

Formulario di Progettazione meccanica

Versione 3 – A.A. 2007/08

La presente dispensa fornisce alcune delle formule ed equazioni disponibili per la consultazione durante la prova scritta del corso di Progettazione Meccanica 1 e 2, del 1° e 2° anno di Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica ed Ingegneria dei Materiali dell'Università di Ferrara.

Indice

STATI TENSO-DEFORMATIVI TRIDIMENSIONALI	2
STATO TENSIONALE: NOTAZIONE TENSORIALE	2
TENSIONI PRINCIPALI E LORO DIREZIONI.....	2
STATO TENSIONALE: CERCHI DI MOHR	3
DEFORMAZIONI LINEARI ELASTICHE.....	3
FATICA AD AMPIEZZA VARIABILE	4
FATICA MULTIASSIALE	6
CALCOLO DELLE GRANDEZZE INGEGNERISTICHE NELLA FATICA MULTIASSIALE	6
AMPIEZZA E VALORE MEDIO DELLA TENSIONE TANGENZIALE SU UN PIANO GENERICO ...	6
AMPIEZZA E VALORE MEDIO DELLA TENSIONE NORMALE AL PIANO	9
CALCOLO DELLE COMPONENTI IN SOLLECITAZIONI BIASSIALI σ_x - τ_{xy}	9
TENSIONE IDROSTATICA	9
SECONDO INVARIANTE DEL TENSORE DEVIATORICO.....	10
CRITERI DI RESISTENZA A FATICA MULTIASSIALE	11
IL CRITERIO DI CROSSLAND	12
IL CRITERIO DI MATAKE	12
IL CRITERIO DI MCDIARMID	13
MECCANICA DELLA FRATTURA.....	14
MECCANICA DELLA FRATTURA: VERIFICHE STATICHE	15
MECCANICA DELLA FRATTURA: VERIFICHE A FATICA.....	16
ELEMENTI DI PLASTICITA.....	17
SCHEMATIZZAZIONE DEL MATERIALE	17
FLESSIONE DELLE TRAVI IN CAMPO PLASTICO	17
EFFETTO DI INTAGLIO IN CAMPO PLASTICO.....	17
AUTOFRETTAGGIO.....	18
FATICA OLIGO-CICLICA.....	19
COMPORTAMENTO CICLICO DEL MATERIALE	19
LA DURATA DEL MATERIALE:	19
INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO	20
INSTABILITÀ GLOBALE DEGLI ELEMENTI SNELLI.....	20
INSTABILITÀ LOCALE DELLE PARETI SOTTILI	21
RESISTENZA DI STRUTTURE IN PARETE SOTTILE.....	22
APPENDICI.....	23

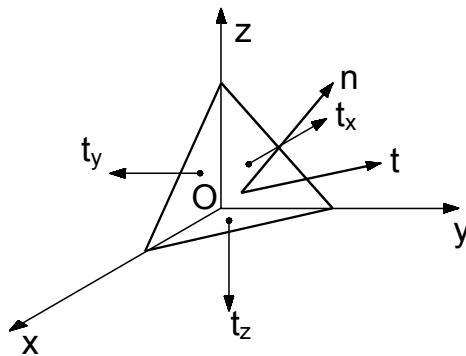
Stati tenso-deformativi tridimensionali

Stato tensionale: notazione tensoriale

Normale ad un piano generico $t_n = t_x n_x + t_y n_y + t_z n_z$

Tensore delle tensioni $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

Vettore tensione su di un piano $\begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$



Tetraedro di Cauchy.

Tensioni principali e loro direzioni

Le tensioni principale sono gli autovalori del tensore delle tensioni

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_n) & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & (\sigma_{yy} - \sigma_n) & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & (\sigma_{zz} - \sigma_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questo sistema ammette soluzione solo se il determinante della prima matrice a primo membro si annulla, ovvero se è soddisfatta:

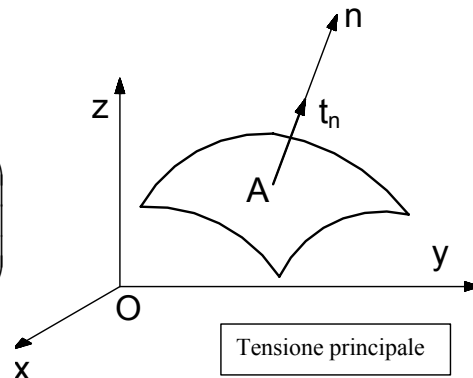
$$\sigma_n^3 - I_{1\sigma} \sigma_n^2 - I_{2\sigma} \sigma_n - I_{3\sigma} = 0$$

quando siano definiti il primo, secondo e terzo invariante di tensione:

$$I_{1\sigma} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_{2\sigma} = \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 - (\sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \sigma_{zz} + \sigma_{yy} \sigma_{zz})$$

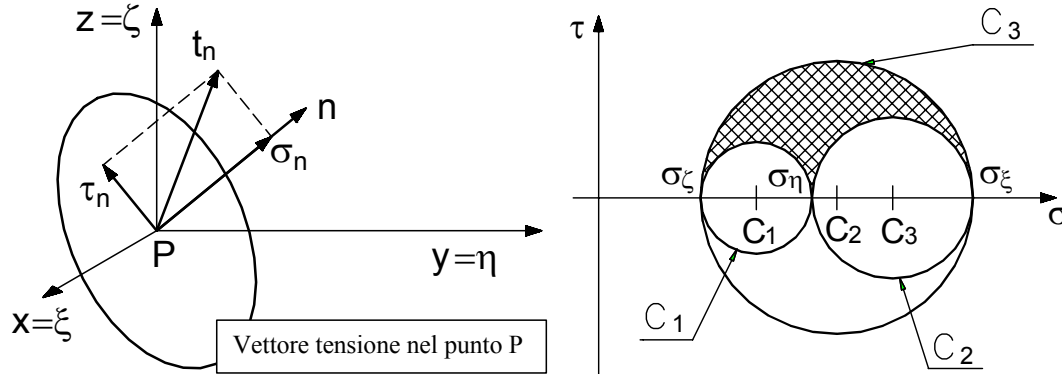
$$I_{3\sigma} = \det[\sigma]$$



Stato tensionale: cerchi di Mohr

Sia assegnato un punto P, un piano di normale n passante per tale punto e il vettore tensione t_n , vettore che può essere decomposto normalmente e tangenzialmente al piano in analisi ottenendo, rispettivamente, la tensione normale σ_n tensione tangenziale τ_n .

La rappresentazione dello stato tensionale generico sul piano di Mohr è data dai tre cerchi rappresentati in figura.



