

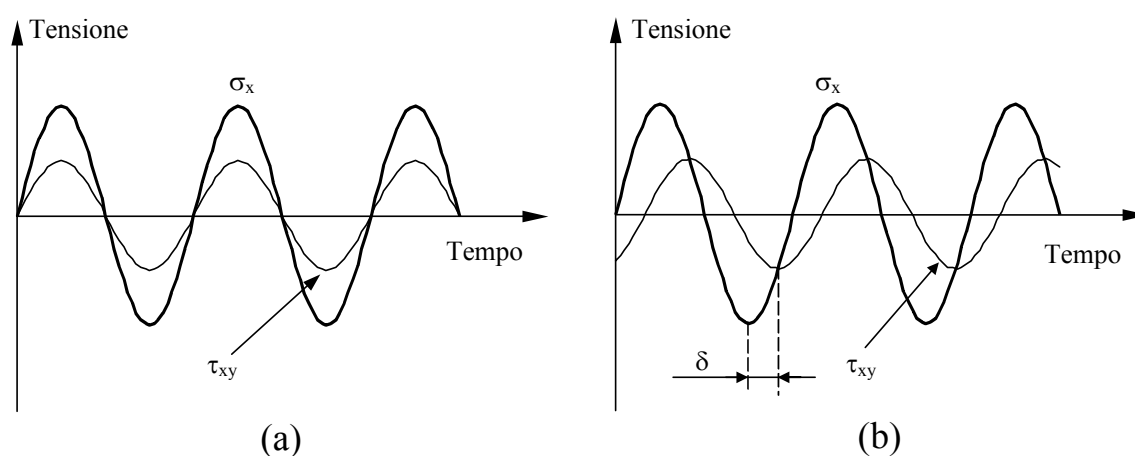
# Capitolo 3

## Storie di carico biassiali in fase e fuori fase con andamento sinusoidale

### 3.1. Storie di carico sinusoidali in fase e fuori fase

I componenti reali posso essere sollecitati in esercizio da sistemi di forze che variano nel tempo con legge molto complessa. In questi casi il calcolo delle grandezze ingegneristiche utili per la verifica a fatica multiassiale diventa molto oneroso e può essere affrontato solo mediante l'utilizzo di metodologie di tipo numerico.

Nel caso, però, in cui le forze in gioco varino con legge semplice, ad esempio sinusoidale, il problema si semplifica notevolmente e può essere affrontato con immediatezza mediante il calcolo manuale. Nei paragrafi successivi verrà trattato il problema del calcolo delle grandezze ingegneristiche di piano nel caso di sollecitazioni di trazione (o flessione) e torsione che variano nel tempo con leggi sinusoidali e con angoli di sfasamento qualsiasi.



**Figura 3.1:** Andamento temporale di storie di carico sinusoidali di trazione/torsione a  $R=-1$  in fase (a) e fuori fase (b).

#### 3.1.1. Storie di carico sinusoidali e definizione dell'angolo di fase $\delta$

Si consideri il componente cilindrico di fig. 2.1 e si ipotizzi che tale provino sia sollecitato da un carico di trazione/torsione che varia con legge sinusoidale. Nel sistema di riferimento assoluto Oxyz le due componenti di sollecitazione agenti possono essere descritte, nel dominio del tempo, come:

$$\begin{aligned}\sigma_x(t) &= \sigma_{x,m} + \sigma_{x,a} \sin(\omega t) \\ \tau_{xy}(t) &= \tau_{xy,m} + \tau_{xy,a} \sin(\omega t - \delta)\end{aligned}\tag{3.1}$$

dove  $\omega$  è la velocità angolare, funzione della frequenza  $f$ :

$$\omega = 2\pi f\tag{3.2}$$

mentre  $\delta$  rappresenta l'angolo di sfasamento fra le componenti di sollecitazione.

In figura 3.1 è stato riportato a titolo di esempio l'andamento di due storie di carico, una in fase (fig. 3.1a) e una sfasata con angolo  $\delta$  (3.1b). Osservando tale figura si comprende subito come nel caso di carichi in fase i valori massimi e minimi vengano raggiunti dalle due componenti nello stesso istante, mentre nel caso di storie di carico sfasate gli estremi assoluti vengano raggiunti in istanti diversi.

L'angolo di fase è un parametro molto importante nella progettazione a fatica multiassiale, poiché è stato osservato sperimentalmente che, a parità di ampiezze e valori medi delle componenti di sollecitazioni applicate, il danneggiamento a fatica aumenta all'aumentare di  $\delta$  e raggiunge il suo massimo valore per  $\delta=90^\circ$ .

Dal punto di vista fisico, tale fenomeno può essere spiegato osservando che, a parità di tutte le altre condizioni, i materiali metallici quando sono sollecitati da carichi ciclici non-proporzionali, ovvero fuori fase, mostrano un incrudimento aggiuntivo che amplifica il danneggiamento generato dai carichi applicati.

### 3.1.2. Schematizzazione della storia di carico per istanti significativi

Come detto, a rigore la determinazione delle grandezze utili nella progettazione a fatica multiassiale richiederebbe di analizzare l'intero evolvere della storia di carico. Questa operazione, anche se eseguita in modo automatico, può, però, risultare molto onerosa e necessitare di tempi di calcolo molto lunghi, tempi che, spesso, non risultano essere compatibili con le necessità di tipo industriale.

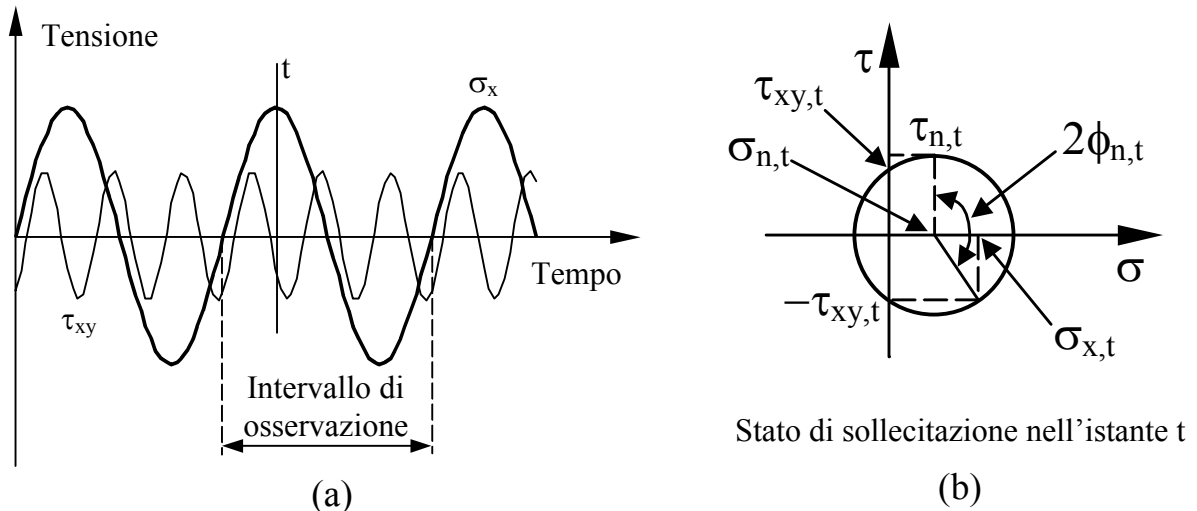
Per risolvere il problema comunque in modo efficiente si può pensare di introdurre una semplificazione, ovvero è possibile ridurre in modo drastico il numero dei punti utilizzati per descrivere la storia di carico.

