

# FORMULARIO DI PROGETTAZIONE MECCANICA

## Versione 4.4 2017

Questo formulario è messo a disposizione per gli studenti del corso di Progettazione Meccanica e deve essere considerato solo come sussidio per la prova scritta d'esame.

### SOMMARIO

<b>TENSORI .....</b>	<b>3</b>
<u>TENSORE DELLA DEFORMAZIONE .....</u>	3
<u>TENSORE DELLE TENSIONI .....</u>	3
<b>ROTAZIONE DEI TENSORI .....</b>	<b>3</b>
<u>MATRICE DI ROTAZIONE .....</u>	3
<u>TENSORI RUOTATI .....</u>	3
<b>EQUAZIONE DI EQUILIBRIO .....</b>	<b>3</b>
<b>EQUAZIONE DI CONGRUENZA .....</b>	<b>4</b>
<b>EQUAZIONE DELLE ROSETTE .....</b>	<b>4</b>
<b>LEGAME COSTITUTIVO LINEARE ELASTICO .....</b>	<b>6</b>
<u>LEGAME COSTITUTIVO LINEARE ELASTICO .....</u>	6
<u>ENERGIA DI DEFORMAZIONE PER UNITÀ DI VOLUME .....</u>	6
<u>TENSIONI PRINCIPALI .....</u>	6
<u>TENSIONE VON MISES (STATO PIANO DI TENSIONE) .....</u>	7
<u>TENSIONE VON MISES (STATO PIANO DI DEFORMAZIONE) .....</u>	7
<b>LEGAME COSTITUTIVO MONOASSIALE NON-LINEARE .....</b>	<b>7</b>
<u>MATERIALE ELASTICO-PERFETTAMENTE PLASTICO .....</u>	7
<u>MATERIALE INCRUDIMENTO: LEGGE DI RAMBERG-OSGOOD .....</u>	7
<u>ENERGIA DI DEFORMAZIONE A ROTTURA PER UNITÀ DI VOLUME LEGGE RAMBERG-OSGOOD .....</u>	7
<b>LEGAME COSTITUTIVO PLURIASSIALE NON LINEARE .....</b>	<b>8</b>
<u>LEGAME COSTITUTIVO DI TIPO NON LINEARE: EQUAZIONI DI PRANDTL-REUSS .....</u>	8
<b>CAMPI DI TENSIONE BIDIMENSIONALI .....</b>	<b>9</b>
<u>EQUAZIONI DI IRWIN .....</u>	9
<b>TRAVI SOLLECITATE A FLESSIONE IN CAMPO ELASTICO .....</b>	<b>10</b>
<b>TRAVE SOLLECITATA A FLESSIONE IN CAMPO PLASTICO .....</b>	<b>11</b>
<u>COEFFICIENTE DI ADATTAMENTO PLASTICO .....</u>	11
<b>TRAVE SOLLECITATA A TORSIONE IN CAMPO PLASTICO .....</b>	<b>13</b>
<u>ANGOLO DI TORSIONE CON IPOTESI DI COMPORTAMENTO LINEARE ELASTICO .....</u>	13
<u>ANGOLO DI TORSIONE CON IPOTESI DI MATERIALE ELASTICO PERFETTAMENTE-PLASTICO .....</u>	13
<b>EFFETTO D'INTAGLIO IN CAMPO PLASTICO .....</b>	<b>15</b>
<u>REGOLA DEL NEUBER .....</u>	15
<u>REGOLA DI NEUBER PER MATERIALE TIPO RAMBERG-OSGOOD .....</u>	15
<u>COSTANZA DEL <math>K_\epsilon</math> .....</u>	15
<u>REGOLA DELLA COSTANZA DEL <math>K_\epsilon</math> PER MATERIALE TIPO RAMBERG-OSGOOD .....</u>	15
<b>FATICA OLIGOCICLICA .....</b>	<b>15</b>

<u>CURVA MONOTONA</u> .....	15
<u>CURVA CICLICA STABILIZZATA</u> .....	15
<u>CICLO DI ISTERESI</u> .....	16
<u>MANSON-COFFIN</u> .....	16
<u>CORREZIONE DEL VALOR MEDIO DI TOPPER (TOPPER MODIFICATA)</u> .....	16
<u>REGOLA DI MINER</u> .....	17
<u>CONCENTRAZIONE DELLE TENSIONI</u> .....	17
<b>AUTOFRETTAGGIO</b> .....	<b>23</b>
<u>TENSIONI CALCOLATE CON IPOTESI DI COMPORTAMENTO LINEARI ELASTICO DEL MATERIALE SU TUTTA LA SEZIONE</u> ...	23
<u>TENSIONI CALCOLATE CON IPOTESI DI COMPORTAMENTO LINEARE ELASTICO DEL MATERIALE ALL'INTERNO DELLA SOLA ZONA ELASTICA</u> .....	23
<u>TENSIONI CALCOLATE CON IPOTESI DI COMPORTAMENTO ELASTICO PERFETTAMENTE-PLASTICO DEL MATERIALE ALL'INTERNO DELLA SOLA ZONA PLASTICA</u> .....	23
<u>PRESSIONE DI SCOPPIO PER MATERIALE A COMPORTAMENTO ELASTICO PERFETTAMENTE-PLASTICO</u> .....	23
<b>ORGANI DI COLLEGAMENTO FILETTATI</b> .....	<b>24</b>
<u>RIGIDEZZA DELLA VITE</u> .....	24
<u>RIGIDEZZA DELLA PIASTRA SERRATA DALLA VITE</u> .....	24
<u>RIPARTIZIONE DEL CARICO</u> .....	25
<u>VERIFICA DEI BULLONI A FATICA</u> .....	25
<b>ENERGIA DI DEFORMAZIONE</b> .....	<b>28</b>
<u>CASI NOTEVOLI CON MATERIALE LINEARE ELASTICO</u> .....	28
<u>CALCOLO DELLA FRECCIA MASSIMA DOVUTA ALLA FORZA P PER MATERIALE LINEARE ELASTICO</u> .....	28
<b>VERIFICHE DI MASSIMA NELLE BIELLE</b> .....	<b>29</b>
<u>SUDDIVISIONE DELLE MASSE</u> .....	29
<u>FORZE DELLA COMBUSTIONE</u> .....	29
<u>ACCELERAZIONE AI PUNTI MORTI IN DIREZIONE ASSIALE</u> .....	30
<u>FORZE D'INERZIA AL PIEDE IN DIREZIONE ASSIALE</u> .....	30
<u>VERIFICHE AD INSTABILITÀ DEL FUSTO</u> .....	30
<u>VERIFICHE STATICHE A FLESSO-TRAZIONE DEL PIEDE DI BIELLA</u> .....	31
<u>VERIFICHE STATICHE A FLESSO-TRAZIONE DELLA TESTA DELLA BIELLA</u> .....	31
<i>Equazione semplificata forza</i> .....	31
<i>Verifica raccordo testa fusto</i> .....	31
<i>Verifica cappello di testa</i> .....	31

