Appendice

Metodo della massima varianza

La maggior parte delle metodologie di ricerca della direzione o del piano critico, sono pensate per essere applicate con algoritmi numerici.
Esiste una metodologia di ricerca della direzione critica che ammette soluzioni analitiche in alcuni casi particolari. La metodologia in oggetto è il metodo della varianza.
La varianza di una grandezza s(t), variabile nel tempo, calcolata in un intervallo di durata "T", è definita come:

$$\mathrm{Var}\big(s(t)\big) = \frac{1}{T}\int_0^T \big(s(t) - m\big)^2 \, dt \tag{1}$$

Dove "m" è il valore medio di "s" sullo stesso intervallo temporale "T".
La varianza è una grandezza che ha molte applicazioni e proprietà, largamente utilizzate nei calcoli statistici su variabili casuali. Tra le varie proprietà vi è anche quella di essere proporzionale al quadrato delle ampiezze, quando le grandezze in esame hanno variazioni temporali di tipo sinusoidale.
Nella progettazione a fatica, la ricerca di una direzione critica consiste, in genere, nella ricerca della direzione in cui una determinata grandezza (ad esempio la tensione tangenziale) abbia la massima escursione. Nella variazioni temporali sinusoidali, la massima escursione coincide con l'ampiezza della sinusoide.
Quindi se le tensioni hanno una variazione sinusoidale, la ricerca della direzione di massima escursione di una grandezza coincide con la ricerca della direzione di massima varianza della componente stessa. Questa proprietà non vale per variazioni temporali generiche poiché la varianza è una media temporale e, in genere, il massimo di una funzione non è univocamente correlato con le sue medie temporali.
A titolo di esempio si considera uno stato piano di tensione contenente solo tensione normale e tangenziale, come in un caso di flesso-torsione su una trave.

$$\overline{\overline{\sigma}}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_x(t) & \tau_{xy}(t) & 0 \\ \tau_{xy}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Con componenti delle tensioni che variano nel tempo in maniera sinusoidale e potenzialmente sfasati di un angolo generico "δ".

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= \sigma_a \sin(\omega t) \\ \tau_{xy}(t) &= \tau_a \sin(\omega t + \delta) \end{aligned} \tag{3}$$

Il valore della tensione tangenziale può essere utilmente studiata sul piano stesso, al variare dell'angolo "φ" sul piano.

$$\tau_m(t) = \frac{\sin(2\varphi)}{2} \sigma_x(t) + \cos(2\varphi)\, \tau_{xy}(t) \tag{4}$$

La sua varianza vale:

$$\mathrm{Var}(\tau_m(t)) = \frac{\sin(2\varphi)^2}{4} V_\sigma + \cos(2\varphi)^2 V_\tau + \sin(2\varphi)\cos(2\varphi)\, C_{\sigma,\tau} \tag{5}$$

Dove con V e C vengono rispettivamente indicate la varianza e la covarianza della tensione normale e tangenziale:

$$\begin{aligned} V_\sigma &= \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_a^2 \sin(\omega t)^2 \, dt = \frac{\sigma_a^2}{2} \\ V_\tau &= \frac{1}{T}\int_0^T \tau_a^2 \sin(\omega t + \delta)^2 \, dt = \frac{\tau_a^2}{2} \\ C_{\sigma,\tau} &= \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_a \tau_a \sin(\omega t)\sin(\omega t + \delta)\, dt = \frac{\sigma_a\, \tau_a \cos(\delta)}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

Ossia:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\tau_m(t)) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\varphi)^2}{4}\sigma_a^2 + \cos(2\varphi)^2 \tau_a^2 + \sin(2\varphi)\cos(2\varphi)\, \sigma_a\, \tau_a \cos(\delta)\right] \\ &= \frac{1}{16}\left[[1-\cos(4\varphi)]\sigma_a^2 + 4[1+\cos(4\varphi)]\tau_a^2 + 4\sin(4\varphi)\, \sigma_a\, \tau_a \cos(\delta)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Come già affermato, la direzione di massima variazione della tensione tangenziale, in questo caso, coincide con la direzione di massima varianza. Quindi risulta interessante investigare la derivata prima e seconda della varianza. La derivata prima è:

$$f'(\varphi) = \frac{1}{4}\left[\left(\sigma_a^2 - 4\tau_a^2\right)\sin(4\varphi) + 4\sigma_a\, \tau_a \cos(\delta)\cos(4\varphi)\right] \tag{8}$$

Analogamente anche la derivata seconda

$$f''(\varphi) = \left[\left(\sigma_a^2 - 4\tau_a^2\right)\cos(4\varphi) - 4\sigma_a\, \tau_a \cos(\delta)\sin(4\varphi)\right] \tag{9}$$

Dal loro studio si possono individuare gli angoli in cui vi è la massima variazione della tensione tangenziale, in funzione dei valori dello sfasamento e del rapporto tra le ampiezze delle componenti:

	$\delta \neq \pi/2$	$\delta = \pi/2$
$(\sigma_a - 2\,\tau_a) < 0$	$\varphi_0 + i\frac{\pi}{2}$	$i\frac{\pi}{2}$
$(\sigma_a - 2\,\tau_a) = 0$	$\frac{3\pi}{8} + i\frac{\pi}{2}$	ogni φ
$(\sigma_a - 2\,\tau_a) > 0$	$\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right) + i\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}$
Dove $\varphi_0 = -\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{4\sigma_a\tau_a\cos\delta}{\sigma_a^2 - 4\tau_a^2}\right)$ e $i = 0, 1, 2, \ldots$		