Deformazioni lineari elastiche

Note le costanti E e ν è possibile introdurre una ulteriore costante, di notevole utilità, detta prima costante di Lamè:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Definizione delle deformazioni e Leggi generalizzate di Hooke:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{xx}} = \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{xy}} = \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G} \\ \frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{yy}} = \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] & \frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{xz}} = \varepsilon_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{G} \\ \frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{zz}} = \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] & \frac{\partial \phi_C}{\partial \sigma_{yz}} = \varepsilon_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G} \end{aligned}$$

Dalle precedenti è possibile ricavare anche le leggi inverse generalizzate di Hooke:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G[h\varepsilon_{xx} + \nu^*(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] & \sigma_{xy} &= G \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= 2G[h\varepsilon_{yy} + \nu^*(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] & \sigma_{xz} &= G \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{zz} &= 2G[h\varepsilon_{zz} + \nu^*(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] & \sigma_{yz} &= G \varepsilon_{yz} \end{aligned}$$

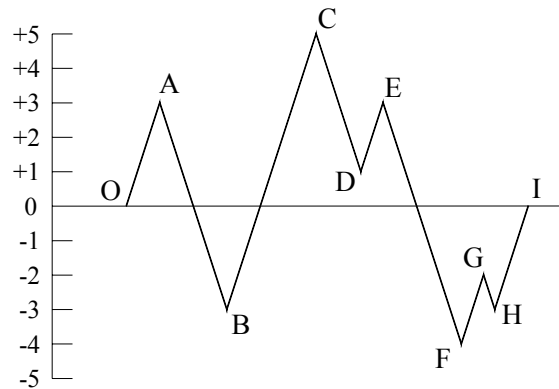
quando vengano definite le costanti:

$$h = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}; \nu^* = \frac{\nu}{1 - 2\nu}.$$

Fatica ad ampiezza variabile

Metodo di conteggio dei cicli

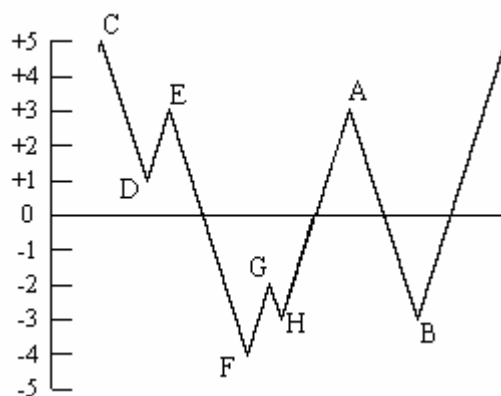
Metodologie per individuare e contare cicli affaticanti in una storia di carico generica individuata esclusivamente dai punti di inversione del carico:



Esempio di storia di carico

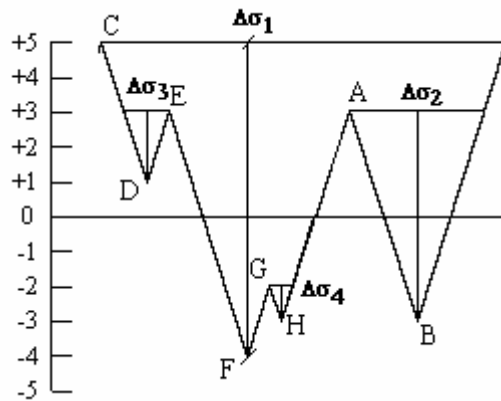
Si introduce il metodo di conteggio del “serbatoio”, ossia la metodologia più semplice applicabile a storie di carico brevi:

- 1) si ipotizza la storia generica come ciclicamente ripetuta e la si traccia partendo dal massimo assoluto:



Storia ciclica riordinata

- 2) Considerare la storia di carico come il profilo di un serbatoio riempito ed estrarre l'acqua dal minore dei minimi relativi contenenti acqua; ad ogni estrazione si conta un ciclo di range pari al “salto idrico”.
- 3) I cicli contati vengono quindi numerati in ordine decrescente di range di sollecitazione.



Cicli contati

Verifica in presenza di ampiezze variabili

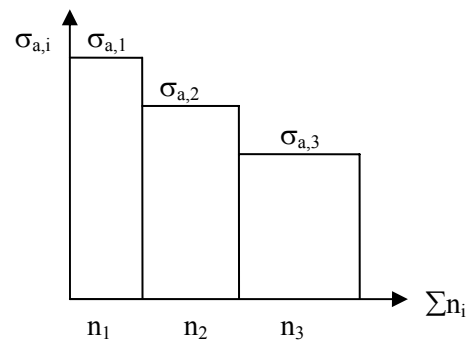
Danno del blocco i-esimo: $D_L = \frac{n_i}{N_i}$;

danno totale: $D = \sum D_i = \sum \frac{n_i}{N_i} = 1$

Storia equivalente:

Dalle equazioni precedenti si ricava:

$$\sigma_{a,eq} = \text{cost} ; n_{eq} = \sum n_i \cdot \left(\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{aeq}} \right)^k ;$$



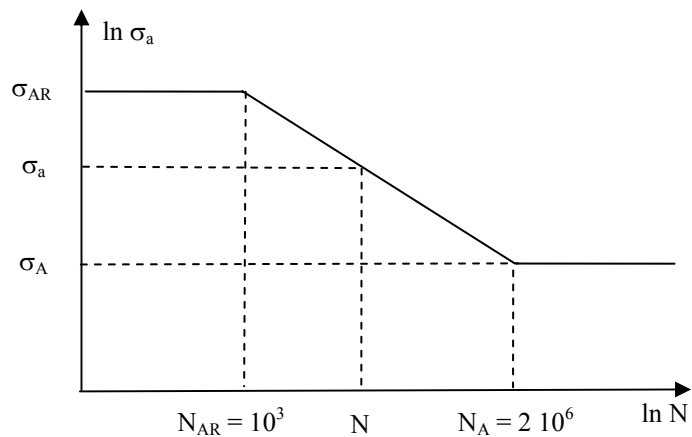
i) se si assume $\sigma_{a,eq} = \sigma_{a,1}$ si determina il num. di cicli equivalente $n_{eq} = \sum n_i \left(\frac{\sigma_{a,i}}{\sigma_{a,1}} \right)^k$

ii) se si assume $n_{eq} = \sum n_i$ si determina l'ampiezza equivalente: $\sigma_{a,eq} = \sqrt[k]{\frac{\sum n_i \cdot \sigma_{a,i}^k}{n}}$

Dove la curva di resistenza è schematizzata come in figura.

L'equazione del tratto a vita a termine:

$$\sigma_a^k \cdot N = \text{cost} = \sigma_A^k \cdot N_A$$



Fatica Multiassiale

Calcolo delle grandezze ingegneristiche nella fatica multiassiale

Tensore delle tensioni variabile nel tempo:

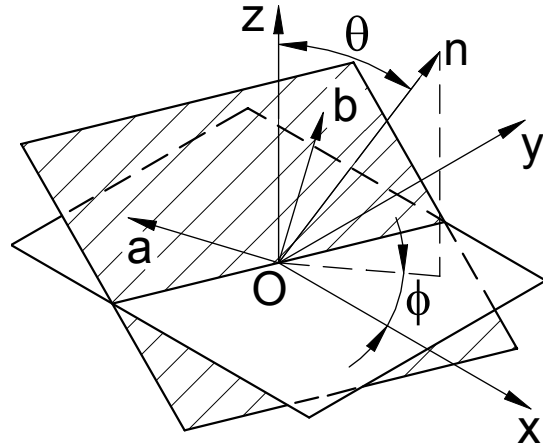
$$[\sigma(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_x(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_y(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_z(t) \end{bmatrix}$$

Le componenti di n possono essere espresse, tramite gli angoli ϕ e θ :

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{Bmatrix}$$

Sulla giacitura Δ possono essere individuate due direzioni ortogonali che permettono di definire il sistema di riferimento di piano Oabn:

