovvero che valgono le relazioni:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

e in conclusione *il tensore degli sforzi* risulta esprimibile come:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

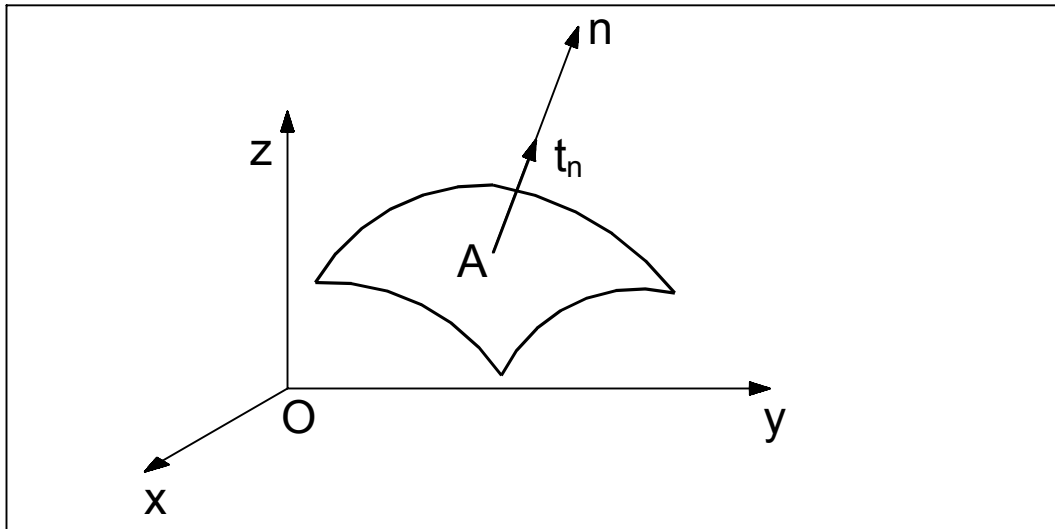


Figura 1.10: Tensione principale.

1.2.1. Tensioni principali e loro direzioni

Supponiamo ora che sia assegnato il tensore degli sforzi in un punto A di un solido. Si vuole ora mostrare come esistono almeno tre giaciture, dette *giaciture principali*, a due a due ortogonali, per le quali il vettore tensione ha direzione normale alle giaciture in esame; se tali piani esistono allora *le componenti tangenziali dello sforzo risultano essere nulle*.

Ammettiamo di aver individuato una giacitura principale e sia $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$ il versore della sua normale in A (fig. 1.10).

In base a queste assunzioni si ha che le componenti del vettore tensione possono essere espresse sia come:

$$t_{n1} = \sigma_n n_x; \quad t_{n2} = \sigma_n n_y; \quad t_{n3} = \sigma_n n_z$$

sia come:

$$t_{n1} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z$$

$$t_{n2} = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z$$

$$t_{n3} = \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zz} n_z$$

ed eguagliando membro a membro si ottiene, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_n) & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & (\sigma_{yy} - \sigma_n) & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & (\sigma_{zz} - \sigma_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Questo sistema ammette soluzione solo se il determinante della prima matrice a primo membro si annulla, ovvero se è soddisfatta *l'equazione secolare*:

$$\sigma_n^3 - I_{1\sigma} \sigma_n^2 - I_{2\sigma} \sigma_n - I_{3\sigma} = 0$$

quando siano definiti il *primo*, *secondo* e *terzo invariante di tensione*:

$$I_{1\sigma} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_{2\sigma} = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - (\sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \sigma_{zz} + \sigma_{yy} \sigma_{zz})$$

$$I_{3\sigma} = \det[\sigma]$$

Affinché dalla risoluzione del sistema (1.20) non si ottenga la soluzione banale occorre imporre anche una condizione sui coseni direttori, ovvero:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.$$

Dall'equazione secolare, per le condizioni imposte, si ottengono gli autovalori della matrice $[\sigma]$, che prendono il nome di *tensioni principali*, e tali valori risultano essere sempre reali.

Con un procedimento analogo a quello visto nel paragrafo 1.1.2. una volta note dall'equazione secolare le tensioni principali σ_ξ , σ_η , σ_ζ si possono ricavare le *direzioni principali*:

$$\{\xi\} = \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{bmatrix}; \quad \{\eta\} = \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{bmatrix}; \quad \{\zeta\} = \begin{bmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \end{bmatrix}.$$

Tali direzioni rappresentano gli autovettori di una matrice simmetrica, pertanto, essendo mutuamente ortogonali e linearmente indipendenti, individuano una base ortonormale.

1.3. Il corpo elastico

La descrizione della deformazione di un elemento di materia a seguito dell'applicazione di un sistema di carichi può essere ottenuta una volta che sia noto il legame tra le *componenti di tensione* e le *componenti di deformazione*.

Si definisce *corpo elastico* un sistema in cui l'energia assorbita durante la fase di carico venga completamente restituita durante la fase di scarico.

Si può facilmente intuire come una ipotesi di questo tipo implichi l'accettazione di un modello ideale, ovvero caratterizzato solo da trasformazioni internamente reversibili. Nella realtà, invece, in virtù del Secondo Principio della Termodinamica, l'energia che viene fornita al sistema per deformarlo non verrà mai completamente restituita, dando così origine a fenomeni di *isteresi elastica*.

Nel seguito di questa breve trattazione considereremo solo il modello ideale di *corpo perfettamente elastico*.