Come si vedrà in modo più dettagliato nel prossimo capitolo molti criteri di progettazione si basano sull'utilizzo del concetto di piano critico, definito come quello che sperimenta la massima ampiezza della tensione tangenziale. Obiettivo, quindi, dei prossimi paragrafi sarà, allora, quello di determinare le grandezze di piano per alcuni casi di interesse applicativo.

Inizialmente, e come accennato poco sopra, per poter eseguire un progettazione a fatica multiassiale in modo semplice e rapido, è utile eseguire un filtraggio della storia di carico onde individuarne gli istanti realmente significativi. Si consideri, allora, la figura 3.2 relativa ad una storia di carico di flessione/torsione fuori fase con componenti di sollecitazione aventi frequenze diverse. Il calcolo delle grandezze di nostro interesse può essere eseguito considerando, nel loro ordinato sviluppo temporale, tutti gli istanti in cui ciascuno dei singoli canali considerati raggiunge un massimo od un minimo assoluto. Il dominio di osservazione deve essere ristretto al periodo di oscillazione della componente di sollecitazione avente frequenza più bassa (fig. 3.2a). In più il punto

iniziale della finestra di osservazione deve essere sempre trattato come un punto significativo nella descrizione della storia di carico; tale punto, per la periodicità del problema, risulta sempre equivalente in termini tensionali con il punto finale della finestra di osservazione.

A questo punto diventa semplice studiare lo stato tensionale in ciascuno degli istanti notevoli considerati. Il calcolo delle grandezze ingegneristiche di interesse può essere così eseguito a posteriori, ovvero dopo aver studiato tutti gli stati di tensione presenti negli istanti assunti come significativi per descrivere la storia di carico.



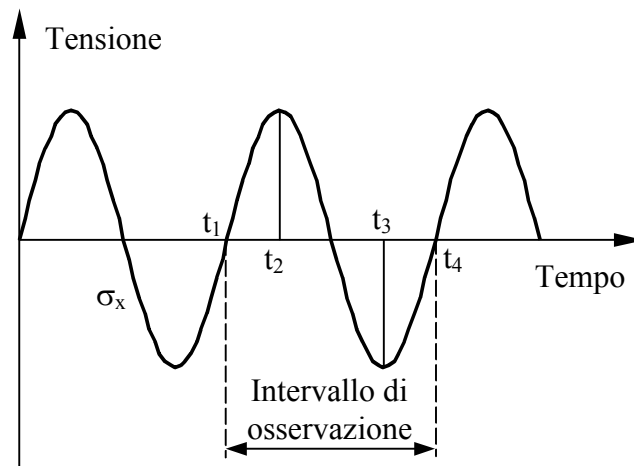
**Figura 3.2:** Andamento temporale di una storia di carico sinusoidale di trazione/torsione ( $R=-1$ ) con componenti di sollecitazione aventi frequenze diverse (a) e cerchio di Mohr relativo all'istante  $t$  (b).

Con riferimento alla figura 3.2a nell'istante  $t$  (coincidente con un massimo della sollecitazione di trazione) il componente in studio risulta soggetto ad un carico biassiale di trazione/torsione. Importante è innanzitutto sottolineare, e questo può facilmente essere evinto dal cerchio di Mohr di figura 3.2b, che nel caso di sollecitazioni di trazione/torsione, o flessione/torsione, il piano di massima tensione tangenziale,  $\tau_n$ , ha normale  $\mathbf{n}$  avente  $\theta=90^\circ$ . Si tratta, pertanto, di esplorare i piani perpendicolari alla superficie del componente e aventi come sostegno il punto ritenuto critico per la resistenza a fatica, punto in cui, ovviamente, anche le componenti di sollecitazione sono state in precedenza calcolate.

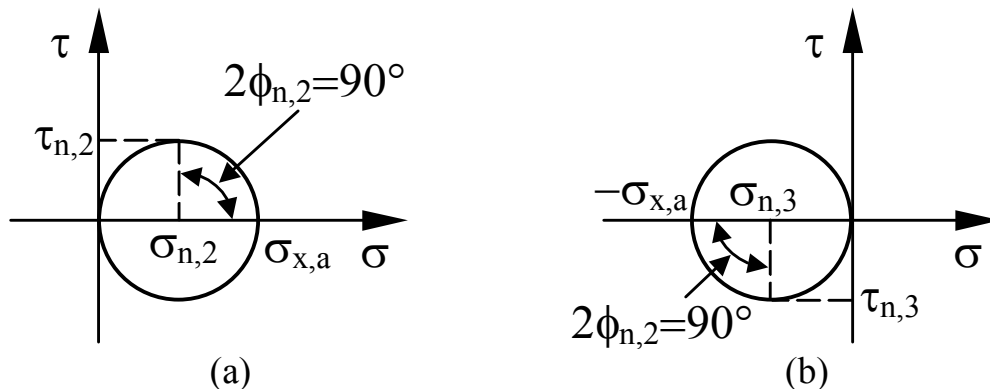
Infine è utile osservare come nel procedimento semplificato proposto nei paragrafi successivi il calcolo della massima ampiezza della tensione tangenziale verrà eseguito con il più semplice metodo della corda, metodo, quest'ultimo, che fornisce, per le particolari storie di carico considerate, risultati esattamente coincidenti a quelli dati dal più sofisticato metodo della più piccola ipersfera.

### 3.1.3. Sollecitazioni monoassiali

Si consideri inizialmente che il provino di figura 2.1 sia sollecitato da un carico di fatica monoassiale avente rapporto di sollecitazione,  $R$ , uguale a  $-1$ . In queste condizioni il valore della tensione media è nullo (fig. 3.3). Fissato l'intervallo di osservazione, corrispondente al periodo di oscillazione del carico monoassiale, la storia di carico può essere riassunta mediante quattro istanti significativi. Negli istanti  $t_1$  e  $t_4$  il carico è nullo e il problema può essere ulteriormente ridotto scartando l'istante finale perché, in termini tensionali, esattamente coincidente con lo stato iniziale. Negli istanti  $t_2$  e  $t_3$  il carico applicato raggiunge rispettivamente il suo valore massimo e minimo (fig. 3.3).