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\cos(\theta)\cos(\phi) \\ -\cos(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix}$$

vettore tensione totale t :

$$t(t) \equiv [t_x(t), t_y(t), t_z(t)],$$

$$t_x(t) = \sigma_x(t) \cdot n_x + \tau_{xy}(t) \cdot n_y + \tau_{xz}(t) \cdot n_z$$

$$t_y(t) = \tau_{xy}(t) \cdot n_x + \sigma_y(t) \cdot n_y + \tau_{yz}(t) \cdot n_z$$

$$t_z(t) = \tau_{xz}(t) \cdot n_x + \tau_{yz}(t) \cdot n_y + \sigma_z(t) \cdot n_z$$

tensione normale e tangenziale al piano Δ in un generico istante, infatti:

$$\sigma_n(t) = t_x(t) \cdot n_x + t_y(t) \cdot n_y + t_z(t) \cdot n_z$$

$$\tau_{na}(t) = t_x(t) \cdot a_x + t_y(t) \cdot a_y + t_z(t) \cdot a_z$$

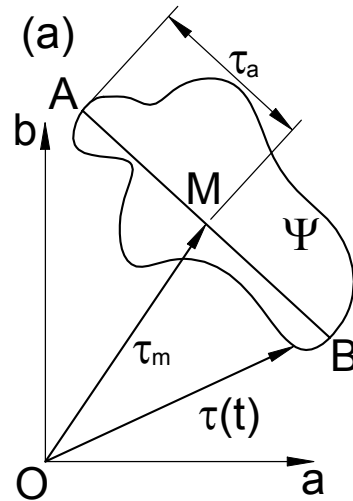
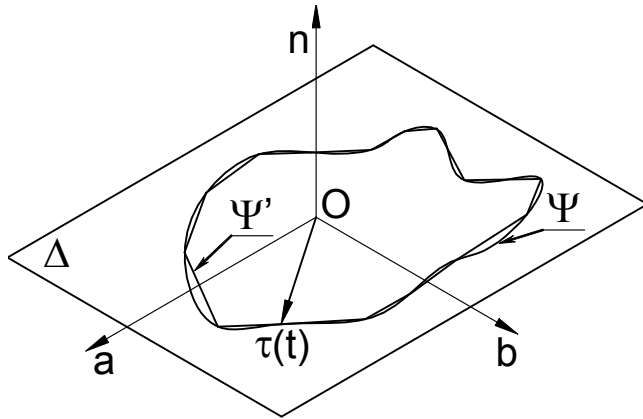
$$\tau_{nb}(t) = t_x(t) \cdot b_x + t_y(t) \cdot b_y + t_z(t) \cdot b_z$$

Risultante della tensione tangenziale:

$$\tau(t) = \sqrt{\tau_{na}^2(t) + \tau_{nb}^2(t)}.$$

Ampiezza e valore medio della tensione tangenziale su un piano generico

Su di un piano generico il vettore tensione tangenziale variabile nel tempo, in un periodo T , descrive una curva (vedi figura) il problema è la definizione, su tale curva, di ampiezza e valor medio della tensione tangenziale.



Il metodo della corda

Al variare di due istanti generici t_1 e $t_2 \in T$, si determina la corda massima:

$$\tau_a = \frac{1}{2} \max_{t_1 \in T} \left[\max_{t_2 \in T} |\tau(t_1) - \tau(t_2)| \right]$$

Metodo della Corda

Il metodo della più piccola ipersfera

Al variare di due istanti generici t_1 e $t_2 \in T$ e si determinino i corrispondenti punti P_1 e P_2 :

$$P_1 \equiv [\tau_{na}(t_1), \tau_{nb}(t_1)] \text{ con } t_1 \in T$$

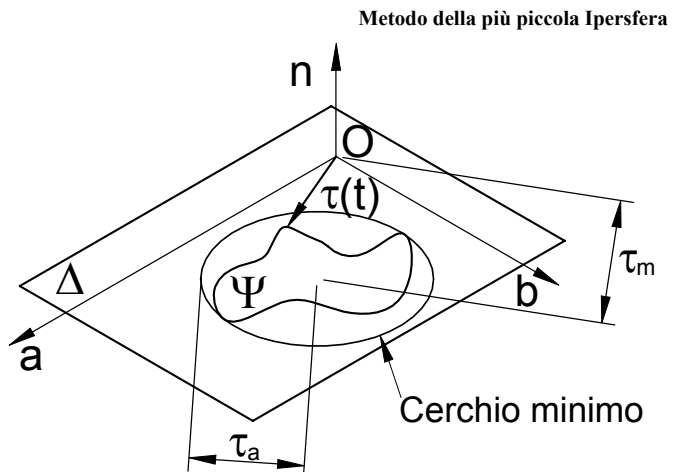
$$P_2 \equiv [\tau_{na}(t_2), \tau_{nb}(t_2)] \text{ con } t_2 \in T \text{ e } t_2 \neq t_1$$

Si calcolano le n_D circonferenze aventi diametro pari alla distanza tra i due punti in esame.

Pertanto le n_D circonferenze hanno raggio R e centro $C \equiv (C_a, C_b)$ pari rispettivamente a:

$$C_a = \frac{\tau_{na}(t_1) + \tau_{na}(t_2)}{2}$$

$$C_b = \frac{\tau_{nb}(t_1) + \tau_{nb}(t_2)}{2}$$



Metodo della più piccola Ipersfera

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{[\tau_{na}(t_1) - \tau_{na}(t_2)]^2 + [\tau_{nb}(t_1) - \tau_{nb}(t_2)]^2}$$

Si costruiscono ora tutte le n_T circonferenze, passanti per tre punti, P_1 , P_2 e P_3 :

$$P_1 \equiv [\tau_{na}(t_1), \tau_{nb}(t_1)] \text{ con } t_1 \in T$$

$$P_2 \equiv [\tau_{na}(t_2), \tau_{nb}(t_2)] \text{ con } t_2 \in T \text{ e } t_2 \neq t_1$$

$$P_3 \equiv [\tau_{na}(t_3), \tau_{nb}(t_3)] \text{ con } t_3 \in T \text{ e } t_3 \neq t_2 \neq t_1$$

Per determinare il raggio R e il centro $C \equiv (C_a, C_b)$ di ciascuna delle n_T circonferenze si deve risolvere un sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} R^2 = [C_a - \tau_{na}(t_1)]^2 - [C_b - \tau_{nb}(t_1)]^2 \\ R^2 = [C_a - \tau_{na}(t_2)]^2 - [C_b - \tau_{nb}(t_2)]^2 \\ R^2 = [C_a - \tau_{na}(t_3)]^2 - [C_b - \tau_{nb}(t_3)]^2 \end{cases}$$

Tra le n_D+n_T circonferenze individuate si devono scartare tutte quelle che non contengono interamente la curva Ψ , ovvero che non contengono tutti i k vertici della poligonale con cui la curva Ψ stessa è stata approssimata.

Si è così costruita una famiglia di circonferenze contenenti tutta la curva Ψ e tra queste si deve estrarre quella avente raggio più piccolo; se tale circonferenza ha raggio R_{\min} e centro $C_{\min} \equiv (C_{a,\min}, C_{b,\min})$ allora l'ampiezza e il valore medio della tensione tangenziale agente su un piano sono:

$$\tau_a = R_{\min} \qquad \tau_m = \sqrt{C_{a,\min}^2 + C_{b,\min}^2}$$

Metodo della massima varianza

Si consideri uno stato piano con variazione sinusoidale delle componenti normali e tangenziali:

$$\sigma_x(t) = \sigma_a \sin(\omega t)$$

$$\tau_{xy}(t) = \tau_a \sin(\omega t + \delta)$$

Il piano di massima variazione della tensione tangenziale si ha per $\vartheta=90^\circ$ ed il valore di φ può essere determinato analizzando la varianza della tensione tangenziale risultata e si determina che la direzione critica si ha per valori in accordo con la seguente tabella:

φ	$\delta \neq \pi/2$	$\delta = \pi/2$
$(\sigma_a - 2\tau_a) < 0$	$\varphi_0 + i\frac{\pi}{2}$	$i\frac{\pi}{2}$
$(\sigma_a - 2\tau_a) = 0$	$\frac{3\pi}{8} + i\frac{\pi}{2}$	ogni φ
$(\sigma_a - 2\tau_a) > 0$	$\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right) + i\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}$

$$\text{Dove } \varphi_0 = -\frac{1}{4} \arctan\left(\frac{4\sigma_a\tau_a \cos\delta}{\sigma_a^2 - 4\tau_a^2}\right) \text{ e } i = 0, 1, 2, \dots$$

