

Capitolo 4

Criteri di resistenza a fatica pluriassiale per vita infinita

In questo capitolo vengono presentati alcuni dei criteri di progettazione a fatica multiassiale per vita infinita maggiormente adoperati nella pratica tecnica. In particolare, il problema viene introdotto partendo dal classico approccio proposto da Gough ed applicabile a componenti sia lisci che intagliati sollecitati da carichi di flessio/torsione in fase. Successivamente, viene preso in analisi il criterio di Crossland, basato sulla radice quadrata dell'ampiezza del secondo invariante del tensore deviatorico, e i criteri di Matake e McDiarmid, fondati sull'individuazione del piano critico.

4.1. Il criterio di Gough

Il metodo di Gough [1, 2] rappresenta il primo tentativo di proporre una formulazione di sintesi adatta a verificare se un componente sollecitato da un carico di flessio/torsione in fase sia in condizioni di vita infinita. Tale metodologia può essere schematizzata secondo due diverse formulazioni, che rappresentano le equazioni empiriche di sintesi di una vasta sperimentazione condotta, per oltre un ventennio a partire dagli anni '30, da Gough su materiali metallici di diverso tipo.

Per verificare se un componente cilindrico sollecitato da carichi di flessio/torsione in fase, dove le due componenti di sollecitazione hanno rapporto di ciclo, R , pari -1 , è in condizioni di vita in finita occorre innanzitutto stabilire se il materiale è duttile o fragile. Tale distinzione può essere fatta secondo il seguente criterio [3]:

Materiali DUTTILI:
$$\frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}} \geq \sqrt{3}$$

Materiali FRAGILI:
$$1.2 < \frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}} < \sqrt{3}$$

Un'altra strada per classificare i materiali in duttili o fragili può essere quella di osservarne le caratteristiche statiche: un materiale può essere considerato duttile se presenta un allungamento a rottura superiore al 5% [4]. In ogni modo, può essere utile osservare come, secondo quanto suggerito da Sines [5, 6], posso essere considerati duttili gli acciai a basso/medio tenore di carbonio, gli acciai al Ni, Cr e Mo e, infine, le leghe di alluminio allo stato ricotto. Possono, invece, essere trattati come fragili gli acciai ad alto contenuto di carbonio, gli acciai contenenti Cr e Va, le leghe di alluminio alto-resistenziali e le ghise.

Classificati, allora, i materiali in duttili e fragili, il metodo di Gough può essere formalizzato mediante le due seguenti relazioni:

$$\left(\frac{\sigma_{x,a}}{\sigma_{A\infty}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy,a}}{\tau_{A\infty}}\right)^2 \leq 1 \quad (\text{materiali DUTTILI}) \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\tau_{xy,a}}{\tau_{A\infty}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x,a}}{\sigma_{A\infty}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}} - 1\right) + \left(\frac{\sigma_{x,a}}{\sigma_{A\infty}}\right) \left(2 - \frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}}\right) \leq 1 \quad (\text{materiali FRAGILI}) \quad (4.2)$$

dove con $\sigma_{A\infty}$ e $\tau_{A\infty}$ si sono indicati, rispettivamente, il limite di fatica a flessione per $R=-1$ e a torsione per $R=-1$, determinati, ambedue, sul materiale base.

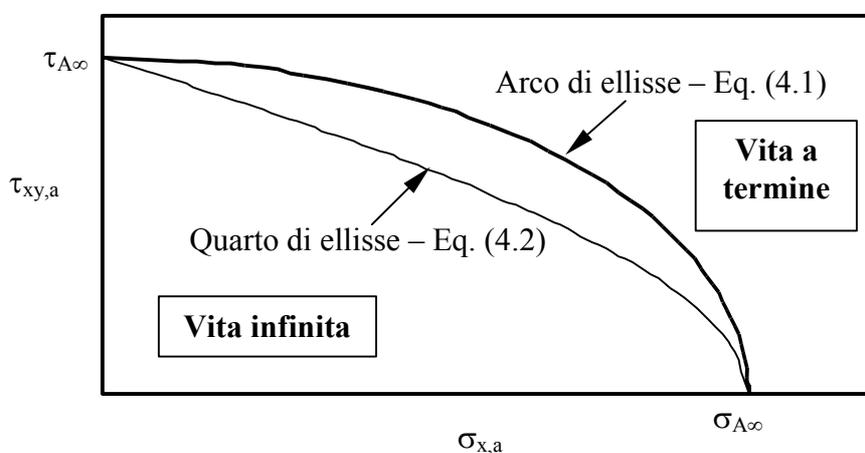


Figura 4.1: Relazioni di Gough nel piano $\tau_{xy,a}$ - $\sigma_{x,a}$.

Le (4.1) e (4.2) possono essere agevolmente plottate in un piano $\tau_{xy,a}$ - $\sigma_{x,a}$ ottenendo nel caso di materiali duttili un quarto di ellisse e nel caso di materiali fragili un arco di ellisse avente gli assi principali non coincidenti con gli assi coordinati (fig. 4.1).

Osservando le disequazioni (4.1) e (4.2) si può comprendere con immediatezza come il componente cilindrico sia in condizioni di vita infinita solo quando queste relazioni risultano soddisfatte, ovvero quando lo stato di sollecitazione è, nel piano $\tau_{xy,a}$ - $\sigma_{x,a}$, interno alle ellissi limite (fig. 4.1). In caso contrario, il componente è in condizioni di vita a termine, ma la vita non può essere stimata.

La relazione (4.1) si presta, poi, ad essere anche utilizzata per definire una tensione equivalente che consente di calcolare un coefficiente di sicurezza analogo a quello utilizzato nella fatica monoassiale o nella progettazione statica. In particolare, moltiplicando ambi i membri della (4.1) per $\sigma_{A\infty}^2$ si ottiene:

$$\sigma_{x,a}^2 + \left(\frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}} \tau_{xy,a}\right)^2 \leq \sigma_{A\infty}^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + \left(\frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}}\right)^2 \tau_{xy,a}^2} \leq \sigma_{A\infty} \quad (4.3)$$

Utilizzando, allora, la (4.3) si può definire un coefficiente di sicurezza calcolato applicando il criterio di Gough per materiali duttili:

$$v_{FM} = \frac{\sigma_{A\infty}}{\sigma_{a,eq}} \geq 1 \quad (4.4)$$

Al contrario di quanto appena fatto, la (4.2) non può essere esplicitata in termini di $\sigma_{x,a}$, e quindi non risulta possibile calcolare un coefficiente di sicurezza, a meno di non introdurre una sua definizione basata su una tensione tangenziale equivalente. Infatti, se si moltiplicano ambi i membri della (4.2) per $\tau_{A\infty}^2$ si ottiene:

$$\tau_{xy,a}^2 + \left(\frac{\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} \sigma_{x,a}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}} - 1\right) + \left(\frac{\tau_{A\infty}^2}{\sigma_{A\infty}} \sigma_{x,a}\right) \left(2 - \frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}}\right) \leq \tau_{A\infty}^2 \Rightarrow$$

$$\tau_{a,eq} = \sqrt{\tau_{xy,a}^2 + \left(\frac{\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} \sigma_{x,a}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}} - 1\right) + \left(\frac{\tau_{A\infty}^2}{\sigma_{A\infty}} \sigma_{x,a}\right) \left(2 - \frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}}\right)} \leq \tau_{A\infty} \quad (4.5)$$

A questo punto diventa semplice introdurre un coefficiente di sicurezza basato sulle tensioni tangenziali anche per l'espressione del criterio di Gough valida per materiali fragili, ovvero:

$$v_{FM} = \frac{\tau_{A\infty}}{\tau_{a,eq}} \geq 1 \quad (4.6)$$

Il coefficiente di sicurezza espresso mediante la (4.6) può risultare anomalo rispetto alle definizioni classiche con cui l'ingegnere progettista è solito lavorare. Tuttavia l'utilizzo di una tensione tangenziale equivalente è molto consueto nei criteri che si basano sul calcolo della massima ampiezza della tensione tangenziale, come si avrà modo di vedere nei prossimi paragrafi.

4.2.1. Estensione del criterio di Gough a componenti intagliati

L'approccio proposto da Gough può essere anche esteso al caso di organi reali intagliati correggendo semplicemente il valore dei limiti di fatica mediante gli usuali coefficienti K_f , K_d e K_l [4].