Si consideri il sistema inizialmente nella *configurazione naturale* C ; a seguito dell'applicazione di una risultante di forze si ha una deformazione del sistema stesso fino al raggiungimento della *configurazione finale* C' . Risulta importante sottolineare come ipotizzeremo che la trasformazione $C \rightarrow C'$ avvenga attraverso il passaggio per infiniti stati di equilibrio; analogamente ipotizzeremo che, una volta che il sistema viene scaricato, si verifichi una trasformazione (ancora reversibile) inversa alla precedente, che riporta il corpo nella configurazione naturale C .

Questo fenomeno implica la presenza di un ente, denominato *energia elastica*, capace di far compiere lavoro negativo ad un insieme di forze.

Pertanto un processo di deformazione elastica con recupero completo della deformazione può essere pensato come una trasformazione di lavoro meccanico in energia elastica durante il processo di carico (trasformazione $C \rightarrow C'$), ed una trasformazione dell'energia elastica in lavoro durante la fase di recupero della deformazione (trasformazione $C' \rightarrow C$).

Si consideri ora un solido avente frontiera $S = S_p + S_v$ soggetto all'azione di forze di volume $\mathbf{f}(\mathbf{N})$ e di forze di superficie $\mathbf{p}(\mathbf{M})$ (fig. 1.6).

Le forze di massa agiscano in tutto il volume V del corpo, mentre le forze di superficie interessino solo la porzione di frontiera S_p di S ; sia altresì assegnato in ogni punto il vettore spostamento $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$.

Ipotizziamo ora di sollecitare il corpo con un processo di carico quasistatico reversibile. A seguito di una tale trasformazione si ottiene sia che l'insieme di tensioni generate internamente, forze di volume e forze di superficie danno origine ad un sistema di forze *staticamente ammissibile*, sia che il sistema di spostamenti e deformazioni origina un *sistema congruente* [1]. Si indichino ora con

$$\mathbf{p}^* = (p_x^*, p_y^*, p_z^*)$$

$$\mathbf{f}^* = (f_x^*, f_y^*, f_z^*)$$

i valori delle forze di superficie e di volume in un istante intermedio t della fase di carico. Si indichino, parimenti, con

$$[\sigma^*] = \begin{bmatrix} \sigma^*_{xx} & \tau^*_{xy} & \tau^*_{xz} \\ \tau^*_{xy} & \sigma^*_{yy} & \tau^*_{yz} \\ \tau^*_{xz} & \tau^*_{yz} & \sigma^*_{zz} \end{bmatrix}$$

il tensore degli sforzi, e con

$$\mathbf{v}^* = (v^*_x, v^*_y, v^*_z)$$

$$[\varepsilon^*] = \begin{bmatrix} \varepsilon^*_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon^*_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon^*_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon^*_{xy} & \varepsilon^*_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon^*_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon^*_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon^*_{yz} & \varepsilon^*_{zz} \end{bmatrix}$$

rispettivamente il campo degli spostamenti e il tensore delle deformazioni nel solito istante t intermedio alla fase di carico.

Poiché ad una variazione infinitesima dello stato tensionale è legata sempre una deformazione infinitesima (i tensori $[\sigma^*]$ ed $[\varepsilon^*]$ costituiscono un sistema congruente) risulta ora possibile definire le *variazioni di lavoro esterno ed interno*:

$$\delta L_{\text{est}} = \int_V \mathbf{f}^* \delta \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}^* \delta \mathbf{v} dS \quad (1.21)$$

$$\delta L_{\text{int}} = \int_V \delta \phi dV \quad (1.22)$$

ove nella (1.22) venga definito con $\delta \phi$ l'aumento infinitesimo di lavoro interno riferito all'unità di volume; in particolare si ha:

$$\delta \phi = \sigma^*_{xx} \delta \varepsilon^*_{xx} + \sigma^*_{yy} \delta \varepsilon^*_{yy} + \sigma^*_{zz} \delta \varepsilon^*_{zz} + \tau^*_{xy} \delta \varepsilon^*_{xy} + \tau^*_{xz} \delta \varepsilon^*_{xz} + \tau^*_{zy} \delta \varepsilon^*_{zy} \quad (1.23)$$

In virtù del Principio dei Lavori Virtuali è possibile scrivere:

$$\delta L_{\text{est}} = \delta L_{\text{int}},$$

e sostituendo nella precedente la (1.21) e la (1.22) si ottiene *l'identità integrale fondamentale della Meccanica* (Filonenko - Borodich, 1947):

$$\int_V \mathbf{f}^* \delta \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}^* \delta \mathbf{v} dS = \int_V \delta \phi dV. \quad (1.24)$$

Consideriamo ora il solo lavoro interno durante l'intero processo di carico; tale lavoro può essere ottenuto per integrazione della (1.22):

$$L_{\text{int}} = \int_C^C \int_V \delta \phi dV = \int_V \int_C^C \delta \phi dV. \quad (1.25)$$

ove si considerino gli estremi di integrazione C e C' espressi in funzione delle componenti del tensore di deformazione:

$$C \equiv (0,0,0,0,0,0)$$

$$C' \equiv (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})$$

Possiamo quindi concludere che un corpo è allo *stato elastico* se per ogni processo di carico è valida per ogni punto la relazione:

$$\int_C^{C'} \delta\phi = \phi(C') - \phi(C), \quad (1.26)$$

ovvero se per ogni processo di carico la variazione della funzione ϕ , detta *densità di energia elastica*, dipende solo dallo stato iniziale e dallo stato finale e non dal processo seguito nella trasformazione $C \rightarrow C'$.