**Figura 3.3:** Andamento temporale di una storia di carico monoassiale avente rapporto di ciclo,  $R$ , pari a  $-1$ .



**Figura 3.4:** Circoli di Mohr negli istanti  $t_2$  (a) e  $t_3$  (b) della storia di carico di figura 3.3.

In figura 3.4 sono riportati i cerchi di Mohr relativi agli istanti di massima trazione (a) e di massima compressione (b).

In tabella 3.1 sono stati riassunti, invece, i valori, per ciascun istante significativo della storia di carico, delle diverse grandezze ingegneristiche prese in esame. In particolare si osserva come il piano che sperimenta il valore massimo e minimo della ampiezza della

tensione tangenziale sia sempre ruotato di  $\phi=45^\circ$  rispetto all'asse delle x. Su tale piano, allora, l'ampiezza della tensione tangenziale risulta pari a:

$$\tau_a = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_{x,a}}{2} - \left( -\frac{\sigma_{x,a}}{2} \right) \right] = \frac{\sigma_{x,a}}{2}$$

mentre la massima tensione normale è pari a:

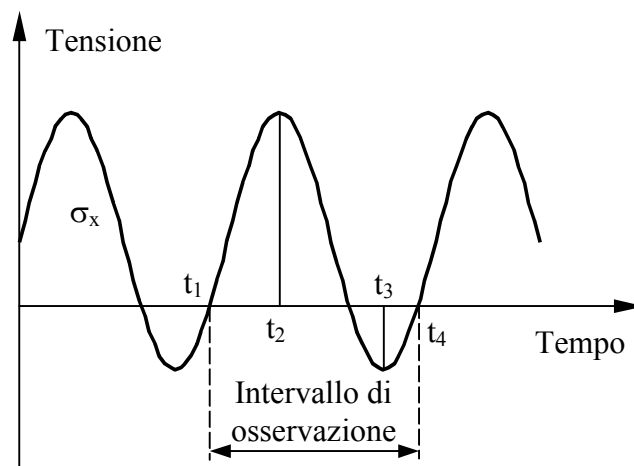
$$\sigma_{n,max} = \frac{\sigma_{x,a}}{2}.$$

Istante	$\tau_n$	$\sigma_n$	$\phi$
$t_1$	0	0	0
$t_2$	$\frac{\sigma_{x,a}}{2}$	$\frac{\sigma_{x,a}}{2}$	$45^\circ$
$t_3$	$-\frac{\sigma_{x,a}}{2}$	$-\frac{\sigma_{x,a}}{2}$	$45^\circ$
$t_4$	0	0	0

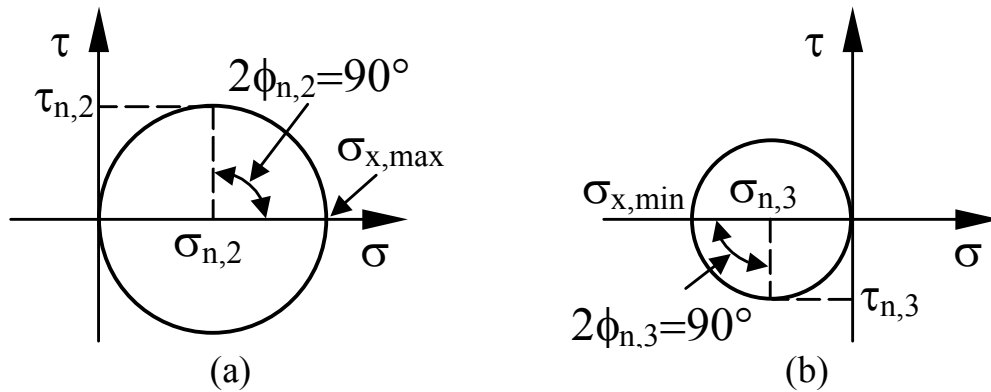
**Tabella 3.1**

In questo primo esempio è stato tenuto in considerazione anche l'istante  $t_4$  per completezza di analisi. Essendo, però, lo stato tensionale in tale istante coincidente con quello che si ha nell'istante  $t_1$  (per ovvi motivi di periodicità) nel seguito l'istante temporale finale della finestra di osservazione non verrà più tenuto in considerazione.

Un ulteriore esempio sulla metodologia utilizzata per il calcolo può essere fatto considerando il caso di un carico monoassiale avente valore medio della tensione diverso da zero, ovvero avente rapporto di ciclo, R, maggiore di  $-1$  (fig. 3.5). In figura 3.6 sono stati riportati i cerchi di Mohr relativi agli istanti  $t_2$  e  $t_3$  della storia di carico di figura 3.5.



**Figura 3.5:** Andamento temporale di una storia di carico monoassiale avente rapporto di ciclo, R, maggiore di  $-1$ .



**Figura 3.6:** Circoli di Mohr negli istanti  $t_2$  (a) e  $t_3$  (b) della storia di carico di figura 3.5.

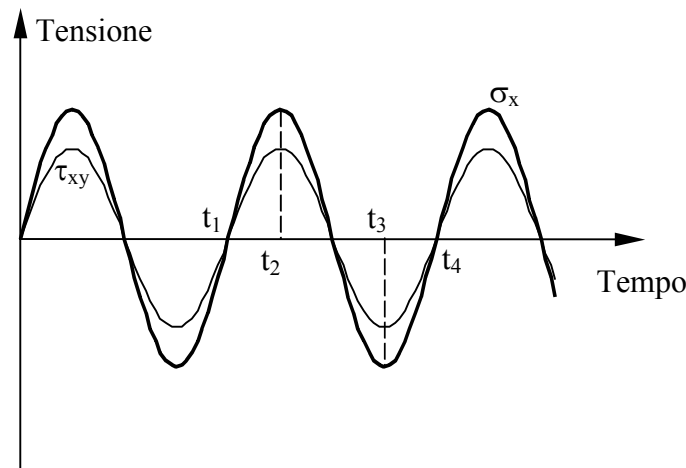
In tabella 3.2 sono stati ancora sintetizzati i valori delle grandezze di interesse nei diversi istanti considerati. Ancora si osserva che il piano di massima ampiezza della tensione tangenziale risulta inclinato di  $45^\circ$  rispetto all'asse delle ascisse del sistema di riferimento assoluto. Con riferimento alla tabella 3.2 e con ragionamenti analoghi a quelli fatti poco sopra, le grandezze relative al piano che sperimenta la massima ampiezza della tensione tangenziale possono essere calcolate come:

$$\tau_a = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_{x,max}}{2} - \frac{\sigma_{x,min}}{2} \right] = \frac{\sigma_{x,max} - \sigma_{x,min}}{4} = \frac{\sigma_{x,a}}{2}$$

$$\sigma_{n,max} = \frac{\sigma_{x,max}}{2}.$$

Istante	$\tau_n$	$\sigma_n$	$\phi$
$t_1$	0	0	0
$t_2$	$\frac{\sigma_{x,max}}{2}$	$\frac{\sigma_{x,max}}{2}$	$45^\circ$
$t_3$	$\frac{\sigma_{x,min}}{2}$	$\frac{\sigma_{x,min}}{2}$	$45^\circ$