La correzione che serve a tenere in considerazione la presenza di intagli viene fatta mediante il valore di K_f , valore che può essere determinato con le usuali formule rintracciabili in letteratura [7]. Nel caso, poi, in cui il componente sia in condizioni di piena sensibilità all'intaglio il valore del K_f può essere sostituito con il valore del K_t .

Solitamente questa sostituzione può essere fatta per raggi di raccordo di fondo intaglio superiori a 2mm. Infine, può non essere superfluo ricordare che in generale, a parità di geometria., i valori di K_f (o K_t) a flessione, K_{ff} (o K_{tf}), sono diversi dai corrispondenti valori a torsione K_{ft} (o K_{tt}).

Con i coefficienti K_d e K_l si esegue, invece, la correzione del limite di fatica per tenere in considerazione, rispettivamente, gli effetti dovuti alla dimensione del pezzo e alla finitura superficiale. Sfortunatamente, però, non si ritrovano in letteratura analisi sistematiche eseguite per stimare i valori di K_d e K_l in presenza di sollecitazioni torsionali e, per questo motivo, è pratica comune applicare anche alla torsione i valori determinati per sollecitazioni di fatica monoassiali.

A questo punto, noti i valori di tutti i coefficienti discussi sopra, i limiti di fatica a flessione e a torsione del pezzo posso essere determinati, rispettivamente, come:

$$\sigma_{A\infty}^0 = \frac{\sigma_{A\infty}}{K_{ff} K_l K_d} \quad (4.7)$$

$$\tau_{A\infty}^0 = \frac{\tau_{A\infty}}{K_{ft} K_l K_d} \quad (4.8)$$

Gough, poi, nel suo lavoro originale [1] ha posto, subito, in evidenza come i componenti intagliati seguano, in condizioni di limite di fatica multiassiale, prevalentemente il comportamento descritto dal quarto di ellisse, e questo è vero indipendentemente dal tipo di materiale. Pertanto, sostituendo nella (4.2) le (4.7) e (4.8) il criterio per componenti reali intagliati può essere riscritto come:

$$\left(\frac{\tau_{xy,a}}{\tau_{A\infty}^0} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x,a}}{\sigma_{A\infty}^0} \right)^2 \left(\frac{\sigma_{A\infty}^0}{\tau_{A\infty}^0} - 1 \right) + \left(\frac{\sigma_{x,a}}{\sigma_{A\infty}^0} \right) \left(2 - \frac{\sigma_{A\infty}^0}{\tau_{A\infty}^0} \right) \leq 1 \quad (4.9)$$

In realtà, come si avrà modo di discuter tra un attimo, alcune normative suggeriscono di utilizzare l'arco di ellisse, correggendo ovviamente i valori del limite di fatica, anche in presenza di componenti reali intagliati. Questa assunzione, però, se da un lato facilita i conti, dall'altro introduce una semplificazione non conservativa.

4.2.2. Estensione del criterio di Gough a sollecitazioni aventi $R \neq -1$

Il criterio di Gough può essere anche esteso con semplicità al caso di componenti sollecitati a flessione e torsione in fase aventi rapporto di ciclo R diverso da -1 . Si tratta, ovviamente, di tenere in considerazione l'effetto della tensione media correggendo il valore dei limiti di fatica a flessione e a torsione mediante il diagramma di Haigh.

Nel caso di flessione con rapporto di ciclo R , il limite di fatica può essere, allora, determinato come:

$$\sigma_{AR}^0 = \sigma_{A\infty}^0 \left(1 - \frac{\sigma_{x,m}}{\sigma_R} \right) = \frac{\sigma_{A\infty}^0}{K_{ff} K_l K_d} \left(1 - \frac{\sigma_{x,m}}{\sigma_R} \right) \quad (4.10)$$

dove con σ_R si è indicato il valore della tensione di rottura del materiale base.
 In modo del tutto analogo si potrebbe calcolare il valore del limite di fatica in presenza di una tensione media diversa da zero:

$$\tau_{AR}^0 = \tau_{A\infty}^0 \left(1 - \frac{\tau_{xy,m}}{\tau_R} \right) = \frac{\tau_{A\infty}^0}{K_{ff} K_l K_d} \left(1 - \frac{\tau_{xy,m}}{\tau_R} \right) \quad (4.11)$$

dove con τ_R si è indicato il valore della tensione di rottura a torsione del materiale base.
 In realtà, accurate analisi sperimentali condotte da Sines [5] hanno posto in evidenza come il valore del limite di fatica a torsione dei materiali metallici praticamente non risenta dell'effetto di una componente media di sollecitazione diversa da zero, almeno fino a quando il valore massimo della componente ciclica torsionale è inferiore al valore di snervamento. Pertanto, l'utilizzo della correzione data dalla (4.11) potrebbe portare a verifiche del limite di fatica multiassiale troppo conservative.

4.2.3. Procedimento normato per organi reali intagliati

Secondo quanto suggerito dalla UNI 7670 la verifica a fatica multiassiale di organi intagliati può essere eseguita utilizzando il quarto di ellisse, invece che l'arco di ellisse. Se questo da un lato consente di semplificare i calcoli, permettendo di calcolare il valore del coefficiente di sicurezza rispetto al limite di fatica a flessione, dall'altro introduce una semplificazione che è in svantaggio si sicurezza.

In ogni modo, secondo quanto suggerito dalla normativa, la (4.1) può essere riscritta per componenti reali intagliati come:

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + H^2 \tau_{xy,a}^2} \leq \sigma_{A\infty}^0 \quad (4.12)$$

dove con H si indica il rapporto:

$$H = \frac{\sigma_{max}^0}{\tau_{max}^0} = \frac{\sigma_{A\infty}^0 + \sigma_{x,m} \left(1 - \frac{\sigma_{A\infty}^0}{\sigma_R} \right)}{\tau_{A\infty}^0 + \tau_{xy,m} \left(1 - \frac{\sigma_{A\infty}^0}{\tau_R} \right)} \quad (4.13)$$

Dalle (4.12) e (4.13) diventa immediato calcolare il valore del coefficiente di sicurezza secondo quanto suggerito dalle normative:

$$v_{FM} = \frac{\sigma_{A\infty}^0}{\sigma_{a,eq}} \geq 1. \quad (4.14)$$

4.2.4. Verifica in presenza di momento torcente costante

In particolari applicazioni, come ad esempio negli alberi di trasmissione, il valore della ampiezza della sollecitazione di torsione può essere nullo, mentre la componente flessionale varia con rapporto di ciclo $R=-1$.

In questi casi per tenere comunque conto della componente torsionale e per eseguire una verifica maggiormente in vantaggio di sicurezza si può sostituire, nella (4.12), $\tau_{xy,a}$ con $\tau_{xy,m}$:

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + H^2 \tau_{xy,m}^2} \leq \sigma_{A\infty}^0 \quad (4.15)$$

ed esprimere il rapporto H come:

$$H = \frac{\sigma_{max}^0}{\tau_s} \quad (4.16)$$

dove con τ_s si è indicato il valore della tensione tangenziale di snervamento.

Eseguendo allora la verifica con la (4.15), unitamente alla nuova definizione data per H , si ottiene un risultato leggermente più cautelativo, ma che, comunque, non si discosta molto da quello che si sarebbe ottenuto trascurando completamente la componente statica torsionale.

4.2.5. Considerazioni conclusive

Il criterio di Gough è un metodo classico, ampiamente impiegato nella pratica tecnica, che può essere utilizzato per stimare il limite di fatica multiassiale di componenti sia lisci che intagliati, sollecitati, però, solamente da carichi di flessione/torsione in fase. Se da un lato, poi, passando attraverso il diagramma di Haigh tale approccio può essere usato anche in presenza di sollecitazioni di flessione/torsione aventi rapporto di ciclo diverso da -1 , tale criterio non può mai essere utilizzato in presenza di sollecitazioni fuori fase, perché, in questo caso, si eseguirebbe una verifica a fatica fortemente in svantaggio di sicurezza. Questo, come già detto altrove, è dovuto al fatto che la presenza di un angolo di fase diverso da zero incrementa, a parità di sollecitazioni esterne applicate, il valore del danneggiamento a fatica. Per superare questo problema sono stati, successivamente, proposti in letteratura diversi criteri capaci di tenere in considerazione anche l'angolo di fase. Alcuni di questi criteri verranno discussi in dettaglio nei prossimi paragrafi.