Per tali valori la varianza della tensione tangenziale vale:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tau_m(t)) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\varphi)^2}{4} \sigma_a^2 + \cos(2\varphi)^2 \tau_a^2 + \sin(2\varphi) \cos(2\varphi) \sigma_a \tau_a \cos(\delta) \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[[1 - \cos(4\varphi)] \sigma_a^2 + 4[1 + \cos(4\varphi)] \tau_a^2 + 4\sin(4\varphi) \sigma_a \tau_a \cos(\delta) \right] \end{aligned}$$

Da cui il calcolo dell'ampiezza:

$$\tau_a = \sqrt{2 \text{Var}(\tau_m(t))}$$

Ampiezza e valore medio della tensione normale al piano

Poiché la tensione normale al piano è una grandezza scalare e non vettoriale, per essa è più semplice definire ampiezza e valore medio.

$$\sigma_{n,a} = \frac{1}{2} \left[\max_{t_1 \in T} \sigma_n(t_1) - \min_{t_2 \in T} \sigma_n(t_2) \right] \quad \sigma_{n,m} = \frac{1}{2} \left[\max_{t_1 \in T} \sigma_n(t_1) + \min_{t_1 \in T} \sigma_n(t_1) \right]$$

$$\sigma_{n,max} = \sigma_{n,a} + \sigma_{n,m}$$

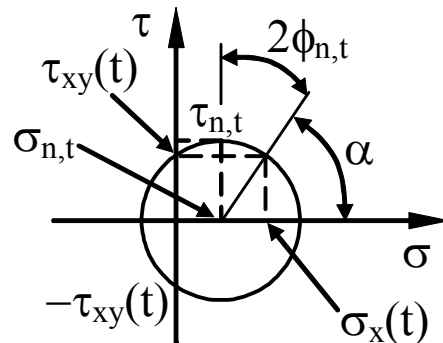
Calcolo delle componenti in sollecitazioni biassiali σ_x - τ_{xy}

In uno stato tensionale piano avente σ_x e τ_{xy} , in ogni istante è possibile determinare il valore massimo della tensione tangenziale τ_n che agirà su di un piano inclinato di un angolo $\phi_{n,t}$ rispetto all'asse "X".

$$\tau_n = \sqrt{\frac{\sigma_x^2(t)}{4} + \tau_{xy}^2(t)}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x(t)}{2}$$

$$\phi_{n,t} = \frac{1}{2} \left(\arccos \frac{|\tau_{xy}(t)|}{|\tau_n(t)|} \right); \quad \alpha = \arcsen \frac{|\tau_{xy}(t)|}{|\tau_n(t)|}$$



È opportuno ricercare, in prima approssimazione, il piano critico tra i piani di massima tensione tangenziale negli istanti di massimo e di minimo di ciascuna delle componenti. In termini generici il valori tensionali lungo una direzione orientata genericamente rispetto all'asse X, risulta:

$$\sigma(\phi; t) = \frac{\sigma_x}{2} [1 + \cos 2\phi] - \tau_{xy} \sin 2\phi$$

$$\tau(\phi, t) = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi$$

Tensione idrostatica

$$\sigma_H(t) = \frac{1}{3} \cdot \text{tr}([\sigma(t)]) = \frac{1}{3} \cdot [\sigma_x(t) + \sigma_y(t) + \sigma_z(t)]$$

o in termini matriciali:

$$[\sigma_H(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_H(t) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_H(t) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_H(t) \end{bmatrix}$$

L'ampiezza e il valore medio possono allora essere calcolati come:

$$\sigma_{H,m} = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t_1 \in T} \frac{\text{tr}([\sigma(t_1)])}{3} + \min_{t_2 \in T} \frac{\text{tr}([\sigma(t_2)])}{3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t_1 \in T} \sigma_H(t_1) + \min_{t_2 \in T} \sigma_H(t_2) \right\}$$

$$\sigma_{H,a} = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t_1 \in T} \frac{\text{tr}([\sigma(t_1)])}{3} - \min_{t_2 \in T} \frac{\text{tr}([\sigma(t_2)])}{3} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t_1 \in T} \sigma_H(t_1) - \min_{t_2 \in T} \sigma_H(t_2) \right\}$$

Secondo invariante del tensore deviatorico

Il tensore deviatorico è definito come:

$$[\sigma_D(t)] = [\sigma(t)] - [\sigma_H(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_x(t) - \sigma_H(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_y(t) - \sigma_H(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_z(t) - \sigma_H(t) \end{bmatrix}$$

la radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{\frac{1}{2} [\sigma_D(t)] \cdot [\sigma_D(t)]} \quad \text{oppure} \quad \sqrt{J_2(t)} = \sqrt{S_1^2(t) + S_2^2(t) + S_3^2(t) + S_4^2(t) + S_5^2(t)}$$

dove

$$S_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t) - \sigma_H(t)] \quad S_3(t) = \tau_{xy}(t)$$

$$S_2(t) = \frac{1}{2} [\sigma_y(t) - \sigma_z(t)] \quad S_4(t) = \tau_{xz}(t)$$

$$S_5(t) = \tau_{yz}(t)$$

la radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico è pari al modulo del vettore $S(t) \in \mathcal{R}^5$, variabile nel tempo, di componenti:

$$S(t) \equiv [S_1(t), S_2(t), S_3(t), S_4(t), S_5(t)].$$

Per calcolare allora l'ampiezza e il valore medio del secondo invariante del tensore deviatorico si può ricorrere all'utilizzo sia del metodo della corda sia del metodo della più piccola ipersfera

Calcolo della ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico col metodo della corda

Se si considerano due istanti, t_1 e t_2 , della storia di carico in esame i vettori associati a tali istanti possono essere espressi come:

$$S(t_i) \equiv [S_1(t_i), S_2(t_i), S_3(t_i), S_4(t_i), S_5(t_i)]$$

La distanza tra gli estremi di tali vettori è data dalla relazione:

$$D = \sqrt{\sum_{i=1}^5 [S_i(t_1) - S_i(t_2)]^2}$$

l'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico può essere calcolata come:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{D_{\max}}{2}.$$

Criteri di resistenza a fatica multiassiale

Il criterio di Gough

Schematizzazione dei materiali

Materiali DUTTILI:
$$\frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}} \geq \sqrt{3}$$

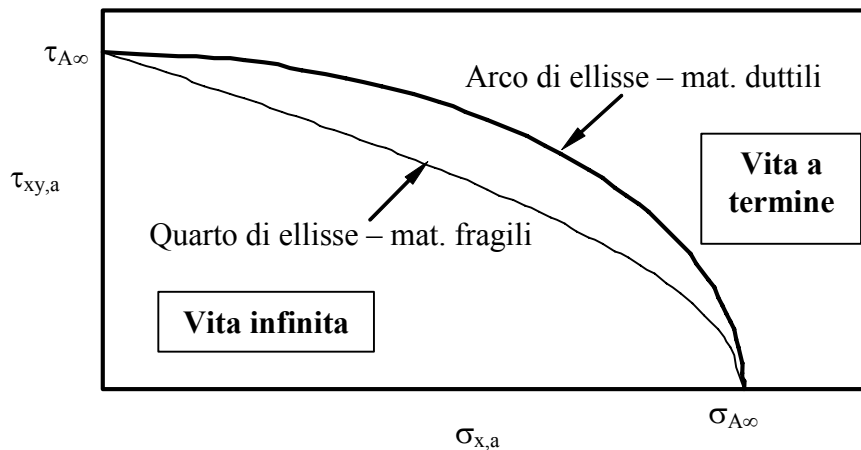
Materiali FRAGILI:
$$1.2 < \frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}} < \sqrt{3}$$

Criterio di resistenza

$$\left(\frac{\sigma_{x,a}}{\sigma_{A\infty}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy,a}}{\tau_{A\infty}}\right)^2 \leq 1 \quad (\text{materiali DUTTILI})$$

$$\left(\frac{\tau_{xy,a}}{\tau_{A\infty}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x,a}}{\sigma_{A\infty}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}} - 1\right) + \left(\frac{\sigma_{x,a}}{\sigma_{A\infty}}\right) \left(2 - \frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}}\right) \leq 1 \quad (\text{materiali FRAGILI})$$

dove con $\sigma_{A\infty}$ e $\tau_{A\infty}$ si sono indicati, rispettivamente, il limite di fatica a flessione per $R=-1$ e a torsione per $R=-1$, determinati, ambedue, sul materiale base.