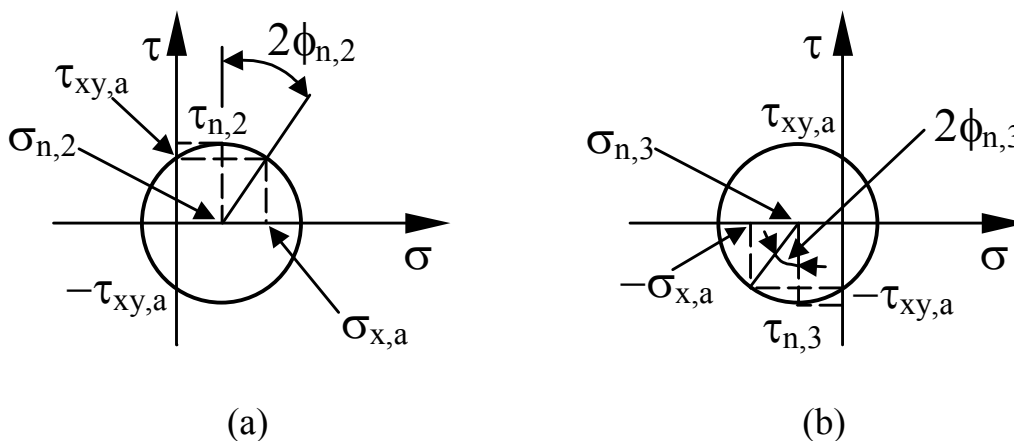
**Tabella 3.2**



**Figura 3.7:** Andamento temporale di una storia di carico di trazione/torsione in fase con valori nulli delle componenti medie di tensione.

### 3.1.4. Sollecitazioni biassiali in fase

Si consideri ora il caso di una sollecitazione di trazione/torsione in fase con valori nulli delle componenti medie di tensione (fig. 3.7). La finestra temporale viene fissata tra gli istanti  $t_1$  e  $t_4$ . Dalla figura 3.7 si evince come le due componenti di sollecitazione applicate raggiungano il loro valore massimo e minimo in modo simultaneo negli istanti  $t_2$  e  $t_3$ . Lo stato tensionale espresso in termini di cerchi di Mohr è stato descritto, invece, nella figura 3.8. Infine, in tabella 3.3 sono stati riassunti i valori delle grandezze ingegneristiche di interesse per la sollecitazione multiassiale presa in analisi.



**Figura 3.8:** Cerchi di Mohr negli istanti  $t_2$  (a) e  $t_3$  (b) della storia di carico di figura 3.7.

Istante	$\tau_n$	$\sigma_n$	$\phi$
$t_1$	0	0	0
$t_2$	$\sqrt{\frac{\sigma_{x,a}^2}{4} + \tau_{xy,a}^2}$	$\frac{\sigma_{x,a}}{2}$	$\frac{1}{2} \left[ \arccos \left( \frac{\tau_{xy,a}}{\tau_n} \right) \right]$
$t_3$	$-\sqrt{\frac{\sigma_{x,a}^2}{4} + \tau_{xy,a}^2}$	$-\frac{\sigma_{x,a}}{2}$	$\frac{1}{2} \left[ \arccos \left( \frac{ \tau_{xy,a} }{ \tau_n } \right) \right]$

**Tabella 3.3**

Dalla tabella 3.3 si può osservare come i valori delle tensioni tangenziali e normali negli istanti  $t_2$  e  $t_3$  siano relative allo stesso piano, poiché in tali due istanti  $\phi$  assume il medesimo valore. Concludendo, l'ampiezza della tensione tangenziale e il valore della tensione normale massima relative al piano critico sono pari, rispettivamente, a:

$$\tau_a = \sqrt{\frac{\sigma_{x,a}^2}{4} + \tau_{xy,a}^2}$$

$$\sigma_{n,max} = \frac{\sigma_{x,a}}{2}.$$

### 3.1.5. Sollecitazioni biassiali complesse

Nei paragrafi precedenti sono stati proposti alcuni esempi relativi a storie di carico monoassiali e biassiali semplici. A questo punto, più che continuare con altri esempi semplici, si preferisce trattare in modo esplicito il problema, formalizzando le espressioni per il calcolo delle grandezze di interesse in un istante generico di una storia di carico caratterizzata dalla contemporanea presenza di una componente assiale e di una componente tangenziale di sollecitazione.

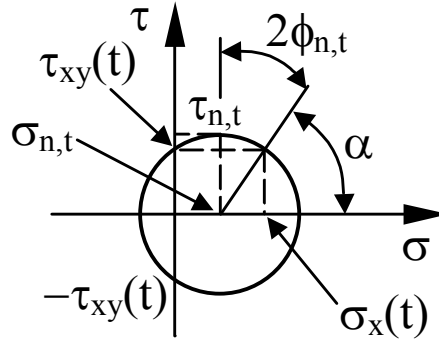
In particolare, si consideri un certo istante  $t$  interno alla finestra di osservazione, istante in cui il componente è sollecitato da un carico assiale di trazione,  $\sigma_x(t) > 0$ , e da uno di torsione,  $\tau_{xy}(t) > 0$ . In figura 3.9 è stato riportato il cerchio di Mohr relativo a tale istante. Dalla figura 3.9 si può con semplicità ricavare che:

$$\tau_n = \sqrt{\frac{\sigma_x^2(t)}{4} + \tau_{xy}^2(t)} \quad (3.3)$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x(t)}{2} \quad (3.4)$$



$$\phi = \frac{1}{2} \left( \arccos \frac{|\tau_{xy}(t)|}{|\tau_n|} \right) \Rightarrow \alpha = \arcsen \frac{|\tau_{xy}(t)|}{|\tau_n|} \Rightarrow |\tau_n| \sin \alpha = |\tau_{xy}(t)| \quad (3.5)$$



**Figura 3.9:** Cerchio di Mohr in un generico istante  $t$  dove lo stato di sollecitazione è dato da  $\sigma_x(t) > 0$  e da  $\tau_{xy}(t) > 0$ .