4.2. Il criterio di Crossland

Il criterio di Crossland [8] è un criterio molto utilizzato nella progettazione a fatica per sollecitazioni triassiali e permette di verificare se un componente si trova in condizioni di vita infinita. Tale criterio, espresso nella sua forma più generale così come proposta da Fuchs [5], può essere applicato indipendentemente dalla complessità della storia di carico che sollecita il componente. In particolare, tale metodo ha dimostrato una buona

affidabilità e precisione anche in presenza di sollecitazioni triassiali con componenti della tensione non in fase, ovvero con direzioni principali variabili nel tempo.

La formulazione analitica del criterio di Crossland è basata su una combinazione lineare della ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico, $\sqrt{J_{2,a}}$, e della tensione idrostatica massima, $\sigma_{H,max}$:

$$\sqrt{J_{2,a}} + \alpha \cdot \sigma_{H,max} \leq \beta. \quad (4.17)$$

Il valore delle costanti α e β può essere determinato applicando la relazione precedente a storie di carico semplici.

In particolare, la costante β può essere esplicitata applicando la (4.17) ad un componente liscio sollecitato a torsione alterna ($R=-1$) in condizioni di limite di fatica, dove il valore del limite di fatica vale, per $R=-1$, $\tau_{A\infty}$. In presenza di un carico torsionale puro il modulo del vettore dato dalla (2.36) ha la sola componente S_3 diversa da zero e uguale proprio a $\tau_{A\infty}$. Detto questo, e applicando il metodo della corda, è facile ricavare che:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \tau_{A\infty}.$$

In più, in presenza di sollecitazioni di torsione pura la componente idrostatica di tensione è sempre uguale a zero. Sostituendo, allora, la precedente nella (4.17), e ricordando che $\sigma_{H,max}=0$, si ricava con immediatezza il valore di β :

$$\beta = \tau_{A\infty}.$$

In presenza di una sollecitazione di fatica monoassiale con rapporto di ciclo $R=-1$, si ha che l'unica componente diversa da zero del vettore \mathbf{S} , dato dalla (2.36), è S_1 . Ovviamente, tale componente in condizioni di limite di fatica è data da:

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\sigma_{A\infty} - \frac{\sigma_{A\infty}}{3} \right] = \frac{\sigma_{A\infty}}{\sqrt{3}},$$

dove, ancora, con $\sigma_{A\infty}$ si è indicato il limite di fatica monoassiale determinato per $R=-1$. L'applicazione del metodo della corda permette infine di calcolare il valore di $\sqrt{J_{2,a}}$ per la particolare condizione di carico considerata:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{\sigma_{A\infty}}{\sqrt{3}}.$$

Poiché la sollecitazione in studio è monoassiale, e con rapporto di ciclo R uguale -1 , il valore massimo della tensione idrostatica risulta:

$$\sigma_{H,max} = \frac{\sigma_{A\infty}}{3}.$$

Sostituendo nella (4.17) le due relazioni precedenti e ricordando il valore ricavato in precedenza per la costante β , si può ora determinare con semplicità anche il valore di α :

$$\frac{\sigma_{A\infty}}{\sqrt{3}} + \alpha \frac{\sigma_{A\infty}}{3} = \tau_{A\infty} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{3\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} - \sqrt{3} \right).$$

Alla luce di quanto discusso, il criterio di Crossland può essere, infine, riscritto come:

$$\sqrt{J_{2,a}} + \left(\frac{3\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} - \sqrt{3} \right) \sigma_{H,\max} \leq \tau_{A\infty} \quad (4.18)$$

ovvero:

$$\tau_{a,\text{eq}} = \sqrt{J_{2,a}} + \left(\frac{3\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} - \sqrt{3} \right) \sigma_{H,\max} \leq \tau_{A\infty} \quad (4.19)$$

Si può, così, osservare come l'espressione a primo membro della (4.19) non è altro che una tensione tangenziale equivalente, $\tau_{a,\text{eq}}$, calcolata secondo l'ipotesi di Crossland. Diventa possibile, a questo punto, introdurre un coefficiente di sicurezza, analogo a quello utilizzato nella fatica monoassiale o nella progettazione statica, definito, però, in termini di tensioni tangenziali:

$$v_{\text{FM}} = \frac{\tau_{A\infty}}{\tau_{a,\text{eq}}} \geq 1$$

In conclusione, e come posto in evidenza dalla precedente definizione data per il coefficiente di sicurezza calcolato secondo il metodo di Crossland, un componente meccanico è in condizioni di vita infinita solo quando $v_{\text{FM}} \geq 1$.

4.3. Criteri basati sull'individuazione del piano critico

4.3.1. Il criterio di Mataké

Il criterio di Mataké si basa sulla determinazione del piano su cui risulta essere massimo il valore della ampiezza della tensione tangenziale. Importante è sottolineare che dalla analisi tensionale può risultare che più piani diversi sperimentano il massimo valore della ampiezza della tensione tangenziale. In questo caso, tra tutti i piani di massima τ_a individuati, il piano critico è quello, o quelli, che sperimentano anche il massimo valore della tensione normale massima. Indicando, quindi, con ϕ^* e θ^* gli angoli che individuano nello spazio l'orientazione di tale piano, il criterio in esame può essere espresso come la combinazione lineare della ampiezza della tensione tangenziale e della tensione normale massima calcolate sul piano critico [10], ovvero:

$$\tau_a(\phi^*, \theta^*) + \alpha \cdot \sigma_{n,\max}(\phi^*, \theta^*) \leq \beta. \quad (4.20)$$

Le costanti α e β possono essere determinate applicando la (4.20) a due storie di carico semplici; in particolare, nel caso di una sollecitazione monoassiale alterna con $R=-1$ e di torsione alterna con $R=-1$ si ricava:

$$\alpha = \left(\frac{2\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} \right) - 1 \quad (4.21)$$

$$\beta = \tau_{t-1}$$

Il criterio in discussione può, allora, essere riscritto come:

$$\tau_{a,eq} = \tau_a(\phi^*, \theta^*) + \left(\frac{2\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} - 1 \right) \sigma_{n,\max}(\phi^*, \theta^*) \leq \tau_{A\infty}. \quad (4.22)$$

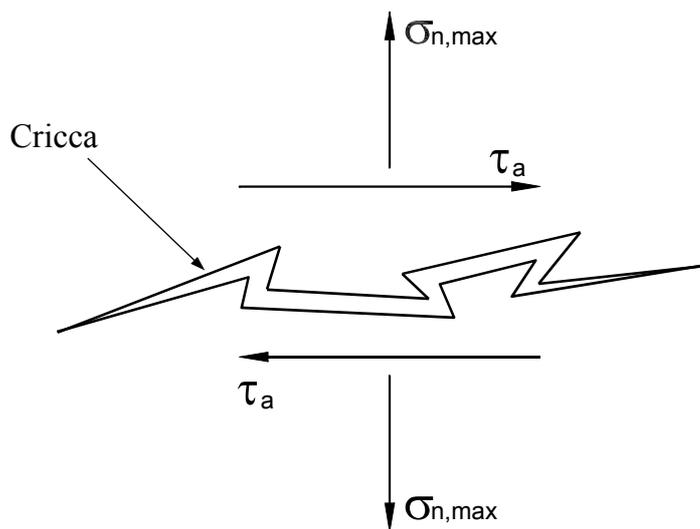


Figura 4.2: Grandezze che influenzano la formazione della cricca secondo il criterio di Matake.

Analogamente a quanto fatto per il criterio di Crossland diventa, ora, possibile introdurre il coefficiente di sicurezza a fatica multiassiale, dove la tensione tangenziale equivalente è calcolata utilizzando l'ipotesi di Matake:

$$v_{FM} = \frac{\tau_{A\infty}}{\tau_{a,eq}} \geq 1 \quad (4.23)$$

Quando $v_{FM} \geq 1$ allora il componente è in condizioni di vita infinita. Nel caso, invece, in cui la (4.22) non sia soddisfatta il componente in studio è in condizioni di vita a termine, ma la vita non può essere stimata.

Infine, può essere interessante osservare come nel criterio di Matake si riesca a ritrovare una interpretazione del danneggiamento a fatica analoga a quella suggerita da Socie [11] (fig. 4.2). Secondo tale modello, infatti, la cricca si origina sul piano che sperimenta la massima τ_a e la sua velocità di propagazione è influenzata dalla tensione normale: una $\sigma_{n,max}$ di compressione tende a rallentare la propagazione perché comprime le superfici della cricca stessa, mentre una $\sigma_{n,max}$ di trazione ne favorisce l'apertura aumentandone la velocità di propagazione.