Relazioni di Gough nel piano $\tau_{xy,a}$ - $\sigma_{x,a}$.

Possibile definizione di ampiezza di tensione equivalente

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + \left(\frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}}\right)^2 \tau_{xy,a}^2} \leq \sigma_{A\infty}$$

Estensione del criterio di Gough a componenti intagliati

L'approccio proposto da Gough può essere anche esteso al caso di organi reali intagliati correggendo semplicemente il valore dei limiti di fatica mediante gli usuali coefficienti K_f , K_d e K_l .

$$\sigma_{A\infty}^0 = \frac{\sigma_{A\infty}}{K_{ff} K_l K_d} \quad \tau_{A\infty}^0 = \frac{\tau_{A\infty}}{K_{ft} K_l K_d}$$

Estensione del criterio di Gough a sollecitazioni aventi $R \neq -1$

Nel caso di flessione con rapporto di ciclo R , il limite di fatica può essere, allora, determinato come:

$$\sigma_{AR}^0 = \sigma_{A\infty}^0 \left(1 - \frac{\sigma_{x,m}}{\sigma_R} \right) = \frac{\sigma_{A\infty}}{K_{ff} K_I K_d} \left(1 - \frac{\sigma_{x,m}}{\sigma_R} \right)$$

dove con σ_R si è indicato il valore della tensione di rottura del materiale base.

In modo del tutto analogo si potrebbe calcolare (anche se questa correzione può essere trascurata) il valore del limite di fatica in presenza di una tensione media diversa da zero:

$$\tau_{AR}^0 = \tau_{A\infty}^0 \left(1 - \frac{\tau_{xy,m}}{\tau_R} \right) = \frac{\tau_{A\infty}}{K_{ff} K_I K_d} \left(1 - \frac{\tau_{xy,m}}{\tau_R} \right)$$

dove con τ_R si è indicato il valore della tensione di rottura a torsione del materiale base.

Verifica in presenza di momento torcente costante

In particolari applicazioni, come ad esempio negli alberi di trasmissione, il valore della ampiezza della sollecitazione di torsione può essere nullo, mentre la componente flessionale varia con rapporto di ciclo $R = -1$. In questi casi per eseguire una verifica maggiormente in vantaggio di sicurezza si può sostituire, $\tau_{xy,a}$ con $\tau_{xy,m}$:

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + H^2 \tau_{xy,m}^2} \leq \sigma_{A\infty}^0$$

ed esprimere il rapporto H come:
$$H = \frac{\sigma_{max}^0}{\tau_S}$$

dove con τ_S si è indicato il valore della tensione tangenziale di snervamento.

Il criterio di Crossland

La formulazione analitica del criterio di Crossland è basata su una combinazione lineare della ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico, $\sqrt{J_{2,a}}$, e della tensione idrostatica massima, $\sigma_{H,max}$:

$$\sqrt{J_{2,a}} + \left(\frac{3\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} - \sqrt{3} \right) \sigma_{H,max} \leq \tau_{A\infty}$$

Ovvero, una ampiezza di tensione tangenziale equivalente pari a:

$$\tau_{a,eq} = \sqrt{J_{2,a}} + \left(\frac{3\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} - \sqrt{3} \right) \sigma_{H,max} \leq \tau_{A\infty}$$

Il criterio di Matake

Il criterio di Matake si basa sulla determinazione del piano su cui risulta essere massimo il valore della ampiezza della tensione tangenziale (piano critico). Indicando, quindi, con ϕ^* e θ^* gli angoli che individuano nello spazio l'orientazione di tale piano, il criterio può essere espresso come la combinazione lineare della ampiezza della tensione tangenziale e della tensione normale massima calcolate sul piano critico, ovvero:

$$\tau_a(\phi^*, \theta^*) + \alpha \cdot \sigma_{n,\max}(\phi^*, \theta^*) \leq \beta.$$

Le costanti α e β possono essere determinate applicando il criterio al caso di una sollecitazione monoassiale alterna con $R=-1$ e alla torsione alterna con $R=-1$ si ricava:

$$\alpha = \left(\frac{2\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} \right) - 1; \quad \beta = \tau_{t-1}$$

Il criterio in discussione può, allora, essere riscritto come:

$$\tau_{a,\text{eq}} = \tau_a(\phi^*, \theta^*) + \left(\frac{2\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} - 1 \right) \sigma_{n,\max}(\phi^*, \theta^*) \leq \tau_{A\infty}.$$

Il criterio di McDiarmid

Sul piano critico definito come nel criterio di Mataka, si applicano le seguenti relazioni:

$$\frac{\tau_a(\phi^*, \theta^*)}{\tau_{A\infty}} + \frac{\sigma_{n,\max}(\phi^*, \theta^*)}{2\sigma_R} \leq 1$$

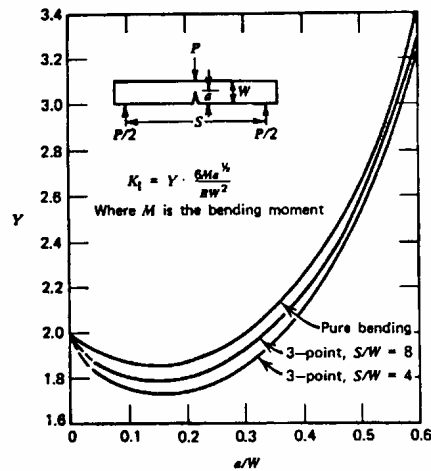
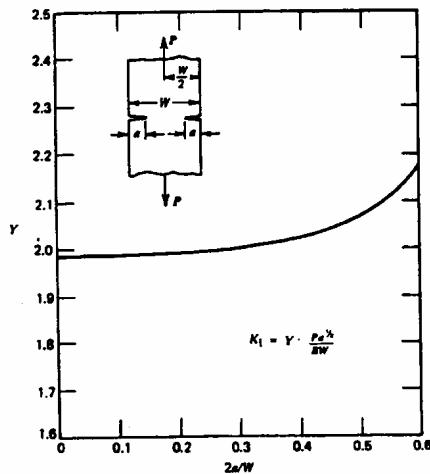
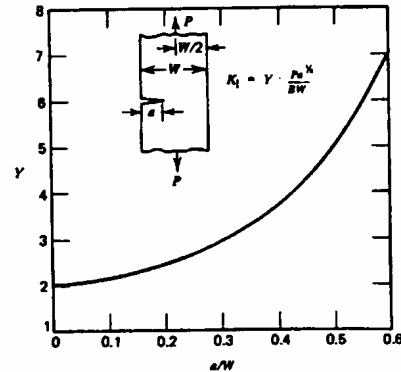
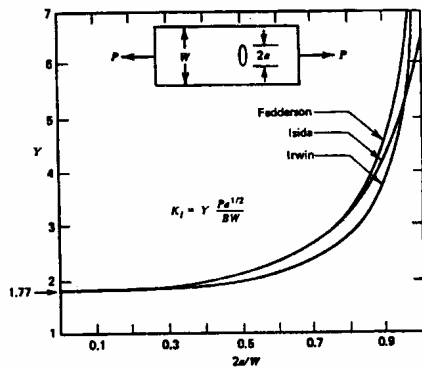
$$\tau_{a,\text{eq}} = \tau_a(\phi^*, \theta^*) + \frac{\tau_{A\infty}}{2\sigma_R} \sigma_{n,\max}(\phi^*, \theta^*) \leq \tau_{A\infty}$$