Mediante le relazioni precedenti è, così, possibile determinare i valori di  $\tau_n$ ,  $\sigma_n$  e  $\phi$  in tutti i diversi istanti mediante in quali è stata schematizzata la storia di carico, ponendo particolare attenzione all'attribuzione del segno alla componente tangenziale,  $\tau_n$ .

A questo punto, diventa di fondamentale importanza sottolineare che, nel caso più generale, la procedura proposta porta, al variare dell'istante considerato, alla determinazione di piani di massima  $\tau$  aventi orientazione diversa. Ciascuno di tali piani potrebbe essere, poi, potenzialmente quello critico (ma anche no!). Per individuare, allora, tale piano occorre, a questo punto, determinare, tra tutte le giaciture individuate, che al più sono in numero pari al numero di istanti in cui è stata suddivisa la storia di carico, quella che sperimenta la massima ampiezza della tensione tangenziale. Per fare ciò diventa necessario determinare, per ogni giacitura individuata, il valore che assume su di essa la tensione tangenziale in ogni istante significativo della storia di carico. Tale operazione potrebbe essere fatta utilizzando tutte le relazioni introdotte nel paragrafo 2.2. Tali relazioni, però, hanno validità generale e adoperarle in una tale veste nel calcolo manuale potrebbe generare degli errori. Un modo attento di procedere potrebbe essere, allora, quello di riscrivere tali relazioni facendo in modo che esse possano essere applicate solo per studiare stati biassiali di tensione generati da una componente assiale,  $\sigma_x$ , e da una componente torsionale,  $\tau_{xy}$ . Più precisamente, assumendo  $\theta = 90^\circ$ , le relazioni (2.11)-(2.13) possono essere riscritte in forma semplificata come (dove  $\sigma$  e  $\tau$  sono le componenti di tensione normale e tangenziale ad un generico piano individuato dalle coordinate polari  $\phi$ ,  $\theta = 90^\circ$ ):

$$\sigma(\phi, \theta = 90^\circ) = \frac{\sigma_x}{2} [1 + \cos 2\phi] - \tau_{xy} \sin 2\phi \quad (3.6)$$

$$\tau(\phi, \theta = 90^\circ) = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi \quad (3.7)$$

Forse non è superfluo ribadire ancora che le due relazioni precedenti valgono solo nel caso di carichi di trazione (o flessione) e torsione e non possono essere utilizzate per eseguire la ricerca del piano critico in presenza di stati più complessi di sollecitazione, perché ciò potrebbe portare a pericolosi errori.

La procedura appena discussa potrebbe risultare di primo acchito piuttosto complessa. Tuttavia, essa risulta, in realtà, alquanto semplice da applicare, come dovrebbe evincersi dagli esempi numerici riportati nel paragrafo successivo.

Infine, è importante osservare come la procedura proposta sia una procedura semplificata con non sempre consente di definire in modo esatto la posizione del piano critico. Infatti, non è caso raro imbattersi in situazioni in cui nessuno dei piani di massima tensione tangenziale, individuati negli istanti utilizzati per schematizzare la storia di carico, sia quello critico. Tuttavia, quanto proposto consente di determinare il piano critico, problema in generale molto complesso, solamente a mezzo di semplici calcoli manuali. Concludendo, è, però, opportuno sottolineare che le approssimazioni introdotte sono sempre ingegneristicamente trascurabili, con errori sulla stima delle grandezze di piano che difficilmente raggiungo il 5%.

## 3.2 Esempi applicativi

### Esempio 3.1

*Sia il componente di figura 2.1 sollecitato da un carico sinusoidale di fatica monoassiale avente ampiezza di 100 MPa e rapporto di ciclo,  $R$ , uguale a 0.2. La frequenza di applicazione del carico è pari a 10Hz. Si calcolino l'ampiezza della tensione tangenziale e la massima tensione normale relative al piano che sperimenta la massima ampiezza della tensione tangenziale (piano critico). Si determinino poi il valore dell'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico e il valore massimo della tensione idrostatica.*

Soluzione:

Da dati di partenza del problema si ricava che:

$$\sigma_{x,a}=100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,m} = \sigma_{x,a} \frac{R+1}{1-R} = 150 \text{ MPa}$$

$$\omega = 2\pi f = 62.83 \text{ rad/s}$$

L'evoluzione del carico applicato nel tempo può essere allora descritta come (fig. 3.10):

$$\sigma_x(t) = 150 + 100\sin(62.83t)$$

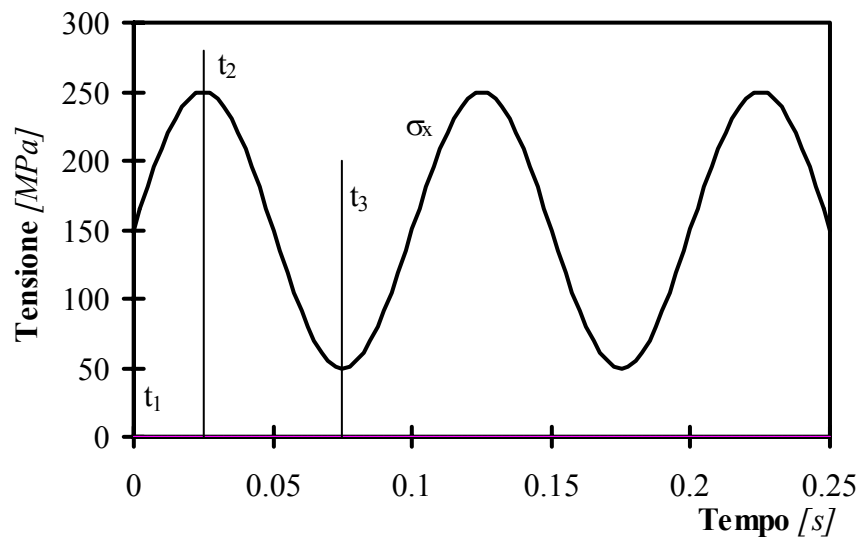
Assumendo come istante iniziale di osservazione l'istante  $t_1=0$  si ha che:

$$\sigma_x(t_1) = 150 \text{ MPa.}$$

Annullando la derivata prima della funzione  $\sigma_x(t)$  si ottiene che nel primo periodo la tensione raggiunge i valori massimo e minimo negli istanti  $t_2=0.025\text{s}$  e  $t_3=0.075\text{s}$ . In particolare in tali istanti si ha:

$$\sigma_x(t_2) = 250 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_x(t_3) = 50 \text{ MPa.}$$