4.3.2. Il criterio di McDiarmid

Anche il criterio formulato da McDiarmid [12, 13] si basa sul concetto di piano critico, definito come quel piano che sperimenta la massima ampiezza della tensione tangenziale. Può non essere superfluo sottolineare che, pure in questo caso, se il calcolo tensionale porta alla determinazione di più piani che sperimentano il massimo valore di τ_a , allora il piano critico è, tra tutti i piani determinati, quello che sperimenta anche il massimo valore della tensione normale massima.

La formulazione di tale criterio parte dalle osservazioni sperimentali sulla modalità di rottura di un provino condotte da Brown e Miller [14]. In particolare, tali autori hanno posto in evidenza come, in provini cilindrici con parete sottile, si possano osservare due tipologie di cricche: una cricca di tipo A che si propaga lungo la superficie del provino e una cricca di tipo B che si propaga dalla superficie verso l'interno. Pertanto la rottura può avvenire, in funzione del tipo di carichi, sia secondo la modalità di propagazione A che secondo la modalità di propagazione B, o eventualmente, con le due modalità di propagazione combinate. In più, il caso B risulta essere sempre il più gravoso per il materiale, e, generalmente, quando si ha una propagazione di tipo misto (A+B) la propagazione di tipo B è sempre la seconda a manifestarsi.

Partendo da queste osservazioni McDiarmid propone allora di eseguire la verifica a fatica multiassiale per vita infinita tramite la relazione [13]:

$$\frac{\tau_a(\phi^*, \theta^*)}{\tau_{A\infty}} + \frac{\sigma_{n,max}(\phi^*, \theta^*)}{2\sigma_R} \leq 1 \quad (4.24)$$

dove con $\tau_{A\infty}$ si è indicato il limite a fatica a torsione per $R=-1$ e con σ_R la tensione di rottura statica del materiale. In più, ϕ^* e θ^* rappresentano, nella (4.24), gli angoli che individuano la posizione del piano critico, ovvero del piano che sperimenta la massima τ_a .

Il criterio espresso dalla (4.24) risulta applicabile però solo se sono verificate le due seguenti condizioni:

$$0.5 \tau_{A\infty} \leq \tau_a \leq \tau_{A\infty} \quad 0 \leq \sigma_{n,max} \leq 2 \cdot \sigma_R.$$

In [12] e [13] McDiarmid ha dimostrato l'affidabilità del suo criterio per diverse tipologie di provini e per diverse tipologie di carico, trovando sempre una buona correlazione tra modello ed evidenze sperimentali.

Si può, a questo punto, osservare come moltiplicando anche i due membri della (4.24) per $\tau_{A\infty}$ si riesce, con semplicità, a definire una tensione tangenziale equivalente che consente di calcolare il coefficiente di sicurezza multiassiale secondo l'ipotesi di cedimento di McDiarmid:

$$\tau_{a,eq} = \tau_a(\phi^*, \theta^*) + \frac{\tau_{A\infty}}{2\sigma_R} \sigma_{n,max}(\phi^*, \theta^*) \leq \tau_{A\infty} \quad (4.25)$$

$$v_{FM} = \frac{\tau_{A\infty}}{\tau_{a,eq}} \geq 1 \quad (4.26)$$

Infine, può non essere superfluo ribadire come il criterio di McDiarmid consente di verificare se un componente si trova in condizioni di vita infinita. Se, invece, $v_{FM} < 1$ allora il componente è in condizioni di vita a termine, ma la vita non può essere stimata.

4.4. Estensione dei criteri di Mataka, McDiarmid e Crossland a componenti reali intagliati

I criteri di Mataka, McDiarmid e Crossland sono stati introdotti considerando solo componenti privi di intaglio. In realtà, tali criteri possono essere applicati anche a componenti reali intagliati purché vengano corretti i limiti di fatica, monoassiale e a torsione, del materiale base per tenere conto della forma (K_f o K_t), della dimensione (K_d) e della finitura superficiale (K_s). In più, tutte le grandezze ingegneristiche utilizzate dai diversi criteri devono essere calcolate utilizzando le tensioni nominali nette.

Riassumendo: noti i valori dei coefficienti K_i , per cui valgono tutte le considerazioni esposte nel paragrafo 4.2.1, è possibile calcolare i valori del limite a fatica del pezzo, valori espressi dalle (4.7) e (4.8). Il calcolo, infine, delle grandezze ingegneristiche da utilizzare nei criteri deve essere eseguito sempre mediante le tensioni nominali calcolate rispetto alla sezione netta del componente.

4.5. Esempi applicativi

Esempio 4.1

Sull'albero in SAE 1045 di figura 4.3 viene realizzato un intaglio circonferenziale a forma di semicerchio di raggio r . Tale albero lavora in due condizioni di esercizio diverse: nella condizione di esercizio (1) l'albero ruota ed è sollecitato da una forza verticale F e da un momento torcente M_t variabile con rapporto di ciclo R uguale a -1 (ovvero, le componenti flessionale e torsionale sono in fase). Nella condizione di esercizio (2) l'albero viene tenuto fermo, la forza verticale viene fatta variare da $2F$ a 0 , mentre il momento torcente M_t applicato è costante.

Utilizzando il criterio di Gough, così come esso viene suggerito dalle normative, si determini:

- Il valore del diametro netto d nella configurazione di carico (1) tale che il coefficiente di sicurezza v_{FM} , calcolato a $2 \cdot 10^6$ cicli, sia uguale a 2;
- Usando il diametro netto determinato al punto precedente, determinare il valore del coefficiente di sicurezza v_{FM} , calcolato a $2 \cdot 10^6$ cicli, per la configurazione di carico (2).

Dati:

$$\sigma_{A\infty} = 304 \text{ MPa}$$

$$\tau_{A\infty} = 181 \text{ MPa}$$

$$\sigma_R = 625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p, 0.2} = 512 \text{ MPa}$$

$$K_f = 1.2$$

$$K_d = 1.15$$

$$D/d = 1.3$$

$$r/d = 0.2$$

$$l = 500 \text{ mm}$$

$$M_t = 550 \text{ Nm}$$

$$F = 6000 \text{ N}$$

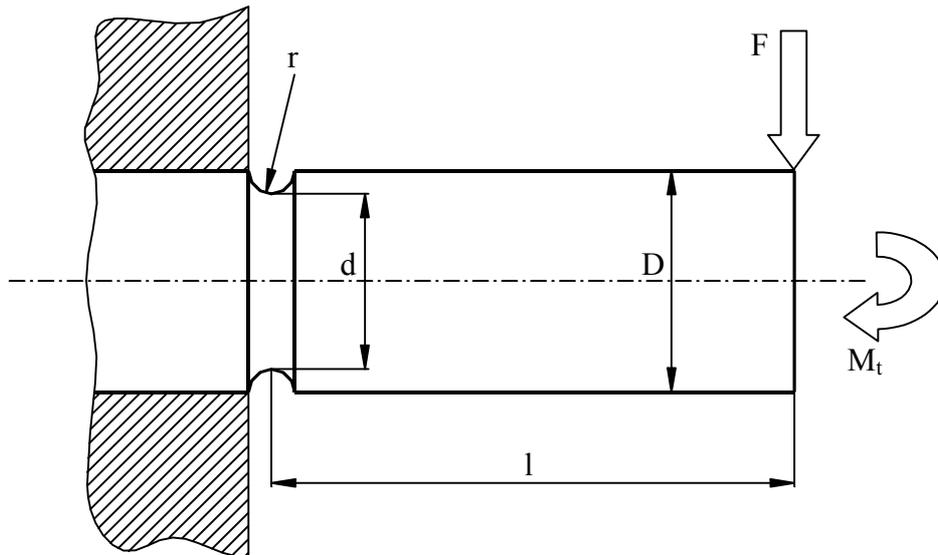


Figura 4.3: Geometria del componente dell'esempio 4.1.

Soluzione:

Se l'albero ruota e la forza F resta sempre verticale, allora l'albero è sollecitato a flessione rotante con rapporto di ciclo, R , uguale a -1 .