Estendendo questo ragionamento a tutto il corpo si può definire *l'energia elastica del corpo*, esprimibile come:

$$\Phi = \int_V \phi dV.$$

Pertanto in un corpo allo stato elastico tutto il lavoro di deformazione viene trasformato in energia che viene immagazzinata nel corpo come lavoro interno; In virtù di questa osservazione potremmo allora scrivere che:

$$L_{\text{int}} = \Phi(C') - \Phi(C).$$

Ritornando ora a considerare la funzione *densità di energia elastica* $\delta\phi$ si può constatare come per la relazione (1.26) quando un corpo è allo stato elastico la grandezza in esame rappresenti un differenziale esatto, ovvero:

$$\begin{aligned} \delta\phi = & \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{xx}^*} \delta\varepsilon_{xx}^* + \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{yy}^*} \delta\varepsilon_{yy}^* + \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{zz}^*} \delta\varepsilon_{zz}^* + \\ & + \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{xy}^*} \delta\varepsilon_{xy}^* + \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{xz}^*} \delta\varepsilon_{xz}^* + \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{yz}^*} \delta\varepsilon_{yz}^* \end{aligned} \quad (1.27)$$

e confrontando la (1.23) con la (1.27) si ottiene che:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{xx}^*}, \sigma_{yy}^* = \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{yy}^*}, \sigma_{zz}^* = \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{zz}^*} \\ \tau_{xy}^* &= \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{xy}^*}, \tau_{xz}^* = \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{xz}^*}, \tau_{yz}^* = \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{yz}^*} \end{aligned}$$

In analogia a quanto fatto in precedenza per la funzione $\Delta\phi$ definiamo ora la grandezza $\delta\phi_c$:

$$\delta\phi_C = \varepsilon_{xx}^* \delta\sigma_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^* \delta\sigma_{yy}^* + \varepsilon_{zz}^* \delta\sigma_{zz}^* + \varepsilon_{xy}^* \delta\tau_{xy}^* + \varepsilon_{xz}^* \delta\tau_{xz}^* + \varepsilon_{zy}^* \delta\tau_{zy}^*$$

Sommando alla precedente la (1.23) si ottiene:

$$\delta\phi + \delta\phi_C = \delta(\varepsilon_{xx}^* \sigma_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^* \sigma_{yy}^* + \varepsilon_{zz}^* \sigma_{zz}^* + \varepsilon_{xy}^* \tau_{xy}^* + \varepsilon_{xz}^* \tau_{xz}^* + \varepsilon_{yz}^* \tau_{yz}^*) \quad (1.28)$$

Nelle ipotesi di corpo perfettamente elastico il termine $\Delta\phi$ e il secondo membro della (1.28) sono differenziali esatti, pertanto anche il termine $\Delta\phi_C$ risulta essere tale; in virtù di quanto appena affermato risultano valide le seguenti relazioni:

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial\phi_C}{\partial\sigma_{xx}^*}, \varepsilon_{yy}^* = \frac{\partial\phi_C}{\partial\sigma_{yy}^*}, \varepsilon_{zz}^* = \frac{\partial\phi_C}{\partial\sigma_{zz}^*}$$

$$\varepsilon_{xy}^* = \frac{\partial\phi_C}{\partial\tau_{xy}^*}, \varepsilon_{xz}^* = \frac{\partial\phi_C}{\partial\tau_{xz}^*}, \varepsilon_{yz}^* = \frac{\partial\phi_C}{\partial\tau_{yz}^*}$$

La grandezza ϕ_C viene definita *potenziale elastico complementare* e risulta essere funzione delle componenti del tensore degli sforzi.

Il potenziale elastico e il potenziale elastico complementare rappresentano, pertanto, i legami tra tensioni e deformazioni che permettono di definire completamente il comportamento meccanico di un corpo.

1.3.1. Leggi di Hooke

Il potenziale elastico complementare in virtù delle definizioni date risulta essere una grandezza scalare esprimibile come forma quadratica nelle componenti del tensore dello sforzo:

$$\phi_C = \phi_C(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$$

La funzione ϕ_C si presenta come una grandezza indipendente dalla terna di riferimento scelta e, pertanto, esprimendo il potenziale elastico complementare in funzione delle tensioni principali, il valore di detta grandezza non varia.

Si indichino con $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$ le tensioni principali e con $\alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta$ gli angoli di Eulero che permettono di individuare l'orientazione degli assi di riferimento principali rispetto alla terna estrinseca Oxyz.

In base alle assunzioni fatte il potenziale elastico complementare può essere espresso come funzione delle tensioni principali e degli angoli di Eulero:

$$\phi_C = \phi_C(\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta, \alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta)$$

ove ϕ_C risulta ancora funzione di sei variabili indipendenti.

Introduciamo ora l'*ipotesi di isotropia* del materiale, ovvero ipotizziamo che le proprietà del materiale in un intorno di un punto non dipendano dalle direzioni uscenti dal punto

stesso. Come detto poco sopra il potenziale ϕ_c risulta essere indipendente dalla terna principale di riferimento assunta, e quindi risulterà essere solo funzione delle componenti principali di tensione:

$$\phi_c = \phi_c(\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\varsigma)$$

Possiamo ora scrivere la forma quadratica più generale del potenziale complementare elastico, utilizzando solo le tensioni principali [1]:

$$\phi_c = \frac{1}{2}(k_{11}\sigma_\xi^2 + k_{22}\sigma_\eta^2 + k_{33}\sigma_\varsigma^2 + 2k_{12}\sigma_\xi\sigma_\eta + 2k_{13}\sigma_\xi\sigma_\varsigma + 2k_{23}\sigma_\eta\sigma_\varsigma).$$