**Figura 3.10:** Andamento temporale delle componenti di sollecitazione del esempio 3.1.

Osservando i cerchi di Mohr di figura 3.6 si osserva come il piano critico risulta sempre inclinato di  $45^\circ$  rispetto all'asse delle x. Negli istanti  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  la tensione tangenziale e normale al piano critico risultano:

Istante	$\tau_n$	$\sigma_n$	$\phi$
[s]	[MPa]	[MPa]	[ $^\circ$ ]
<b>0</b>	75	75	45
<b>0.025</b>	125	125	45
<b>0.075</b>	25	25	45

Come detto le grandezze di piano calcolate nei tre istanti di osservazione giacciono tutte su un piano caratterizzato da  $\theta=90^\circ$  e  $\phi=45^\circ$ . L'ampiezza della tensione tangenziale e il valore massimo della tensione normale relativi al piano critico risultano allora:

$$\tau_a = \frac{1}{2}[\tau_n(t_2) - \tau_n(t_3)] = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{n,\max} = \sigma_n(t_2) = 125 \text{ MPa.}$$

Si può ora calcolare il valore massimo della tensione idrostatica, tensione idrostatica che nei tre istanti di analisi vale:

$$\sigma_H(t_1) = \frac{\sigma_x(t_1)}{3} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_H(t_2) = \frac{\sigma_x(t_2)}{3} = 83.34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_H(t_3) = \frac{\sigma_x(t_3)}{3} = 16.67 \text{ MPa}$$

Ampiezza, valore medio e massimo di  $\sigma_H$  valgono allora:

$$\sigma_{H,m} = \frac{1}{2}(\sigma_{H,max} + \sigma_{H,min}) = \frac{1}{2}[\sigma_H(t_2) + \sigma_H(t_3)] = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{H,a} = \frac{1}{2}(\sigma_{H,max} - \sigma_{H,min}) = \frac{1}{2}[\sigma_H(t_2) - \sigma_H(t_3)] = 33.34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{H,max} = \sigma_{H,m} + \sigma_{H,a} = 83.34 \text{ MPa}.$$

Dalle (2.35) si osserva, infine, che il modulo del vettore che fornisce il valore della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico ha la sola componente  $S_1$  diversa da zero. Nei tre istanti assunti per descrivere la storia di carico tale componente assume i seguenti valori:

$$S_1(t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}[\sigma_x(t_1) - \sigma_H(t_1)] = 86.6 \text{ MPa}$$

$$S_1(t_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}[\sigma_x(t_2) - \sigma_H(t_2)] = 144.33 \text{ MPa}$$

$$S_1(t_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}[\sigma_x(t_3) - \sigma_H(t_3)] = 28.9 \text{ MPa}$$

Per determinare  $\sqrt{J_{2,a}}$  occorre accoppiare a due a due tutti gli istanti della storia di carico e determinare la coppia di istanti che massimizza la (2.37). In altre parole:

$$t_1-t_2 \quad D(t_1; t_2) = \sqrt{[S_1(t_1) - S_1(t_2)]^2} = 57.7 \text{ MPa}$$

$$t_1-t_3 \quad D(t_1; t_3) = \sqrt{[S_1(t_1) - S_1(t_3)]^2} = 57.7 \text{ MPa}$$

$$t_2-t_3 \quad D(t_2; t_3) = \sqrt{[S_1(t_2) - S_1(t_3)]^2} = 115.43 \text{ MPa}$$

L'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico risulta allora:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{D_{\max}}{2} = \frac{D(t_2; t_3)}{2} = 57.7 \text{ MPa}.$$

### Esempio 3.2

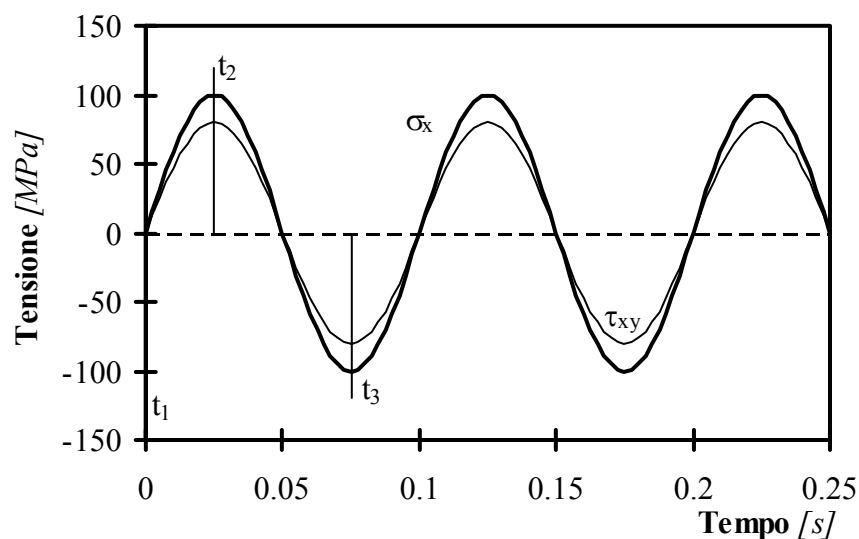
*Sia il provino di figura 2.1 sollecitato da un carico di flessione/torsione in fase che varia nel tempo con legge sinusoidale. Ambedue le componenti di sollecitazione hanno valori medi della tensione nulli. La componente di flessione ha ampiezza di 100 MPa, mentre quella di torsione ha ampiezza di 80 MPa. La frequenza di applicazione delle due componenti di carico è pari a 10Hz. Si calcolino l'ampiezza della tensione tangenziale e la massima tensione normale sul piano critico. Si determinino poi il valore dell'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico e il valore massimo della tensione idrostatica.*

Soluzione:

Dai dati forniti dal problema si ha che la storia di carico ha un andamento del tipo descritto dalla figura 3.7. Il problema, poi, suggerisce che:

$$\sigma_{x,a}=100 \text{ MPa}; \sigma_{x,m}=0 \text{ MPa}; \tau_{xy,a}=80 \text{ MPa}; \tau_{xy,m}=0 \text{ MPa}$$

$$\delta=0^\circ; \omega = 2\pi f = 62.83 \text{ rad/s}.$$



**Figura 3.11:** Andamento temporale delle componenti di sollecitazione del esempio 3.2.

Negli istanti  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  (fig. 3.11) le componenti istantanee di tensione valgono:

$$t_1=0 \text{ s: } \sigma_x(t_1)=0 \text{ MPa; } \tau_{xy}(t_1)=0 \text{ MPa}$$

$$t_2=0.025 \text{ s: } \sigma_x(t_2)=100 \text{ MPa; } \tau_{xy}(t_2)=80 \text{ MPa}$$

$$t_3=0.075 \text{ s: } \sigma_x(t_3)=-100 \text{ MPa; } \tau_{xy}(t_3)=-80 \text{ MPa}$$