Come soluzione di primo tentativo si può assumere: $K_f = K_t$. Di fatto si assume, pur ignorando il valore del diametro netto d , che il raggio di fondo intaglio sia maggiore di 2mm. Questa ipotesi deve essere verificata alla fine del calcolo.

Dai diagrammi del Petterson [7] si ricava che:

$$K_{tf} = 1.63$$

$$K_{tt} = 1.34$$

Noti, allora, i valori di K_t , K_l e K_d si possono calcolare i limiti di fatica del pezzo:

$$\sigma_{A\infty}^0 = \frac{\sigma_{A\infty}}{K_{tf}K_lK_d} = \frac{304}{1.63 \cdot 1.2 \cdot 1.15} = 135.2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{A\infty}^0 = \frac{\sigma_{A\infty}}{K_{tt}K_lK_d} = \frac{181}{1.34 \cdot 1.2 \cdot 1.15} = 80.5 \text{ MPa}$$

L'ampiezza della sollecitazione flessione applicata è, invece, pari a:

$$\sigma_{x,a} = \frac{Fl}{W_f} = \frac{32Fl}{\pi d^3}$$

mentre l'ampiezza della sollecitazione di torsione è pari a:

$$\tau_{xy,a} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{16Fl}{\pi d^3}$$

Il problema impone che il coefficiente di sicurezza si pari a 2. Usando questa informazione, diventa allora possibile determinare il valore che deve avere la tensione equivalente:

$$\sigma_{a,eq} = \frac{\sigma_{A\infty}^0}{v_{FM}} = \frac{135.2}{2} = 67.6 \text{ MPa}$$

Partendo dall'espressione della tensione equivalente:

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + H^2 \tau_{xy,a}^2}$$

e sostituendo le espressioni trovate per le componenti di sollecitazione si può scrivere la seguente uguaglianza:

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{\left(\frac{32Fl}{\pi d^3}\right)^2 + H^2 \left(\frac{16M_t}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{\sigma_{A\infty}^0}{v_{FM}}$$

Ricordando che:

$$H^2 = \left(\frac{\sigma_{A\infty}^0}{\tau_{A\infty}^0}\right)^2 = 2.82$$

si può, allora, facilmente esplicitare l'espressione scritta per la tensione equivalente ottenendo il valore del diametro netto:

$$d^3 = \frac{v_{FM}}{\sigma_{A\infty}^0} \sqrt{\left(\frac{32Fl}{\pi}\right)^2 + H^2 \left(\frac{16M_t}{\pi}\right)^2} \Rightarrow d = 77\text{mm}$$

Si tratta ora di verificare la validità dell'ipotesi fatta all'inizio, ovvero $K_f=K_t$. Sapendo che $r/d=0.2$ si ricava $r = 15.4\text{mm} > 2\text{mm}$. L'ipotesi fatta risulta essere lecita e, pertanto, il valore trovato per il diametro risponde al primo quesito.

Il problema richiede adesso di calcolare il valore del coefficiente di sicurezza per la configurazione di carico (2). In questo caso l'albero è tenuto fermo e viene fatta variare, in senso verticale, la sola forza F , mentre il momento torcente applicato è costante e pari a M_t .

Per calcolare v_{FM} è necessario allora correggere il valore del limite di fatica a flessione del componente per tenere conto di una tensione media non nulla. Dai dati del problema si evince che la flessione varia con rapporto di ciclo pari a zero, pertanto:

$$\sigma_{A\infty,R=0}^0 = \frac{\sigma_{A\infty}^0 \sigma_R}{\sigma_{A\infty}^0 + \sigma_R} = 111.15 \text{ MPa}$$

Il valore minimo del momento flettente applicato è pari a zero, mentre il valore massimo e l'ampiezza di tale componente di sollecitazione è data da:

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_{f,\max}}{W_f} = \frac{32Fl}{\pi d^3} = 133.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,a} = \frac{\sigma_{x,\max}}{2} = 66.9 \text{ MPa}$$

La configurazione di carico (2) è poi caratterizzata da una ampiezza della componente torsionale nulla, mentre il suo valore medio è dato da:

$$\tau_{xy,m} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{16M_t}{\pi d^3} = 6.1 \text{ MPa}$$

Si tratta ora di calcolare il valore della cifra H per la condizione di carico in analisi:

$$H^2 = \left(\frac{\sigma_{A\infty,R=0}^0}{\tau_s}\right)^2 = 0.14$$

dove il valore della tensione torsionale di snervamento è stato calcolato applicando l'ipotesi di Von Mises:

$$\tau_s = \frac{\sigma_{p,0.2}}{\sqrt{3}} = 295.6 \text{ MPa}$$

In conclusione la tensione ideale e il coefficiente di sicurezza per la configurazione di carico (2) valgono:

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + H^2 \tau_{xy,a}^2} = 66.9 \text{ MPa}$$

$$v_{FM} = 1.66.$$

Esempio 4.2

Un componente cilindrico liscio, realizzato in acciaio al carbonio, è sollecitato da un carico di flessione/torsione con componenti della sollecitazione che variano con legge sinusoidale e aventi valori medi diversi da zero. L'angolo di fase è pari a 45°, mentre la frequenza della componente di flessione è pari a 5 Hz e quella di torsione a 10 Hz. Determinare il coefficiente di sicurezza secondo i criteri di Crossland, Matak e McDiarmid.

Dati:

$\sigma_{A\infty} = 269 \text{ MPa}$
 $\tau_{A\infty} = 152 \text{ MPa}$
 $\sigma_R = 430 \text{ MPa}$

$\sigma_{x,a} = 120 \text{ MPa}$
 $\tau_{xy,a} = 65 \text{ MPa}$
 $\delta = 45^\circ$

$\sigma_{x,m} = 40 \text{ MPa}$
 $\tau_{xy,m} = 25 \text{ MPa}$

$f_x = 5 \text{ Hz}$
 $f_{xy} = 10 \text{ Hz}$

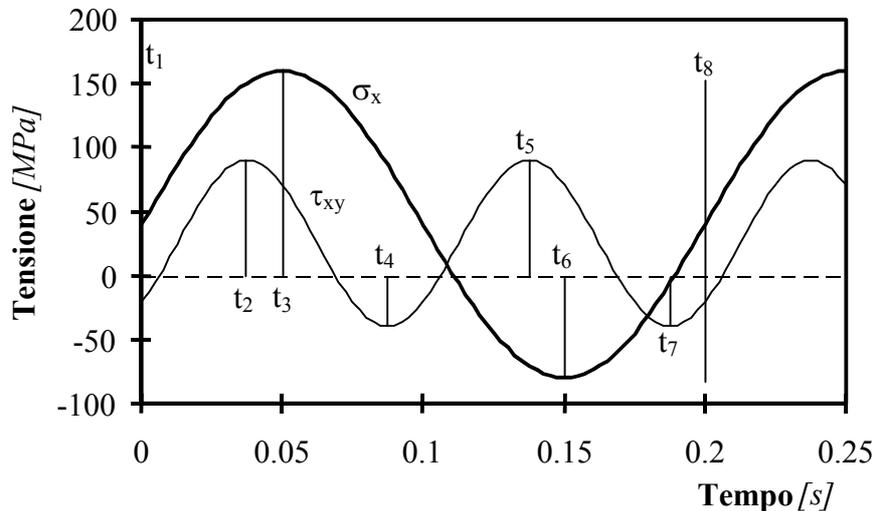


Figura 4.4: Storia di carico dell'esempio 4.2.