Nel caso di isotropia la funzione ϕ_c deve risultare simmetrica rispetto alle variabili k_{ij} (per $i, j=1, 2, 3$). In questo caso la precedente equazione può essere espressa come:

$$\phi_c = a(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\varsigma^2) + b(\sigma_\xi\sigma_\eta + \sigma_\xi\sigma_\varsigma + \sigma_\eta\sigma_\varsigma). \quad (1.29)$$

Le variabili a e b vengono solitamente definite in funzione delle *costanti del materiale* E , detta *modulo di Young*, e ν , detta *coefficiente di Poisson*:

$$a = \frac{1}{2E}; \quad b = -\frac{\nu}{E}$$

potendo quindi esprimere la (1.29) come:

$$\phi_c = \frac{1}{2E}(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\varsigma^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_\xi\sigma_\eta + \sigma_\xi\sigma_\varsigma + \sigma_\eta\sigma_\varsigma);$$

ricordando ora anche le definizioni di primo e secondo invariante di tensione la precedente può essere espressa come:

$$\phi_c = \frac{1}{2E}[I_{1\sigma}^2 + 2(1+\nu)I_{2\sigma}]$$

Note le costanti E e ν è possibile introdurre una ulteriore costante, di notevole utilità, detta *prima costante di Lamè*:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

In virtù delle assunzioni fatte, la (1.30) può essere espressa nella seguente forma:

$$\phi_c = \frac{1}{2E}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + \frac{1}{2G}(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)$$

Ricordando ora che le componenti del tensore di deformazione vengono determinate dalla conoscenza della funzione del potenziale elastico complementare, risulta possibile

ricavare il legame tra deformazioni e componenti speciali di tensione, ovvero è possibile ricavare le *Leggi generalizzate di Hooke*:

$$\frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{xx}} = \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{yy}} = \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$$

$$\frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{zz}} = \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

$$\frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{xy}} = \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}$$

$$\frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{xz}} = \varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}$$

$$\frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{yz}} = \varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}$$

Dalle precedenti è possibile ricavare anche le *leggi inverse generalizzate di Hooke*:

$$\sigma_{xx} = 2G[h\varepsilon_{xx} + \nu^*(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})]$$

$$\sigma_{yy} = 2G[h\varepsilon_{yy} + \nu^*(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})]$$

$$\sigma_{zz} = 2G[h\varepsilon_{zz} + \nu^*(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})]$$

$$\sigma_{xy} = G \varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = G \varepsilon_{xz}$$

$$\sigma_{yz} = G \varepsilon_{yz}$$

quando vengano definite le costanti:

$$h = \frac{1-\nu}{1-2\nu}; \nu^* = \frac{\nu}{1-2\nu}.$$

In conclusione le leggi di Hooke per un corpo lineare e isotropo permettono di determinare la deformazione noto lo stato tensionale; viceversa le leggi inverse generalizzate permettono di risalire allo stato tensionale note le componenti del tensore della deformazione.

1.4. I cerchi di Mohr

Si voglia ora determinare lo *stato tensionale triassiale* nell'intorno di un generico punto. Sia allora assegnato un punto P (fig. 1.11), un piano di normale \mathbf{n} passante per tale punto e il vettore tensione \mathbf{t}_n , vettore che può essere decomposto normalmente e tangenzialmente al piano in analisi ottenendo, rispettivamente, la tensione normale σ_n tensione tangenziale τ_n (fig. 1.11).

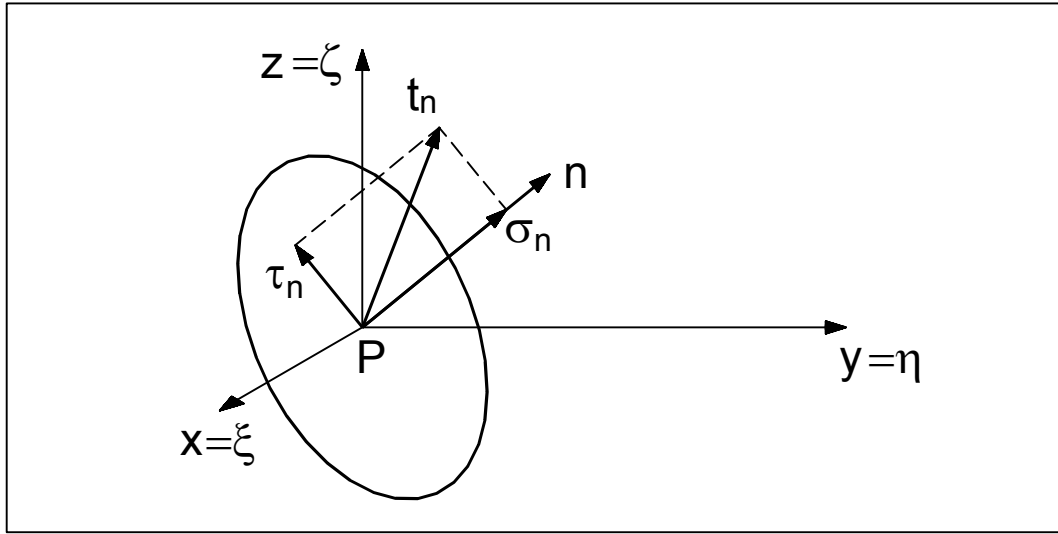


Figura 1.11: Vettore tensione nel punto P.