Meccanica della Frattura

Calcolo del SIF $K_I = \alpha \sigma_{nom} \sqrt{\pi a}$

Dove: a semi-lunghezza della cricca
 α fattore di forma adimensionale
 σ_{nom} tensione nominale lorda

Fattori di Forma: nei grafici $Y = \alpha \sqrt{\pi}$



Caso 1: cricca centrale in una piastra soggetta a tensione:

$$\text{formula di Fedderson } \alpha = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{w}\right)}$$

$$\text{formula di Irwin } \alpha = \sqrt{\frac{w}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{w}\right)}$$

$$\text{dove } \sigma_{nom} = P/(B W)$$

Caso 2: singola cricca laterale in una piastra soggetta a tensione:

$$\alpha = 1.122 - 0.231\left(\frac{a}{w}\right) + 1.055\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.71\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.38\left(\frac{a}{w}\right)^4$$

$$\text{dove } \sigma_{nom} = P/(B W)$$

Caso 3: doppia cricca laterale in una piastra soggetta a tensione:

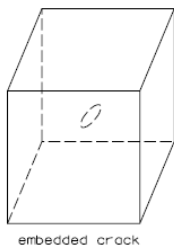
$$\alpha = 1.122 + 0.203 \left(\frac{2a}{w} \right) - 1.196 \left(\frac{2a}{w} \right)^2 + 1.930 \left(\frac{2a}{w} \right)^3$$

dove $\sigma_{\text{nom}} = P / (B W)$

Caso 4: singola cricca laterale in una trave soggetta a flessione:

$$\alpha = 1.122 - 1.394 \left(\frac{a}{w} \right) + 7.318 \left(\frac{a}{w} \right)^2 - 13.07 \left(\frac{a}{w} \right)^3 + 13.99 \left(\frac{a}{w} \right)^4$$

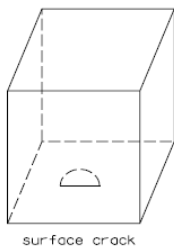
dove $\sigma_{\text{nom}} = 6M / (B W^2)$



Geometrie Tridimensionali

Caso 5: cricca interna circolare di raggio "a"

$$\alpha = \frac{2}{\pi}$$

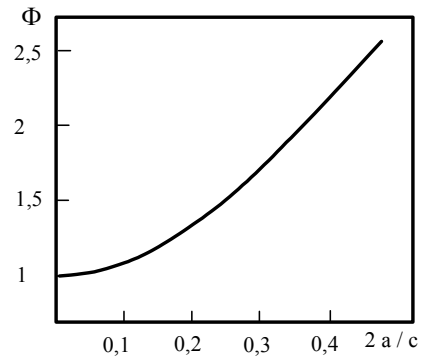


Caso 6: cricca superficiale semiellittica

Sia

- "a" la profondità
- "2c" la lunghezza superficiale

$$\alpha = \frac{1.122}{\sqrt{\Phi}}$$



Meccanica della frattura: Verifiche statiche

Fattori di influenza su K critico:

spessore: $K_C = K_{IC}$ per spessori t maggiori di $t^* = 2.5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_s} \right)^2$

Verifica fondamentale della meccanica della frattura: $K_I \leq K_{IC}$

Campo di utilizzo della meccanica della frattura statica: $a \geq a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{(\alpha) \sigma_s} \right)^2$

Meccanica della frattura: Verifiche a Fatica

Velocità di propagazione della cricca (Curva di Paris): $\frac{da}{dn} = C \Delta K^m$

con C ed m parametri dipendenti dal materiale.

Verifica a vita infinita (soglia di non propagazione): $\Delta K_I \leq \Delta K_{th}$

Verifica a vita a termine (calcolo della durata o numero di cicli a rottura):

$$N_f = \int_0^{N_f} dN = \frac{1}{C \Delta \sigma_{nom}^m \pi^{\frac{m}{2}}} \int_{a_i}^{a_f} \frac{1}{\alpha^m a^{\frac{m}{2}}} da$$

se il fattore di forma può considerarsi costante al variare di "a":

$$N_f = \frac{1}{C \Delta \sigma_{nom}^m \pi^{\frac{m}{2}} \alpha^m} \frac{1}{\left(\frac{m}{2} - 1\right)} \left[\frac{1}{a_i^{\left(\frac{m}{2} - 1\right)}} - \frac{1}{a_f^{\left(\frac{m}{2} - 1\right)}} \right]$$

dove a_i ed a_f sono le lunghezze iniziali e finali della cricca, in particolare la lunghezza finale si stima imponendo: $K_{IC} = \alpha \sigma_{nom,max} \sqrt{\pi a_f}$

Campo di utilizzo della meccanica della frattura, fatica: $a \geq a_{0,f} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{(\alpha) 2 \sigma_A} \right)^2$

ELEMENTI DI PLASTICITA

Schematizzazione del materiale

Materiale Elastico-Perfettamente Plastico

$$\begin{cases} \sigma = E \varepsilon & \varepsilon \leq \frac{\sigma_y}{E} \\ \sigma = \sigma_y & \varepsilon > \frac{\sigma_y}{E} \end{cases} \quad \text{E: modulo elastico; } \sigma_y \text{ carico di snervamento}$$

Materiale ad incrudimento variabile: Ramberg-Osgood

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k} \right)^{\frac{1}{n}}$$

E: modulo elastico; k coefficiente di resistenza; n coefficiente di incrudimento

Flessione delle travi in campo plastico

Coefficiente di adattamento plastico

$$\psi = \frac{M_{f,\max}^p}{M_{f,\max}^e}$$

$M_{f,\max}^e$ momento flettente massimo ottenibile con materiale lineare elastico, $M_{f,\max}^p$ momento flettente massimo ottenibile con materiale elasto-elastico

Momento flettente massimo per sezione rettangolare e con materiale elastico-perfettamente plastico

$$M_{f,\max}^p = \frac{bh^2}{4} \sigma_y$$

b: larghezza della sezione, h: altezza della sezione, σ_y : carico di snervamento

Effetto di intaglio in campo plastico

Regola del Neuber

$$K_\sigma \cdot K_\varepsilon = K_t^2$$

K_σ coefficiente di concentrazione delle tensioni in campo plastico; K_ε coefficiente di concentrazione delle deformazioni in campo plastico; K_t coefficiente di concentrazione delle tensioni elastico;

Regola di Neuber per materiale tipo Ramberg-Osgood

$$\frac{K_t^2 \sigma_n^2}{E} = \frac{\sigma_{\text{picco}}^2}{E} + \sigma_{\text{picco}} \left(\frac{\sigma_{\text{picco}}}{k} \right)^{\frac{1}{n}}$$

σ_{picco} tensione di picco all'apice dell'intaglio, σ_n tensione nominale, K_t coefficiente di concentrazione delle tensioni elastico

Costanza del K_ϵ

$$K_\epsilon = K_t$$

Regola della costanza del K_ϵ per materiale tipo Ramberg-Osgood

$$\frac{K_t \sigma_n}{E} = \frac{\sigma_{\text{picco}}}{E} + \left(\frac{\sigma_{\text{picco}}}{k} \right)^{\frac{1}{n}}$$