Soluzione:

In figura 4.4 è stato riportato l'andamento temporale delle componenti di flessione e torsione. La finestra temporale di osservazione deve avere un'ampiezza pari al periodo

di oscillazione della componente di sollecitazione avente la frequenza più bassa. Assumendo allora come riferimento la componente di flessione, si può fissare l'intervallo temporale di osservazione tra gli istanti $t_1=0$ s e $t_8=0.2$ s. Dai dati del problema si ricava che le due componenti di tensione variano con le seguenti leggi:

$$\sigma_x(t) = 40 + 120\text{sen}(31.42t)$$

$$\tau_{xy}(t) = 25 + 65\text{sen}(62.83t - 45^\circ)$$

Annullando le derivate prime delle due relazioni precedenti si ricavano gli istanti in cui le funzioni $\sigma_x(t)$ e $\tau_{xy}(t)$ assumono valori massimi e minimi nell'intervallo temporale t_1-t_8 :

$t_1=0$ s	$\sigma_x(t_1)=40$ MPa	$\tau_{xy}(t_1)=-21$ MPa
$t_2=0.0375$ s	$\sigma_x(t_2)=150.9$ MPa	$\tau_{xy}(t_2)=90$ MPa
$t_3=0.05$ s	$\sigma_x(t_3)=160$ MPa	$\tau_{xy}(t_3)=71$ MPa
$t_4=0.0875$ s	$\sigma_x(t_4)=85.9$ MPa	$\tau_{xy}(t_4)=-40$ MPa
$t_5=0.1375$ s	$\sigma_x(t_5)=-70.9$ MPa	$\tau_{xy}(t_5)=90$ MPa
$t_6=0.15$ s	$\sigma_x(t_6)=-80$ MPa	$\tau_{xy}(t_6)=71$ MPa
$t_7=0.1875$ s	$\sigma_x(t_7)=-5.9$ MPa	$\tau_{xy}(t_7)=-40$ MPa
$t_8=0.2$ s	$\sigma_x(t_8)=40$ MPa	$\tau_{xy}(t_8)=-21$ MPa

L'istante t_8 può, ovviamente, essere scartato perché equivalente in termini tensionali all'istante t_1 .

Mediante le relazioni (3.3)-(3.5), e ponendo particolare attenzione a segni, è possibile compilare la seguente tabella:

Istante	τ_n	σ_n	ϕ
[s]	[MPa]	[MPa]	[°]
0	-29	20	-21.8
0.0375	117.4	74.5	20
0.05	107	80	24.2
0.0875	-58.7	43	-23.5
0.1375	96.7	-35.5	-10.7
0.15	81.5	-40	-14.7
0.1875	-40.1	-2.95	2.1

Poiché tutti i piani considerati potrebbero essere potenzialmente quelli critici, si tratta allora di calcolare su ciascuno dei piani individuati il valore della tensione tangenziale in ciascuno degli istanti considerati mediante la (3.7). I risultati di tale operazione sono sintetizzati nella seguente tabella, dove l'ultima colonna è stata calcolata mediante la seguente semplice relazione:

$$\tau_a = \frac{1}{2} \left[\max_{t_i \in T} \tau_n(t_i) - \min_{t_j \in T} \tau_n(t_j) \right]$$

	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	t ₆	t ₇	
φ	τ _n	τ _a						
[°]	[MPa]							
-21.8	-29	13.1	-3.8	-58.6	89.6	79	-26.9	74.1
20	-3.2	117.4	105.8	-3.1	46.2	28.7	-32.5	74.95
24.2	1	116.2	107	5.6	33.2	17.2	-28.8	72.5
-23.5	-28.9	6.1	-10.2	-58.7	87.3	77.7	-25.1	73
-10.7	-26.9	56.1	36.7	-52.95	96.7	80.7	-36.1	74.83
-14.7	-28.1	41.4	22.6	-55.9	95.8	81.5	-33.4	75.85
2.1	-19.5	95.3	76.7	-36.7	87.1	67.9	-40.1	67.7

Dalla tabella precedente si può osservare come, a meno del piano $\theta=90^\circ$, $\phi=2.1^\circ$, l'ampiezza della tensione tangenziale presenti variazioni del 5%, variazioni che sono comprese nell'intervallo di errore della procedura semplificata proposta nel capitolo precedente. Per determinare, allora, il piano critico occorre considerare la tensione massima su tutti questi piani, e il piano critico risulterà quello che sperimenta la massima tensione normale. Per semplicità, comunque, si possono considerare come potenzialmente critici tutti i piano che sperimentano una ampiezza della tensione tangenziale maggiore di 74 MPa. Si tratta a questo punto di determinare il valore massimo della tensione normale su ciascuno di questi piani, e questo può essere fatto applicando la (3.6). La seguente tabella riassume i risultati ottenuti:

	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	t ₆	t ₇	
φ	σ _n	σ _{n,max}						
[°]	[MPa]							
-21.8	19.8	-41.3	-26.9	39.4	-71.8	-60	26.8	39.4
20	-8.8	75.5	64.3	-15.7	49.6	36.3	-26.4	75.5
-10.7	9	-27.6	-20.4	17.6	-35.3	-28.7	14.4	17.6
-14.7	12.9	-34.5	-24.5	25.2	-48.7	-40	19.25	25.17

Il piano che sperimenta la massima tensione normale è individuato dagli angoli $\theta=90^\circ$, $\phi=20^\circ$. Su tale piano, che per le ipotesi semplificate introdotte diventa quello critico, si ha:

$$\tau_a=74.95 \text{ MPa}; \sigma_{n,max}=75.5 \text{ MPa}.$$

A titolo di confronto il valore del piano critico è stato calcolato anche mediante una procedura numerica. Tale calcolo ha fornito per il piano critico i seguenti valori:

$$\theta=90^\circ, \phi=20.31^\circ$$

$$\tau_a=76.6 \text{ MPa}; \sigma_{n,max}=76.8 \text{ MPa}.$$

Si osserva come la differenza tra i risultati del calcolo eseguito per via numerica e manualmente siano ingegneristicamente trascurabili.

Per determinare, adesso, $\sqrt{J_{2,a}}$ è necessario, come già fatto negli esempi del capitolo precedente, accoppiare a due a due tutti gli istanti della storia di carico e determinare quella coppia di istanti che massimizzano la (2.37). Anche in questo caso due delle componenti del vettore $\mathbf{S}(t)$ risultano diverse da zero. Ovvero:

$$\begin{aligned}
 S_1(t_1) &= \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_1) - \sigma_H(t_1)] = 23.1 \text{ MPa}; & S_3(t_1) &= -21 \text{ MPa}. \\
 S_1(t_2) &= \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_2) - \sigma_H(t_2)] = 86.6 \text{ MPa}; & S_3(t_2) &= 90 \text{ MPa}. \\
 S_1(t_3) &= \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_3) - \sigma_H(t_3)] = 92.4 \text{ MPa}; & S_3(t_3) &= 71 \text{ MPa}. \\
 S_1(t_4) &= \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_4) - \sigma_H(t_4)] = 49.6 \text{ MPa}; & S_3(t_4) &= -40 \text{ MPa}. \\
 S_1(t_5) &= \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_5) - \sigma_H(t_5)] = -40.9 \text{ MPa}; & S_3(t_5) &= 90 \text{ MPa}. \\
 S_1(t_6) &= \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_6) - \sigma_H(t_6)] = -46.2 \text{ MPa}; & S_3(t_6) &= 71 \text{ MPa}. \\
 S_1(t_7) &= \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_7) - \sigma_H(t_7)] = -3.4 \text{ MPa}; & S_3(t_7) &= -40 \text{ MPa}.
 \end{aligned}$$

Accoppiando a due a due gli istanti in cui è stata schematizzata la storia di carico si ottiene:

t_1-t_2	$D(t_1; t_2) = 127.9 \text{ MPa}$
t_1-t_3	$D(t_1; t_3) = 115.2 \text{ MPa}$
t_1-t_4	$D(t_1; t_4) = 32.6 \text{ MPa}$
t_1-t_5	$D(t_1; t_5) = 128.1 \text{ MPa}$
t_1-t_6	$D(t_1; t_6) = 115.2 \text{ MPa}$
t_1-t_7	$D(t_1; t_7) = 32.6 \text{ MPa}$
t_2-t_3	$D(t_2; t_3) = 19.9 \text{ MPa}$
t_2-t_4	$D(t_2; t_4) = 135.2 \text{ MPa}$
t_2-t_5	$D(t_2; t_5) = 127.5 \text{ MPa}$
t_2-t_6	$D(t_2; t_6) = 134.2 \text{ MPa}$
t_2-t_7	$D(t_2; t_7) = 158.1 \text{ MPa}$
t_3-t_4	$D(t_3; t_4) = 119.0 \text{ MPa}$
t_3-t_5	$D(t_3; t_5) = 134.6 \text{ MPa}$
t_3-t_6	$D(t_3; t_6) = 138.6 \text{ MPa}$
t_3-t_7	$D(t_3; t_7) = 146.6 \text{ MPa}$
t_4-t_5	$D(t_4; t_5) = 158.4 \text{ MPa}$
t_4-t_6	$D(t_4; t_6) = 146.6 \text{ MPa}$
t_4-t_7	$D(t_4; t_7) = 53.0 \text{ MPa}$

$$\begin{aligned} t_5-t_6 & D(t_5; t_6) = 19.7 \text{ MPa} \\ t_5-t_7 & D(t_5; t_7) = 135.3 \text{ MPa} \\ t_6-t_7 & D(t_5; t_7) = 119.0 \text{ MPa} \end{aligned}$$