Si assuma una terna di riferimento principale con assi ξ , η , ζ e avente origine in P. Sia, altresì, assegnato il tensore degli sforzi valutato rispetto a tale sistema di riferimento:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\zeta} \end{bmatrix}.$$

Sulla giacitura per P avente normale $\mathbf{n}(n_{\xi}, n_{\eta}, n_{\zeta})$ il vettore tensione $\mathbf{t}_{\mathbf{n}}$ ha componenti:

$$t_{n\xi} = \sigma_{\xi}n_{\xi}; \quad t_{n\eta} = \sigma_{\eta}n_{\eta}; \quad t_{n\zeta} = \sigma_{\zeta}n_{\zeta} \quad (1.31)$$

mentre la tensione normale σ_n può essere espressa come:

$$\sigma_n = \sigma_{\xi}n_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}n_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}n_{\zeta}^2 \quad (1.32)$$

Note le componenti σ_n e $\mathbf{t}_{\mathbf{n}}$ e utilizzando il teorema di Pitagora è possibile anche calcolare il valore della tensione tangenziale totale τ_n :

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = t_n^2 = t_{n\xi}^2 + t_{n\eta}^2 + t_{n\zeta}^2. \quad (1.33)$$

Sostituendo, ora, nell'ultimo membro della (1.33) le espressioni date dalla (1.31) si ottiene:

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_{\xi}^2 n_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 n_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 n_{\zeta}^2. \quad (1.34)$$

In conclusione, considerando, oltre alle (1.32) e (1.34), anche la solita condizione sui coseni direttori $n_{\xi}^2 + n_{\eta}^2 + n_{\zeta}^2 = 1$, si può scrivere il seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & \sigma_\eta^2 & \sigma_\varsigma^2 \\ \sigma_\xi & \sigma_\eta & \sigma_\varsigma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_\xi^2 \\ n_\eta^2 \\ n_\varsigma^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ \sigma_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tale sistema ha come incognite $n_\xi^2, n_\eta^2, n_\varsigma^2$; altresì risulta caratterizzato dai due parametri σ_n, τ_n , mentre le tensioni $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\varsigma$ risultano note, poiché si è supposto noto il tensore degli sforzi.

Il Teorema di Rouché-Capelli, in virtù del fatto che la matrice completa e la matrice incompleta del sistema hanno lo stesso rango, assicura che il sistema lineare in questione sia risolubile [2]. Si possono calcolare, pertanto, le seguenti soluzioni:

$$n_\xi^2 = \frac{\left(\sigma_n - \frac{\sigma_\eta + \sigma_\varsigma}{2} \right)^2 + \tau_n^2 - \left(\frac{\sigma_\eta - \sigma_\varsigma}{2} \right)^2}{(\sigma_\xi - \sigma_\eta)(\sigma_\xi - \sigma_\varsigma)} \quad (1.36)$$

$$n_\eta^2 = \frac{\left(\sigma_n - \frac{\sigma_\xi + \sigma_\varsigma}{2} \right)^2 + \tau_n^2 - \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\varsigma}{2} \right)^2}{(\sigma_\eta - \sigma_\xi)(\sigma_\eta - \sigma_\varsigma)} \quad (1.37)$$

$$n_\varsigma^2 = \frac{\left(\sigma_n - \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2} \right)^2 + \tau_n^2 - \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \right)^2}{(\sigma_\varsigma - \sigma_\xi)(\sigma_\varsigma - \sigma_\eta)} \quad (1.38)$$

Ipotizzando ora che:

$$\sigma_\xi \geq \sigma_\eta \geq \sigma_\varsigma$$

si ottiene il segno dei denominatori delle soluzioni (1.36), (1.37), (1.38):

$$(\sigma_\xi - \sigma_\eta)(\sigma_\xi - \sigma_\varsigma) \geq 0$$

$$(\sigma_\eta - \sigma_\xi)(\sigma_\eta - \sigma_\varsigma) \geq 0$$

$$(\sigma_\varsigma - \sigma_\xi)(\sigma_\varsigma - \sigma_\eta) \geq 0$$

ma, poiché le soluzioni $n_\xi^2, n_\eta^2, n_\varsigma^2$ risultano essere tutte grandezze positive, si può determinare, in virtù delle disequazioni precedenti, il segno del numeratore delle soluzioni stesse:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_\eta + \sigma_\varsigma}{2} \right)^2 + \tau_n^2 - \left(\frac{\sigma_\eta - \sigma_\varsigma}{2} \right)^2 \geq 0 \quad (1.39)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_\xi + \sigma_\varsigma}{2} \right)^2 + \tau_n^2 - \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\varsigma}{2} \right)^2 \leq 0 \quad (1.40)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2} \right)^2 + \tau_n^2 - \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \right)^2 \geq 0 \quad (1.41)$$

Consideriamo ora un intorno sferico di raggio unitario del punto P (fig. 1.12); il punto P risulti anche l'origine di un sistema di riferimento principale $P\xi\eta\zeta$. La superficie $d\Omega_P$ contenete il punto P in esame abbia normale $\mathbf{n}(n_\xi, n_\eta, n_\zeta)$, e tale normale individui un punto B sulla superficie sferica dell'intorno stesso.

Nelle ipotesi, però, di intorno sferico unitario la superficie piana $d\Omega_P$, tangente alla sfera in B, ha normale coincidente con \mathbf{n} e le tensioni che agiscono su $P \in d\Omega_P$ e $B \in d\Omega_P$ possono essere ritenute coincidenti.

Se viene anche assegnato il tensore degli sforzi $[\sigma]$ nel punto P si può dimostrare che esiste una corrispondenza, data dal sistema lineare (1.35), tra il punto $B(n_\xi, n_\eta, n_\zeta)$, appartenente allo *spazio geometrico*, e il punto $B'(\sigma_n, \tau_n)$ di un piano cartesiano fittizio $\sigma\tau$ detto *piano delle tensioni*.