I cerchi di Mohr relativi agli istanti  $t_2$  e  $t_3$  sono rappresentati in figura 3.8. Utilizzando le relazioni (3.3)-(3.4) è possibile compilare la seguente tabella:

<b>Istante</b>	<b><math>\tau_n</math></b>	<b><math>\sigma_n</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
<i>[s]</i>	<i>[MPa]</i>	<i>[MPa]</i>	<i>[°]</i>
<b>0</b>	0	0	-
<b>0.025</b>	94.34	50	16
<b>0.075</b>	-94.34	-50	16

Dalla tabella precedente si può osservare come la massima variazione della tensione tangenziale si abbia su un piano avente  $\theta=90^\circ$  e  $\phi=16^\circ$ . L'ampiezza della tensione tangenziale e la tensione normale massima a tale piano risultano allora:

$$\tau_a = \frac{1}{2} [\tau_n(t_2) - \tau_n(t_3)] = 90.34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{n,\max} = \sigma_n(t_2) = 50 \text{ MPa.}$$

Si può adesso calcolare il valore massimo della tensione idrostatica, tensione idrostatica che nei tre istanti di analisi vale:

$$\sigma_H(t_1) = \frac{\sigma_x(t_1)}{3} = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_H(t_2) = \frac{\sigma_x(t_2)}{3} = 33.34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_H(t_3) = \frac{\sigma_x(t_3)}{3} = -33.34 \text{ MPa}$$

Ampiezza, valore medio e massimo di  $\sigma_H$  valgono allora:

$$\sigma_{H,m} = \frac{1}{2} (\sigma_{H,\max} + \sigma_{H,\min}) = \frac{1}{2} [\sigma_H(t_2) + \sigma_H(t_3)] = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{H,a} = \frac{1}{2} (\sigma_{H,\max} - \sigma_{H,\min}) = \frac{1}{2} [\sigma_H(t_2) - \sigma_H(t_3)] = 33.34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{H,\max} = \sigma_{H,m} + \sigma_{H,a} = 33.34 \text{ MPa.}$$

Infine, per determinare  $\sqrt{J_{2,a}}$  occorre accoppiare a due a due tutti gli istanti della storia di carico e determinare quella coppia di istanti che massimizza la (2.37). In questo caso due delle componenti del vettore  $S(t)$  risultano diverse da zero. Ovvero:

$$S_1(t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_1) - \sigma_H(t_1)] = 0 \text{ MPa;} \quad S_3(t_1) = 0.$$

$$S_1(t_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_2) - \sigma_H(t_2)] = 57.7 \text{ MPa;} \quad S_3(t_2) = 80 \text{ MPa.}$$

$$S_1(t_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_3) - \sigma_H(t_3)] = -57.7 \text{ MPa;} \quad S_3(t_3) = -80 \text{ MPa.}$$

Accoppiando a due a due gli istanti in cui è stata schematizzata la storia di carico si ottiene:

$$t_1-t_2 \quad D(t_1; t_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 [S_i(t_1) - S_i(t_2)]^2} = 98.6 \text{ MPa}$$

$$t_1-t_3 \quad D(t_1; t_3) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 [S_i(t_1) - S_i(t_3)]^2} = 98.6 \text{ MPa}$$

$$t_2-t_3 \quad D(t_2; t_3) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 [S_i(t_2) - S_i(t_3)]^2} = 197.3 \text{ MPa}$$

Pertanto, l'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico risulta:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{D_{\max}}{2} = \frac{D(t_2; t_3)}{2} = 98.6 \text{ MPa.}$$

### Esempio 3.3

*Sia il provino di figura 2.1 sollecitato da un carico di flessione/torsione sfasato di 25° che varia nel tempo con legge sinusoidale. Ambedue le componenti di sollecitazione hanno valori medi della tensione pari a 40 MPa. La componente di flessione ha ampiezza di 80 MPa, mentre quella di torsione ha ampiezza di 60 MPa. La frequenza di applicazione delle due componenti di carico è pari a 10Hz. Si calcolino l'ampiezza della tensione tangenziale e la massima tensione normale sul piano critico. Si*

determinino, poi, il valore dell'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico e il valore massimo della tensione idrostatica.

Soluzione:

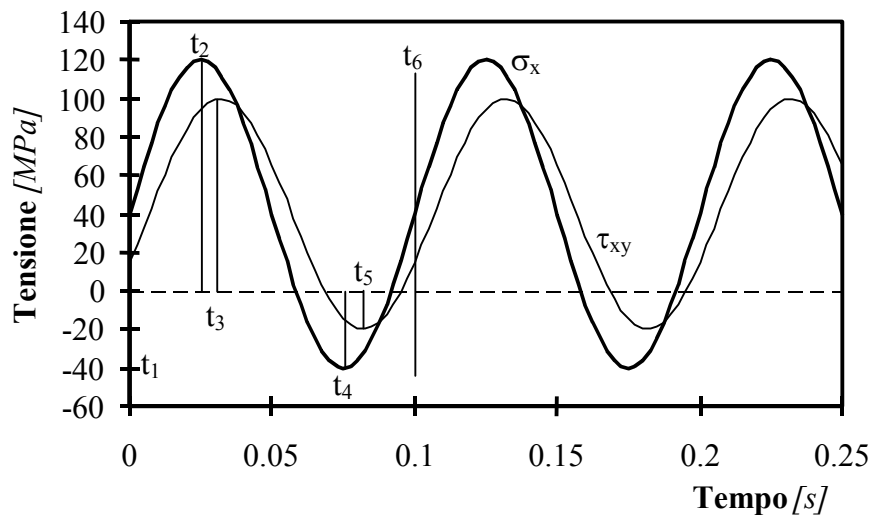
Dai dati forniti dal problema si ha che la storia di carico ha un andamento del tipo descritto dalla figura 3.12. Il problema fornisce le seguenti informazioni di partenza:

$$\sigma_{x,a}=80 \text{ MPa}; \sigma_{x,m}= 40 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy,a}=60 \text{ MPa}; \tau_{xy,m}= 40 \text{ MPa}$$

$$\delta=25^\circ$$

$$\omega = 2\pi f = 62.83 \text{ rad/s.}$$



**Figura 3.12:** Andamento temporale delle componenti di sollecitazione del esempio 3.3.

La finestra di osservazione può essere allora fissata nell'intervallo di tempo 0-0.1s, intervallo di ampiezza pari al periodo delle componenti di sollecitazione applicate. Si può allora assumere l'istante  $t_1=0$  s come istante iniziale. Annullando la derivata prima delle funzioni sinusoidali che descrivono l'andamento temporale delle due componenti di sollecitazione è semplice individuare come istanti significativi per descrivere la storia di carico i seguenti (fig. 3.12):

$$t_1=0 \text{ s:} \quad \sigma_x(t_1)=40 \text{ MPa}; \tau_{xy}(t_1)= 14.64 \text{ MPa}$$

$$t_2=0.025 \text{ s:} \quad \sigma_x(t_2)=120 \text{ MPa}; \tau_{xy}(t_2)= 94.38 \text{ MPa}$$

$$t_3=0.032 \text{ s:} \quad \sigma_x(t_3)=112.5 \text{ MPa}; \tau_{xy}(t_3)= 100 \text{ MPa}$$

$$t_4=0.075 \text{ s:} \quad \sigma_x(t_4)=-40 \text{ MPa}; \tau_{xy}(t_4)= -14.38 \text{ MPa}$$