L'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico risulta pertanto:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{D_{\max}}{2} = \frac{D(t_4; t_5)}{2} = 79.2 \text{ MPa.}$$

Si può da ultimo calcolare il valore della tensione idrostatica massima, osservando che essa si massimizza quando la σ_x raggiunge il suo massimo assoluto:

$$\sigma_{H,\max} = \sigma_H(t_3) = 53.3 \text{ MPa}$$

I calcoli fatti in precedenza hanno, così, fornito i valori delle grandezze ingegneristiche necessarie per calcolare i coefficienti di sicurezza richiesti dal problema. Ovvero:

Crossland

$$\tau_{a,\text{eq}} = \sqrt{J_{2,a}} + \left(3 \frac{\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} - \sqrt{3} \right) \sigma_{H,\max} = 79.2 + \left(3 \cdot \frac{152}{269} - \sqrt{3} \right) \cdot 53.3 = 77.2 \text{ MPa}$$

$$v_{\text{Crossland}} = \frac{\tau_{A\infty}}{\tau_{a,\text{eq}}} = 1.97$$

Matake

$$\tau_{a,\text{eq}} = \tau_a(\phi^*, \theta^*) + \left(\frac{2\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} - 1 \right) \sigma_{n,\max}(\phi^*, \theta^*) = 74.95 + \left(\frac{2 \cdot 152}{269} - 1 \right) \cdot 75.5 = 84.8 \text{ MPa}$$

$$v_{\text{Matake}} = \frac{\tau_{A\infty}}{\tau_{a,\text{eq}}} = 1.79$$

McDiarmid

$$\tau_{a,\text{eq}} = \tau_a(\phi^*, \theta^*) + \frac{\tau_{A\infty}}{2\sigma_R} \sigma_{n,\max}(\phi^*, \theta^*) = 74.95 + \frac{152}{2 \cdot 430} \cdot 75.5 = 88.3 \text{ MPa}$$

$$v_{\text{McDiarmid}} = \frac{\tau_{A\infty}}{\tau_{a,\text{eq}}} = 1.72$$

Esempio 4.3

Il componente intagliato di figura 4.5, realizzato in acciaio al carbonio, è sollecitato da un carico di flessione/torsione con componenti della sollecitazione che variano con legge

sinusoidale e aventi valori medi diversi da zero. L'angolo di fase è pari a 90° , mentre la frequenza delle due componenti di sollecitazione è pari a 10 Hz. Determinare il coefficiente di sicurezza secondo i criteri di Crossland, Matake e McDiarmid.

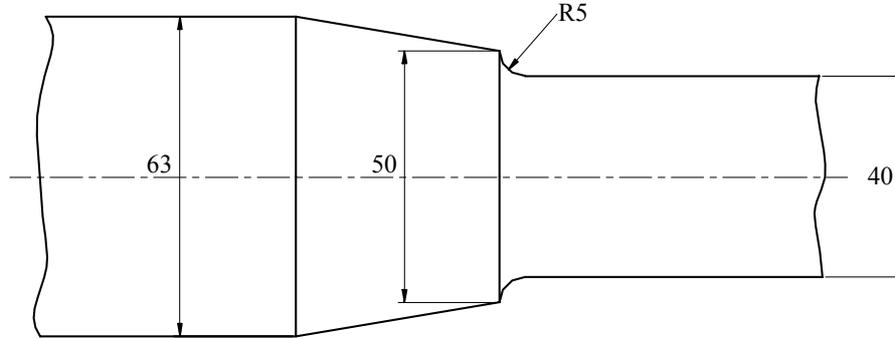


Figura 4.5: Geometria del componente dell'esempio 4.3.

Dati:

$$\sigma_{A\infty} = 269 \text{ MPa}$$

$$\tau_{A\infty} = 152 \text{ MPa}$$

$$\sigma_R = 430 \text{ MPa}$$

$$K_f = 1.15$$

$$M_{f,a} = 502656 \text{ Nmm}$$

$$M_{t,a} = 376992 \text{ Nmm}$$

$$\delta = 90^\circ$$

$$K_d = 1.2$$

$$M_{f,m} = 188496 \text{ Nmm}$$

$$M_{t,m} = 188496 \text{ Nmm}$$

Soluzione:

Il componente di figura 4.5 presenta una concentrazione delle tensioni dovuta ad una variazione del diametro. Il raggio di raccordo, come si evince dalla figura, è pari a 5mm. Essendo tale valore maggiore di 2mm si può assumere $K_f = K_t$. Da Peterson [7] si ricava: $K_{tf} = 1.58$ e $K_{tt} = 1.29$.

I limiti di fatica del pezzo, per $R = -1$, sono pertanto dati da:

$$\sigma_{A\infty}^0 = \frac{\sigma_{A\infty}}{K_{ff} K_f K_d} = 123.4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{A\infty}^0 = \frac{\tau_{A\infty}}{K_{ft} K_f K_d} = 85.4 \text{ MPa}$$

Dai dati del problema, e facendo riferimento alla sezione netta, si ricava:

$$W_f = \frac{\pi d^3}{32} = 6283.2 \text{ mm}^3$$

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} = 12566.4 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{x,a} = \frac{M_{f,a}}{W_f} = 80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,m} = \frac{M_{f,m}}{W_f} = 30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x,a} = \frac{M_{t,a}}{W_t} = 30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x,m} = \frac{M_{t,m}}{W_t} = 15 \text{ MPa}$$

ovvero:

$$\sigma_x(t) = 80 + 30\text{sen}(62.83t)$$

$$\tau_{xy}(t) = 30 + 15\text{sen}(62.83t - 90^\circ)$$

In figura 4.6 è stato riportato l'andamento della storia di carico in termini di tensioni nominali nette.

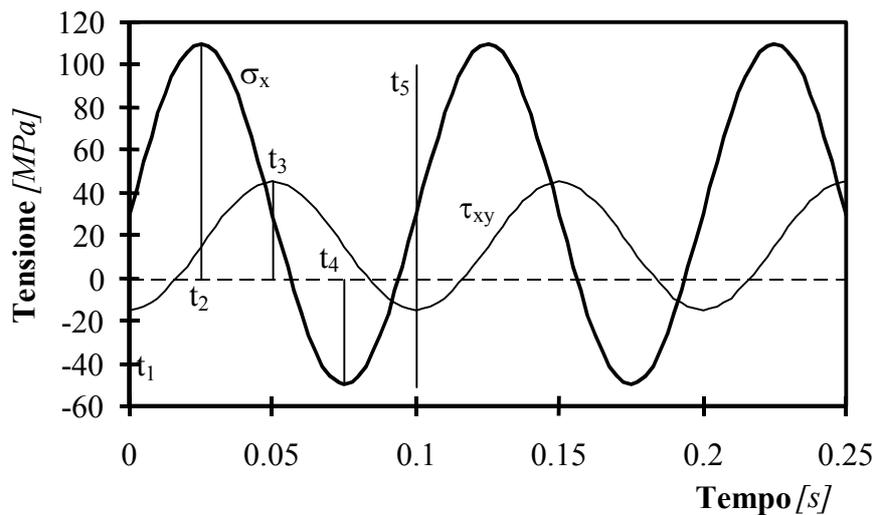


Figura 4.6: Andamento temporale della storia di carico dell'esempio 4.3, espressa in termini di tensioni nominali nette.

Fissando la finestra di osservazione tra gli istanti $t_1=0$ s e $t_5=0.1$ s, si possono individuare i seguenti istanti significativi utili per descrivere la storia di carico.