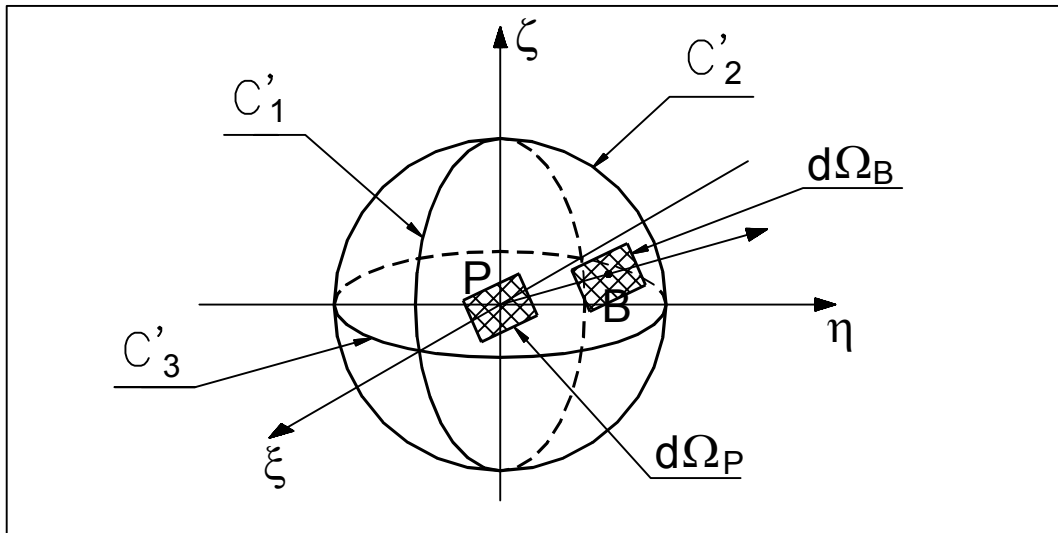


Figura 1.12: Intorno sferico di raggio unitario.

Consideriamo inizialmente le (1.39), (1.40), (1.41) e imponiamo che i primi membri di dette relazioni si annullino (ovvero imponiamo di essere su una giacitura normale ad una direzione principale):

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_\eta + \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_n^2 - \left(\frac{\sigma_\eta - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 = 0 \quad (1.42)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_\xi + \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_n^2 - \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 = 0 \quad (1.43)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2} \right)^2 + \tau_n^2 - \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \right)^2 = 0 \quad (1.44)$$

Le (1.42), (1.43), (1.44) sopra scritte rappresentano le equazioni di tre circonferenze nel piano $\sigma\tau$ (fig. 1.13).

Ciascuna di dette circonferenze, ipotizzando ancora $\sigma_\xi \geq \sigma_\eta \geq \sigma_\zeta$, ha centro e raggio pari a:

$$C_1 \left(\frac{\sigma_\eta + \sigma_\zeta}{2}, 0 \right); R_1 = \frac{\sigma_\eta - \sigma_\zeta}{2}$$

$$C_2 \left(\frac{\sigma_\xi + \sigma_\zeta}{2}, 0 \right); R_2 = \frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2}$$

$$C_3 \left(\frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2}, 0 \right); R_3 = \frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2}.$$

I luoghi geometrici appena tracciati nel piano delle tensioni prendono il nome di *cerchi di Mohr*, mentre se si considera il modulo della tensione τ_n , e in conseguenza alle (1.39), (1.40), (1.41), si individua un dominio della soluzione detto *arbelo di Mohr*, e tratteggiato in figura 1.13.

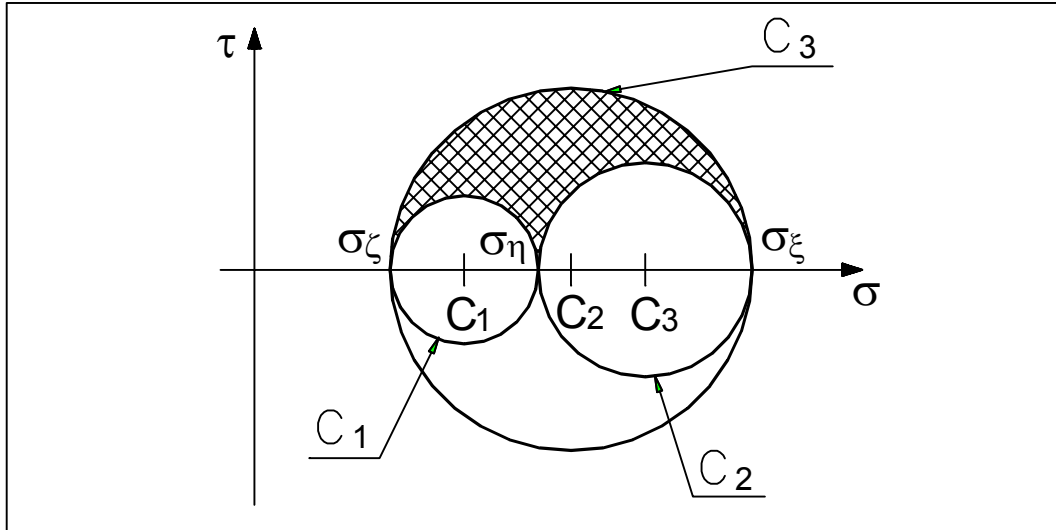


Figura 1.13: Circoli di Mohr

Analizziamo ora la relazione esistente tra spazio geometrico e piano delle tensioni nel caso di un intorno sferico unitario.