$t_5=0.082$  s:  $\sigma_x(t_5)=-32.5$  MPa;  $\tau_{xy}(t_5)= -20$  MPa

Mediante le relazioni (3.3)-(3.5), e ponendo particolare attenzione a segni delle componenti calcolate, è possibile compilare la seguente tabella:

Istante	$\tau_n$	$\sigma_n$	$\phi$
[s]	[MPa]	[MPa]	[°]
<b>0</b>	24.79	20	26.89
<b>0.025</b>	111.84	60	16.22
<b>0.032</b>	114.73	56.25	14.69
<b>0.075</b>	-24.63	-20	27.14
<b>0.082</b>	-25.77	-16.25	19.54

Dalla tabella precedente si può osservare come tutti i piani individuati possono potenzialmente essere piani critici. Si tratta a questo punto di calcolare su ciascuno dei piani individuati il valore della tensione tangenziale in ciascuno degli istanti considerati mediante la (3.7). I risultati di tale operazione sono sintetizzati nella seguente tabella:

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	
$\phi$	$\tau_n$	$\tau_n$	$\tau_n$	$\tau_n$	$\tau_n$	$\tau_a$
[°]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
26.89	24.79	104.16	104.46	-24.63	-24.93	64.54
16.22	23.08	111.84	114.57	-22.87	-25.6	68.72
14.69	22.57	111.68	114.73	-22.34	-25.4	68.53
27.14	24.78	103.81	104.05	-24.63	-24.87	64.34
19.54	23.97	111.08	113.08	-23.77	-25.77	68.47

dove l'ultima colonna è stata calcolata applicando la semplice relazione:

$$\tau_a = \frac{1}{2} \left[ \max_{t_i \in T} \tau_n(t_i) - \min_{t_j \in T} \tau_n(t_j) \right]$$

Il piano critico risulta quello avente  $\theta=90^\circ$  e  $\phi=16.22^\circ$  e l'ampiezza della tensione tangenziale risulta, allora, pari a 68.72 MPa.

Si tratta a questo punto di determinare il valore massimo della tensione normale. Utilizzando la (3.6) si può compilare la seguente tabella:

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	
$\phi$	$\sigma_n$	$\sigma_n$	$\sigma_n$	$\sigma_n$	$\sigma_n$	$\sigma_{n,max}$
[°]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
16.22	10.98	60	62.43	-10.83	-13.27	62.43

Si può ora calcolare il valore della tensione idrostatica nei 5 istanti considerati:

$$\sigma_H(t_1)= 13.34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_H(t_2)= 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_H(t_3) = 37.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_H(t_4) = -13.34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_H(t_5) = -10.84 \text{ MPa}$$

Ampiezza, valore medio e massimo di  $\sigma_H$  valgono infine:

$$\sigma_{H,m} = \frac{1}{2}(\sigma_{H,\max} + \sigma_{H,\min}) = \frac{1}{2}[\sigma_H(t_2) + \sigma_H(t_4)] = 13.34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{H,a} = \frac{1}{2}(\sigma_{H,\max} - \sigma_{H,\min}) = \frac{1}{2}[\sigma_H(t_2) - \sigma_H(t_4)] = 26.67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{H,\max} = \sigma_{H,m} + \sigma_{H,a} = 40 \text{ MPa}.$$

Per determinare, da ultimo,  $\sqrt{J_{2,a}}$  è necessario, come già fatto negli altri esempi, accoppiare a due a due tutti gli istanti della storia di carico e determinare quella coppia di istanti che massimizzano la (2.37). Anche in questo caso due delle componenti del vettore  $\mathbf{S}(t)$  risultano diverse da zero. Ovvero:

$$S_1(t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}[\sigma_x(t_1) - \sigma_H(t_1)] = 32.1 \text{ MPa}; S_3(t_1) = 14.64 \text{ MPa}.$$

$$S_1(t_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}[\sigma_x(t_2) - \sigma_H(t_2)] = 69.3 \text{ MPa}; S_3(t_2) = 94.38 \text{ MPa}.$$

$$S_1(t_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}[\sigma_x(t_3) - \sigma_H(t_3)] = 64.95 \text{ MPa}; S_3(t_3) = 100 \text{ MPa}.$$

$$S_1(t_4) = \frac{\sqrt{3}}{2}[\sigma_x(t_4) - \sigma_H(t_4)] = -23.1 \text{ MPa}; S_3(t_4) = -14.38 \text{ MPa}.$$

$$S_1(t_5) = \frac{\sqrt{3}}{2}[\sigma_x(t_5) - \sigma_H(t_5)] = -10.8 \text{ MPa}; S_3(t_5) = -20 \text{ MPa}.$$

Accoppiando a due a due gli istanti in cui è stata schematizzata la storia di carico si ottiene:

$t_1-t_2$	$D(t_1; t_2) = 92.15 \text{ MPa}$
$t_1-t_3$	$D(t_1; t_3) = 95.01 \text{ MPa}$
$t_1-t_4$	$D(t_1; t_4) = 54.6 \text{ MPa}$
$t_1-t_5$	$D(t_1; t_5) = 48.5 \text{ MPa}$
$t_2-t_3$	$D(t_2; t_3) = 7.1 \text{ MPa}$
$t_2-t_4$	$D(t_2; t_4) = 142.7 \text{ MPa}$
$t_2-t_5$	$D(t_2; t_5) = 139.6 \text{ MPa}$
$t_3-t_4$	$D(t_3; t_4) = 144.34 \text{ MPa}$
$t_3-t_5$	$D(t_3; t_5) = 141.9 \text{ MPa}$

$$t_4-t_5 \quad D(t_4; t_6) = 13.5 \text{ MPa}$$

L'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico risulta pertanto:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{D_{\max}}{2} = \frac{D(t_3; t_4)}{2} = 72.2 \text{ MPa}.$$