σ_{picco} tensione di picco all'apice dell'intaglio

Autofrettaggio

r_i : raggio interno

r_e : raggio esterno

R : raggio plastico

σ_y : carico di snervamento

σ_r : tensione radiale

σ_θ : tensione tangenziale

σ_{eq} : tensione equivalente di Von Mises

p : pressione interna

p_{limite} : pressione di scoppio

Tensione radiale, tangenziale e di Von Mises in un recipiente cilindrico dotato di fondi di estremità e sollecitato da una pressione interna p nell'ipotesi di materiale lineare elastico:

$$\sigma_\theta = \frac{p r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right) ; \sigma_r = \frac{p r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right) ; \sigma_{\text{eq}} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) = \sqrt{3} \frac{p r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{1}{r^2}$$

Tensione radiale, tangenziale e di Von Mises in un recipiente cilindrico dotato di fondi di estremità e sollecitato da una pressione interna p nell'ipotesi di materiale elastico-perfettamente plastico:

zona elastica ($r \geq R$)

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_y R^2}{\sqrt{3} r_e^2} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right) ; \sigma_r = \frac{\sigma_y R^2}{\sqrt{3} r_e^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right) ; \sigma_{\text{eq}} = \sigma_y \frac{R^2}{r^2}$$

zona plastica ($r < R$)

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left(\frac{R^2}{r_e^2} - 2 \ln \frac{R}{r} + 1 \right) ; \sigma_r = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left(\frac{R^2}{r_e^2} - 2 \ln \frac{R}{r} - 1 \right) ; \sigma_{\text{eq}} = \sigma_y$$

Raggio plastico R :

$$p + \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left(\frac{R^2}{r_e^2} - 2 \ln \frac{R}{r_i} - 1 \right) = 0$$

Pressione di scoppio

$$p_{\text{limite}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_y \ln \frac{r_e}{r_i}$$

Fatica Oligo-ciclica

Comportamento ciclico del materiale

Il comportamento ciclico del materiale viene schematizzato dalla relazione di Ramberg Osgood applicando alle ampiezze di tensione e deformazione e utilizzando le grandezze cicliche stabilizzate.

$$\varepsilon_{a,tot} = \varepsilon_{a,el} + \varepsilon_{a,pl} = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{k'} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

I valori tenso-deformativi all'apice degli intagli vengono valutati in base alle relazioni riportate in "Effetto di Intaglio in Campo Plastico".

La durata del materiale:

La durata del materiale si esprime in termini di numero di alternanze $N' = 2 N_f$, dove N_f è il numero di cicli a rottura per fatica:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{a,tot} &= \varepsilon_{a,el} + \varepsilon_{a,pl} \\ &= \frac{\sigma'_f}{E} (N')^b + \varepsilon'_f (N')^c \end{aligned}$$

Dove i seguenti parametri dipendono dal materiale:

- σ'_f coefficiente di resistenza a fatica
- b esponente di resistenza a fatica
- ε coefficiente di duttilità a fatica
- c esponente di duttilità a fatica

Instabilità dell'equilibrio

Instabilità globale degli elementi snelli

Caso Euleriano di riferimento

Carico critico:

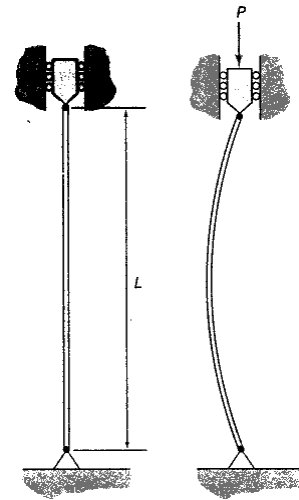
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2} = \frac{\pi^2 E I}{L_0^2}$$

Dove

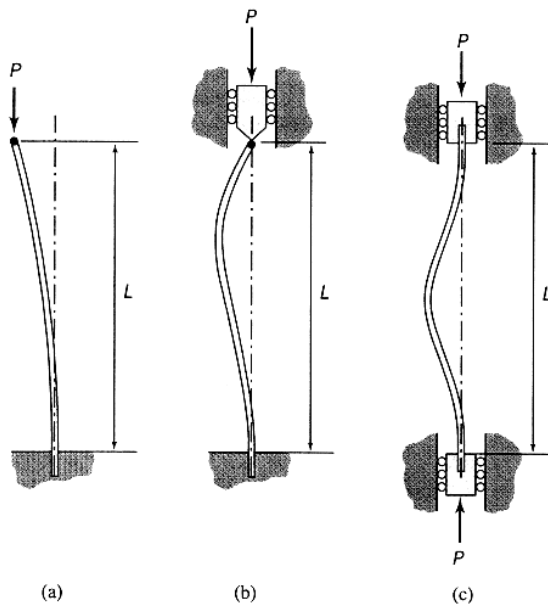
L_0 è la lunghezza libera di inflessione della trave (distanza tra due flessi della deformata nel caso di riferimento coincide con la lunghezza della trave).