In virtù della definizione di direzioni principali e tensioni principali si può subito constatare come i punti appartenenti ai cerchi di Mohr C_1 , C_2 , C_3 tracciati nel piano delle tensioni siano i trasformati dei punti appartenenti ai cerchi massimi C'_1 , C'_2 , C'_3 della sfera rappresentante l'intorno di raggio unitario nello spazio geometrico (fig. 1.12 e fig. 1.13).

Dalla figura 1.13 si può anche constatare come tra i valori delle tre tensioni principali σ_ξ , σ_η , σ_ζ vi siano contenuti i valori massimo e minimo delle tensioni normali relative alle infinite giaciture passanti per P; altresì si può constatare come la massima tensione tangenziale τ_{\max} in un punto sia coincidente con il raggio del cerchio di Mohr più grande.

Sia ora P l'origine di un sistema di riferimento principale $P\xi\eta\zeta$. Si prenda in esame l'insieme delle giaciture aventi come sostegno l'asse ζ e normale $\mathbf{n}(n_\xi, n_\eta, n_\zeta=0)$.

Si indichi poi per ognuna di tali giaciture con \mathbf{k} il versore appartenente al piano $\xi\eta$ e ortogonale al vettore \mathbf{n} ad esse relativo.

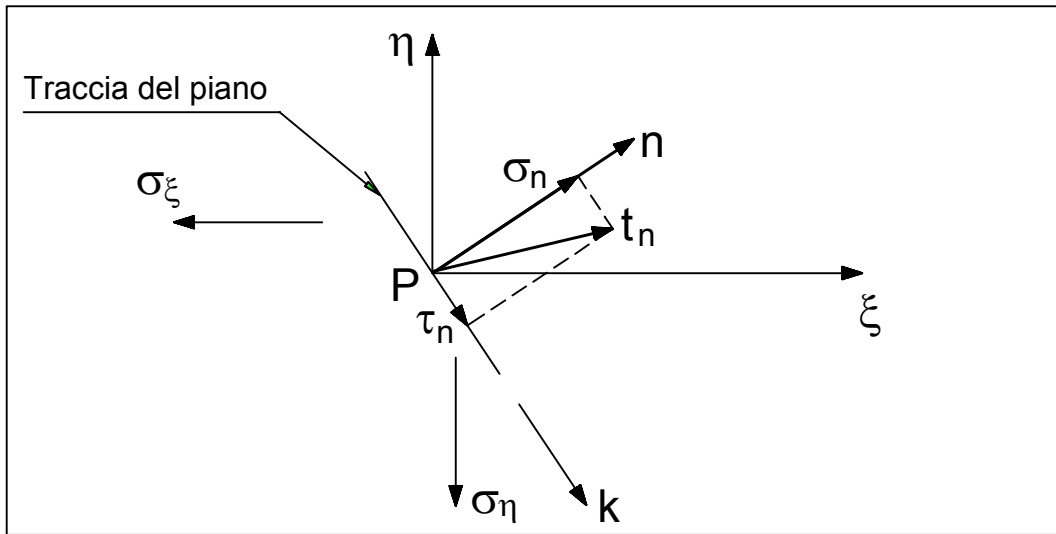


Figura 1.14: Proiezione della giacitura corrente sul piano $\xi\eta$.

Si analizzi ora la giacitura di figura 1.14. Su di essa agiscono il vettore tensione \mathbf{t}_n , scomponibile nella componente normale σ_n e nella componente tangenziale totale τ_n . La componente τ_n per convenzione viene ritenuta positiva se impone all'elemento di materia una rotazione in senso orario; il vettore \mathbf{k} si scelga con stesso verso della componente tangenziale totale τ_n .

I coseni direttori dei versori \mathbf{n} e \mathbf{k} risultano essere:

$$\alpha_\xi = \cos\phi; \quad \alpha_\eta = \sin\phi; \quad \alpha_\varsigma = 0;$$

$$\beta_\xi = \sin\phi; \quad \beta_\eta = -\cos\phi; \quad \beta_\varsigma = 0;$$

ove con ϕ si indica l'angolo di cui è ruotato il vettore \mathbf{n} rispetto all'asse ξ .

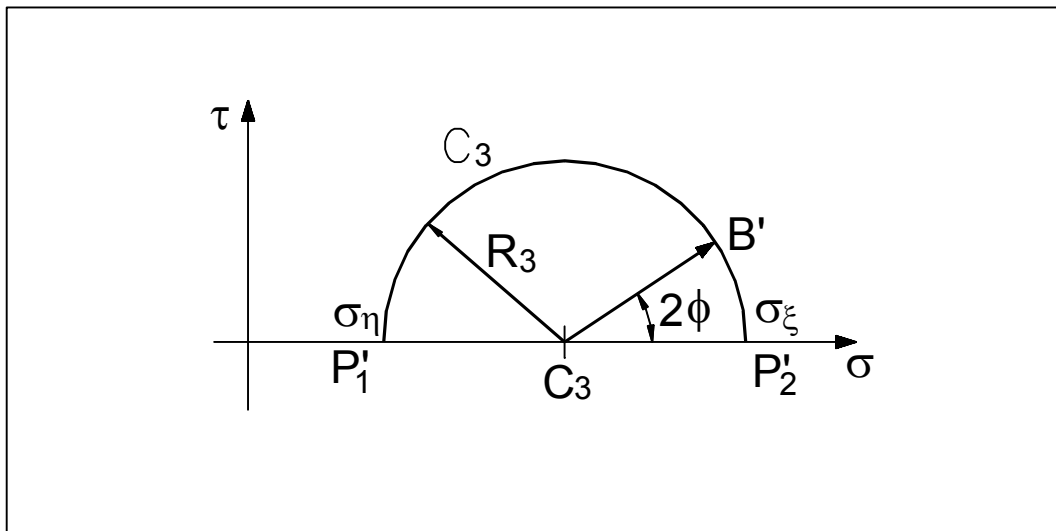


Figura 1.15: Piano delle tensioni.