$t_1=0$ s	$\sigma_x(t_1)=30$ MPa	$\tau_{xy}(t_1)=-15$ MPa
$t_2=0.025$ s	$\sigma_x(t_2)=110$ MPa	$\tau_{xy}(t_2)=15$ MPa
$t_3=0.05$ s	$\sigma_x(t_3)=30$ MPa	$\tau_{xy}(t_3)=45$ MPa
$t_4=0.075$ s	$\sigma_x(t_4)=-50$ MPa	$\tau_{xy}(t_4)=15$ MPa
$t_5=0.1$ s	$\sigma_x(t_4)=30$ MPa	$\tau_{xy}(t_4)=-15$ MPa

Mediante le relazioni (3.3)-(3.5), e ponendo particolare attenzione a segni, è possibile compilare la seguente tabella:

Istante	τ_n	σ_n	ϕ
[s]	[MPa]	[MPa]	[°]
0	-21.1	15	-22.5
0.025	57	55	37.4
0.05	47.7	15	9.2
0.075	29.15	-25	-29.5

Tutti i piani considerati potrebbero essere potenzialmente quelli critici, si tratta a allora di calcolare su ciascuno dei piani individuati il valore della tensione tangenziale in ciascuno degli istanti considerati mediante la (3.7). I risultati di tale operazione sono sintetizzati nella seguente tabella, dove l'ultima colonna è stata calcolata mediante la seguente semplice relazione:

$$\tau_a = \frac{1}{2} \left[\max_{t_i \in T} \tau_n(t_i) - \min_{t_j \in T} \tau_n(t_j) \right]$$

	t_1	t_2	t_3	t_4	
ϕ	τ_n	τ_n	τ_n	τ_n	τ_a
[°]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
-22.5	-21.2	-28.3	21.2	28.3	28.3
37.4	10.5	57	26.3	-20.2	38.6
9.2	-9.5	31.6	47.4	6.3	28.5
-29.5	-20.6	-39.4	10.3	29.1	34.3

La tensione normale al piano di massima ampiezza della tensione tangenziale vale, in ogni istante:

	t_1	t_2	t_3	t_4	
ϕ	σ_n	σ_n	σ_n	σ_n	$\sigma_{n,max}$
[°]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
37.4	-3.4	55	54.5	-4	55

Il piano critico ha, allora, le seguenti caratteristiche:

$$\theta=90^\circ, \phi=37.4^\circ$$

$$\tau_a=38.6 \text{ MPa}; \sigma_{n,max}= 55 \text{ MPa}.$$

Per determinare, adesso, $\sqrt{J_{2,a}}$ è necessario, come già fatto negli esempi precedenti, accoppiare a due a due tutti gli istanti della storia di carico e determinare quella coppia di istanti che massimizzano la (2.37). Anche in questo caso due delle componenti del vettore $S(t)$ risultano diverse da zero. Ovvero:

$$S_1(t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_1) - \sigma_H(t_1)] = 17.3 \text{ MPa}; \quad S_3(t_1) = -15 \text{ MPa}.$$

$$S_1(t_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_2) - \sigma_H(t_2)] = 63.5 \text{ MPa}; \quad S_3(t_2) = 15 \text{ MPa.}$$

$$S_1(t_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_3) - \sigma_H(t_3)] = 17.3 \text{ MPa}; \quad S_3(t_3) = 45 \text{ MPa.}$$

$$S_1(t_4) = \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t_4) - \sigma_H(t_4)] = -28.1 \text{ MPa}; \quad S_3(t_4) = 15 \text{ MPa.}$$

Accoppiando a due a due gli istanti in cui è stata schematizzata la storia di carico si ottiene:

t_1-t_2	$D(t_1; t_2) = 55.1 \text{ MPa}$
t_1-t_3	$D(t_1; t_3) = 60 \text{ MPa}$
t_1-t_4	$D(t_1; t_4) = 55.1 \text{ MPa}$
t_2-t_3	$D(t_2; t_3) = 55.1 \text{ MPa}$
t_2-t_4	$D(t_2; t_4) = 92.4 \text{ MPa}$
t_3-t_4	$D(t_3; t_4) = 55.1 \text{ MPa}$

L'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico risulta infine:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{D_{\max}}{2} = \frac{D(t_2; t_4)}{2} = 46.2 \text{ MPa.}$$

Si può da ultimo calcolare il valore della tensione idrostatica massima, osservando, ancora, che essa si massimizza, nel caso di carichi di flessione/torsione, quando la σ_x raggiunge il suo massimo assoluto:

$$\sigma_{H,\max} = \sigma_H(t_2) = 36.67 \text{ MPa}$$

I calcoli fatti in precedenza hanno, così, fornito i valori delle grandezze ingegneristiche necessarie per determinare i coefficienti di sicurezza richiesti dal problema. Ovvero:

Crossland

$$\tau_{a,\text{eq}} = \sqrt{J_{2,a}} + \left(\frac{3\tau_{A\infty}^0}{\sigma_{A\infty}^0} - \sqrt{3} \right) \sigma_{H,\max} = 80 + \left(\frac{3 \cdot 85.4}{123.4} - \sqrt{3} \right) \cdot 36.67 = 67.4 \text{ MPa}$$

$$v_{\text{Crossland}} = \frac{\tau_{A\infty}^0}{\tau_{a,\text{eq}}} = 1.28$$

Matake

$$\tau_{a,\text{eq}} = \tau_a(\phi^*, \theta^*) + \left(\frac{2\tau_{A\infty}^0}{\sigma_{A\infty}^0} - 1 \right) \sigma_{n,\max}(\phi^*, \theta^*) = 38.6 + \left(\frac{2 \cdot 85.4}{123.4} - 1 \right) \cdot 55 = 59.7 \text{ MPa}$$

$$v_{\text{Matake}} = \frac{\tau_{A\infty}^0}{\tau_{a,\text{eq}}} = 1.43$$

McDiarmid

$$\tau_{a,eq} = \tau_a(\phi^*, \theta^*) + \frac{\tau_{A\infty}^0}{2\sigma_R} \sigma_{n,max}(\phi^*, \theta^*) = 38.6 + \frac{85.4}{2 \cdot 430} \cdot 55 = 44.1 \text{ MPa}$$

$$V_{McDiarmid} = \frac{\tau_{A\infty}}{\tau_{a,eq}} = 1.94$$

Bibliografia

- [1] **H. J. Gough** - *Engineering Steels under Combined Cyclic and Static stresses*. Proc. Inst. Mech. Engrs., 160, 417-440, 1949.
- [2] **H. J. Gough, H. V. Pollard** - *The Strength of Metals Under Combined Alternating Stresses*. Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 113, pp. 3-54, 1935.
- [3] **I. V. Papadopoulos** - *Fatigue polycyclique des metaux une nouvelle approche*. Tesi di dottorato presentata il 18 dicembre 1987 a "L'Ecole Nationale des Ponts et Chaussees".
- [4] **B. Atzori** - *Appunti di Costruzione di Macchine*. Ed. Libreria Cortina, Padova, 1999.
- [5] **G. Sines** - *Behaviour of Metals Under Complex Static and Alternating Stresses*. In Metal Fatigue, Edited by G. Sines & J.L. Waismann, McGraw Hill, New York, pp. 145-169, 1959.
- [6] **G. Sines** - *Failure of Materials under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses*. Technical note 3495, National Advisory Council for Aeronautics, Washington D.C., 1955.
- [7] **R. E. Petterson** - *Notch sensitivity*. In *Metal Fatigue*. Edited by Sines and Waisman, McGraw-Hill, New York.
- [8] **B. Crossland** - *Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strenght of an alloy steel*. Proceeding of the International Conference on Fatigue of Metals, Published by Institution of Mechanical Engineers, London, 1956, pp. 138-149.
- [9] **H. O. Fuchs, R. E. Stephens** - *Metal Fatigue in Engineering*. J. Wiley & Sons, 1980.
- [10] **T. Mataka** - *An explanation on fatigue limit under combined stress*. Bulletin of JSME, Vol. 20, No. 141, pp. 257-263, 1977.
- [11] **D. F. Socie, P. Kurath, J. Koch** - *A Miltiaxial Fatigue Damage Parameter*. EGF 3 (Edited by M. W. Brown and K. J. Miller), Mechanical Engineering Publications, London, (1989) pp. 535-550.
- [12] **D. L. McDiarmid** - *A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure*. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., Vol. 14, No. 4, pp. 429-453, 1991.
- [13] **D. L. Mcdiarmid** - *A Shear-Stress Based Critical-Plane Criterion of Multiaxial Fatigue Failure for Design and Life Prediction*. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, Vol. 17, Iss. 12, pp. 1475-1484, 1995.
- [14] **M. W. Brown, K. J. Miller** - *A theory for fatigue failure under multiaxial stress strain condition*. Proc. Inst. Mech. Engrs 187, [65-73], pp. 745-755, 1973.