E modulo elastico del materiale

I momento d'inerzia minimo della sezione della trave



Altre condizioni di vincolo



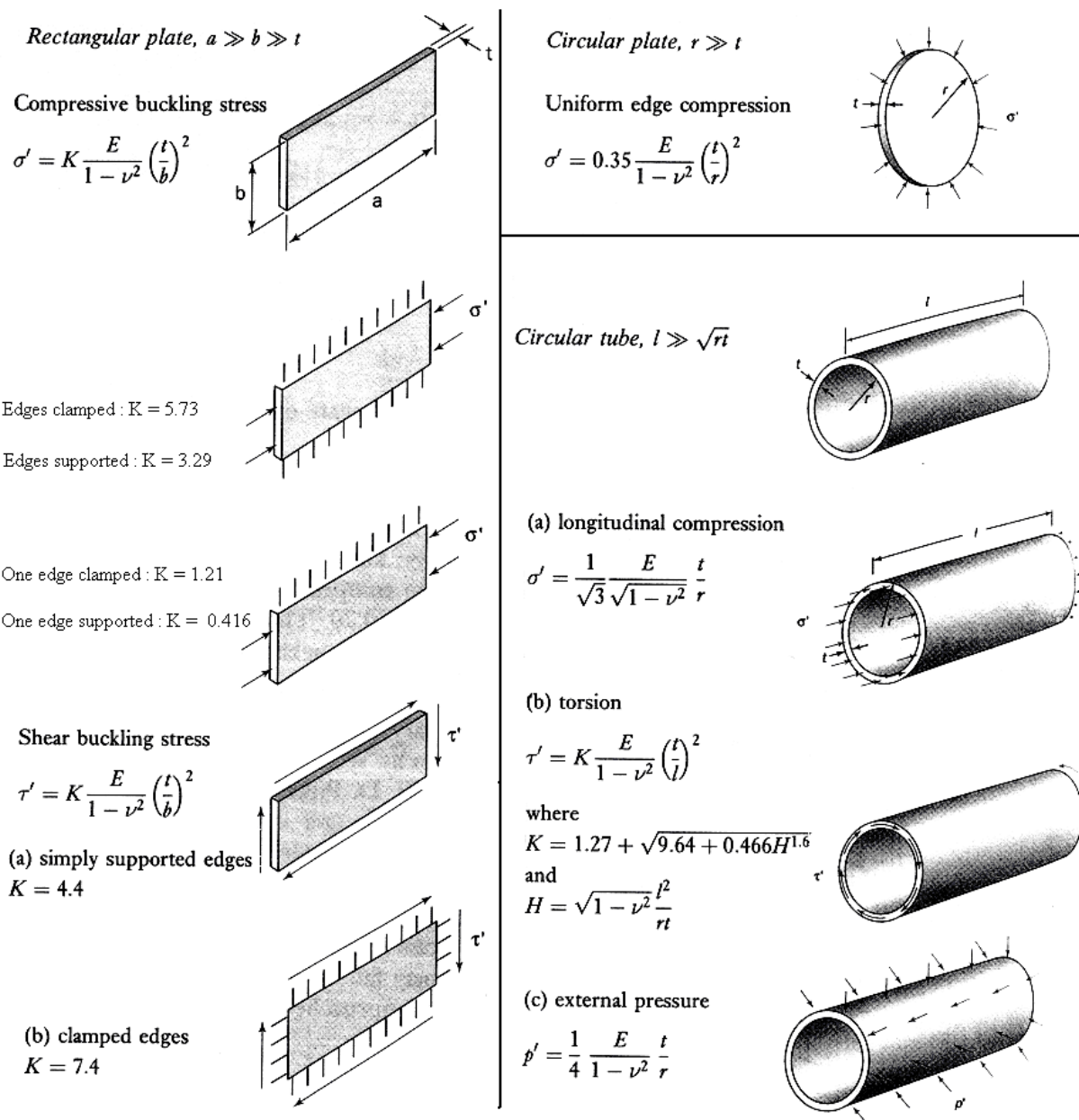
Caso a: $L_0 = 2 L$

Caso b: $L_0 = 0.7 L$

Caso c: $L_0 = L/2$

Instabilità locale delle pareti sottili

Uno stato tensionale di compressione (mono o bi assiale) può indurre un'instabilità locale di una parete sottile; di seguito si riportano alcuni casi notevoli:



In prima approssimazione, geometrie complesse possono essere ricondotte a casi notevoli:

Esempio 1: in una sezione quadrata cava, si può stimare la tensione di instabilità assimilando i lati a pareti sottili con i bordi appoggiati ad un vincolo (edges supported).

Esempio 2: una sezione a "C" ha le due ali "One edge supported" e la base "edges supported"

Esempio 3: in prima approssimazione, nel caso di flessione pura si può ritenere la tensione di instabilità uguale a quella di compressione uniforme.

Resistenza di strutture in parete sottile

Si definisce tensione critica:

$$\sigma_{cr} = k_{\sigma} \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b_p} \right)^2$$

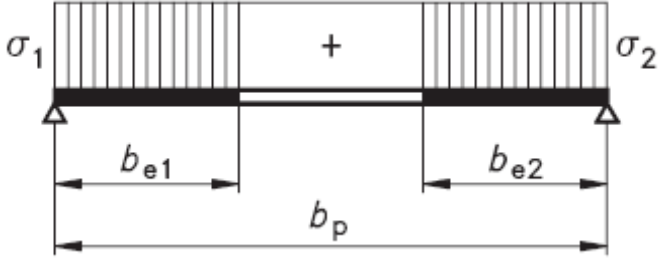
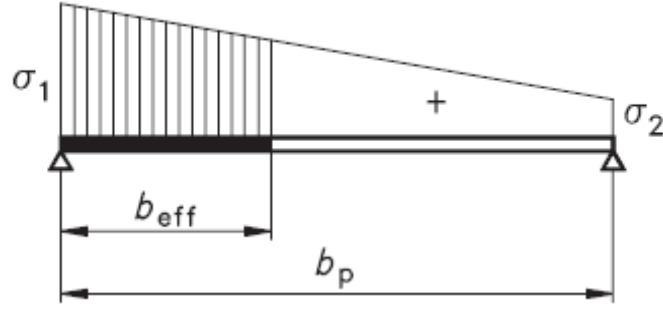
La snellezza di un pannello è data da:

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{b_p}{t} \sqrt{\frac{12 (1 - \nu^2) f_y}{\pi^2 E k_{\sigma}}} \cong 1,052 \frac{b_p}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E k_{\sigma}}}$$

Il valore efficace di un pannello si determina in genere con: $b_{eff} = \rho b_p$

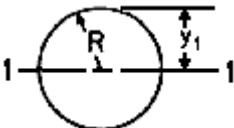
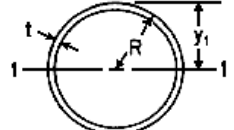
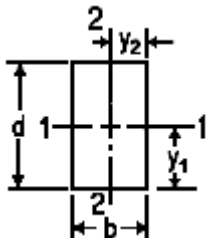
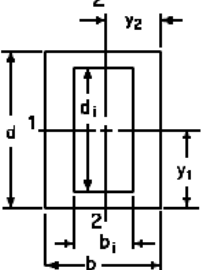
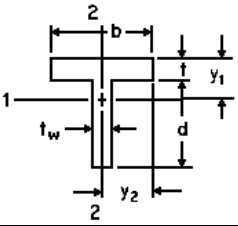
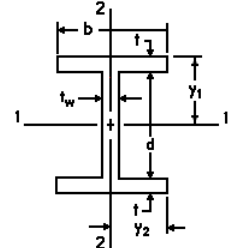
Dove: se $\lambda_p \leq 0,673$ allora $\rho = 1$
 se $\lambda_p > 0,673$ allora $\rho = (1 - 0,22 / \lambda_p) / \lambda_p$

Mentre il fattore k_{σ} si deduce nelle seguenti tabelle:

	<p>Compressione uniforme $\sigma_1 = \sigma_2$</p> <p>$k_{\sigma} = 4$ $b_{e1} = b_{e2} = 0,5 b_{eff} = 0,5 \rho b_p$</p>
	<p>Compressione uniforme $\sigma_1 = \sigma_2$</p> <p>$k_{\sigma} = 0,43$ $b_{eff} = \rho b_p$</p>

Appendici

Geometria delle aree

Geometria	Baricentro	Area	Momento d'inerzia
<p style="text-align: center;">Cerchio</p> 		πR^2	$J_1 = \frac{\pi}{4} R^4$
<p style="text-align: center;">Anello sottile</p> 		$2\pi R t$	$J_1 = \pi R^3 t$
<p style="text-align: center;">Rettangolo</p> 		$b \cdot d$	$J_1 = \frac{1}{12} b d^3$
<p style="text-align: center;">Rettangolo Cavo</p> 		$b \cdot d - b_1 \cdot d_1$	$J_1 = \frac{b d^3 - b_1 d_1^3}{12}$
<p style="text-align: center;">Sezioni a T</p> 	$y_1 = \frac{b t^2 - t_w d (2t + d)}{2(t b + t_w d)}$	$A = t b + t_w d$	$J_1 = \frac{b(d+t)^3}{3} - \frac{d^3(b-t_w)}{3} - A(d+t-y_1)^2$
<p style="text-align: center;">Sezioni ad H</p> 		$A = 2 t b + t_w d$	$J_1 = \frac{b(d+2t)^3}{12} - \frac{d^3(b-t_w)}{12}$ $J_2 = \frac{t b^3}{6} + \frac{t_w^3 d}{12}$

	$y_1 = \frac{bt^2 + 2t_w d(2t + d)}{2(tb + 2t_w d)}$	$A = tb + 2t_w d$	$J_1 = \frac{b(d+t)^3}{3} - \frac{d^3(b-2t_w)}{3} - A(d+t-y_1)^2$ $J_2 = \frac{(d+t)b^3}{12} - \frac{(b-2t_w)^3 d}{12}$
<p>Triangolo isoscele</p>	$y_1 = \frac{2d}{3}$	$A = \frac{bd}{2}$	$J_1 = \frac{bd^3}{36}$ $J_2 = \frac{b^3 d}{48}$

Momento di trasporto:

Inerzia di un'area attorno ad asse generico non baricentrico:

$$J = J_g + d^2 \cdot A \quad \text{con } J_g \text{ inerzia baricentrica e } d \text{ distanza baricentro dall'asse.}$$

Momento d'Inerzia Polare

Momento d'inerzia polare, noti momenti d'inerzia attorno agli assi principali "X" e "Y":

$$J_T = J_X + J_Y$$