In virtù delle precedenti uguaglianze la componente normale e la componente tangenziale totale possono essere espresse come:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_\xi \alpha_\xi^2 + \sigma_\eta \alpha_\eta^2 = \sigma_\xi \cos^2 \phi + \sigma_\eta \sin^2 \phi \\ \tau_n &= \sigma_\xi \alpha_\xi \beta_\xi + \sigma_\eta \alpha_\eta \beta_\eta = (\sigma_\xi - \sigma_\eta) \sin \phi \cos \phi.\end{aligned}$$

Utilizzando note relazioni trigonometriche le precedenti possono essere scritte come:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2} + \frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \cos 2\phi \quad (1.45)$$

$$\tau_n = (\sigma_\xi - \sigma_\eta) \frac{\sin 2\phi}{2} \quad (1.46)$$

le (1.45) e (1.46) rappresentano le equazioni del circolo di Mohr C_3 nel parametro ϕ e tracciato nel piano delle tensioni (fig. 1.15); tale luogo geometrico rappresenta le tensioni di tutte le giaciture aventi come sostegno la direzione principale ζ .

Analizziamo ora più in dettaglio la trasformazione che porta dal piano geometrico al piano delle tensioni considerando un intorno circolare di raggio unitario, appartenente al piano $\xi\eta$, e centrato in P. Ci si riferisca ad una terna principale $P\xi\eta\zeta$ (fig. 1.16).

Il generico punto B ha coordinate uguali ai coseni direttori del versore \mathbf{u} , e la direzione di tale vettore individua, in maniera univoca, la giacitura ad esso normale e avente come sostegno l'asse ζ .

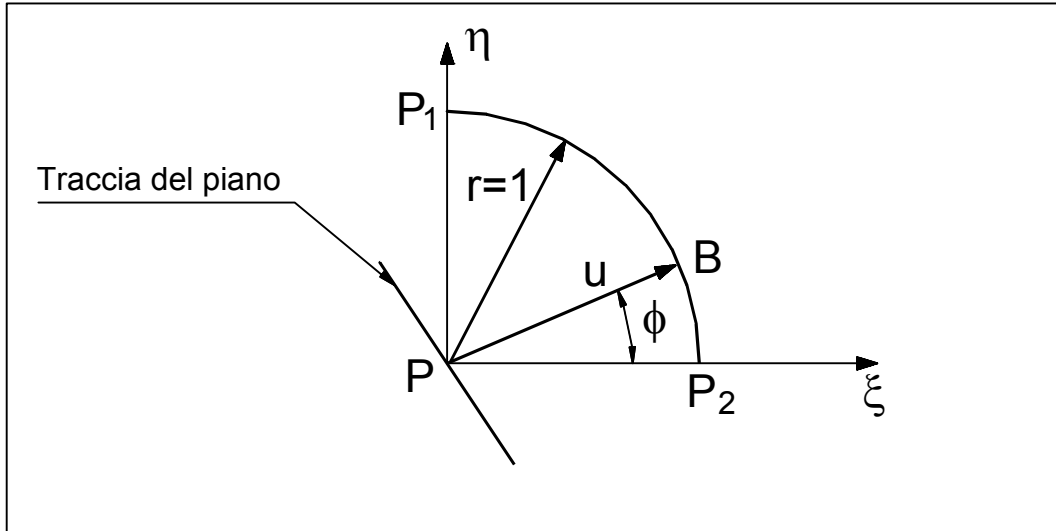


Figura 1.16: Intorno circolare di raggio unitario nel piano delle tensioni.

Per ottenere, quindi, il punto B' nel piano delle tensioni partendo dal punto B nel piano geometrico (fig. 1.16) e sapendo che il versore \mathbf{u} ha direzione ruotata di un angolo ϕ (misurato in senso antiorario) rispetto all'asse ξ , basterà tracciare la retta, nel piano $\sigma\tau$, passante per C_3 e ruotata di 2ϕ (sempre in senso antiorario) rispetto all'asse σ . In questa maniera si individua in modo univoco il punto B'(σ_n , τ_n) (fig. 1.15).

In particolare i punti P_1 e P_2 di figura 1.16 hanno come trasformati nel piano $\sigma\tau$ i punti P'_1 e P'_2 (fig. 1.15) che individuano lo stato tensionale relativo alle giaciture aventi come normale gli assi ξ e η .

Si può, in conclusione, affermare che utilizzando i cerchi di Mohr è possibile determinare lo stato tensionale relativo ad una giacitura avente come sostegno una direzione principale e la cui normale sia ruotata di un angolo ϕ rispetto ad una delle altre due direzioni principali.

Bibliografia

- [1] **E. Viola** - *Scienza delle costruzioni 1. Teoria dell'elasticità*. Pitagora Editrice Bologna, 1992.
- [2] **R. Moresco** - *Elementi di algebra e di geometria*. Ed. Libreria Progetto, 1992.
- [3] **A. di Tommaso** - *Fondamenti di Scienza delle costruzioni*. Patron, 1991.