# TENSORI

I tensori sono riferiti ad un sistema cartesiano X,Y

Tensore della deformazione

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Tensore delle tensioni

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

## ROTAZIONE DEI TENSORI

Rotazione per stati piani di tensione o di deformazione

Matrice di rotazione

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$\phi$  : angolo di rotazione del sistema X'Y' rispetto al sistema originario X,Y

Tensori ruotati

$$[\sigma'] = [R][\sigma][R]^T \quad [\varepsilon'] = [R][\varepsilon][R]^T$$

$[\sigma]; [\varepsilon]$  TENSORI NEL SISTEMA ORIGINARIO

$[\sigma']; [\varepsilon']$  TENSORI NEL SISTEMA RUOTATO

## EQUAZIONE DI EQUILIBRIO

$$\text{div}[\sigma] + \bar{f} = \bar{0}$$

$\bar{f}$  : vettore delle forze di volume

## EQUAZIONE DI CONGRUENZA

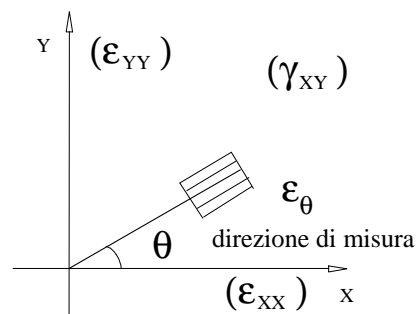
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x_{yy}^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x_{xx}^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (\text{e analoghe})$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (\text{e analoghe})$$

## EQUAZIONE DELLE ROSETTE

Misura della deformazione lungo una direzione generica  $\phi$  (angolo formato con l'asse delle X), noto il tensore della deformazione  $[\varepsilon]$  nel sistema di riferimento cartesiano X,Y

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{xx} \cos^2 \theta + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \cos \theta \sin \theta$$



deformazione nella direzione  $\phi$  nel sistema di riferimento X,Y

Misurando le deformazioni lungo tre direzioni distinte si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta_1} \\ \varepsilon_{\theta_2} \\ \varepsilon_{\theta_3} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$\varepsilon_{\phi_i}$  deformazione misurata dall'estensimetro lungo la direzione  $\phi_i$

$$A := \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)^2 & \sin(\theta_1)^2 & \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_2)^2 & \sin(\theta_2)^2 & \sin(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_3)^2 & \sin(\theta_3)^2 & \sin(\theta_3) \cdot \cos(\theta_3) \end{bmatrix}$$

Il tensore delle deformazioni nel sistema di riferimento X,Y si ottiene invertendo la relazione sopra scritta:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{xx} \\ \mathcal{E}_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{\theta_1} \\ \mathcal{E}_{\theta_2} \\ \mathcal{E}_{\theta_3} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} -(c \cdot f - d \cdot g) \cdot d \cdot f & (a \cdot f - b \cdot g) \cdot f \cdot b & -(a \cdot d - b \cdot c) \cdot d \cdot b \\ -(c \cdot f - d \cdot g) \cdot g \cdot c & a \cdot g \cdot (a \cdot f - b \cdot g) & -a \cdot c \cdot (a \cdot d - b \cdot c) \\ (c \cdot f - d \cdot g) \cdot (c \cdot f + d \cdot g) & -(a \cdot f - b \cdot g) \cdot (a \cdot f + b \cdot g) & (a \cdot d - b \cdot c) \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \end{bmatrix}$$

$$D := (a^2 \cdot d^2 \cdot g \cdot f - a^2 \cdot c \cdot d \cdot f^2 - c^2 \cdot b^2 \cdot g \cdot f + c^2 \cdot a \cdot b \cdot f^2 + g^2 \cdot b^2 \cdot c \cdot d - g^2 \cdot a \cdot b \cdot d^2)$$

$$a := \cos(\theta_1) \quad b := \sin(\theta_1) \quad c := \cos(\theta_2) \quad d := \sin(\theta_2) \quad g := \cos(\theta_3) \quad f := \sin(\theta_3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & a \cdot b \\ c^2 & d^2 & c \cdot d \\ g^2 & f^2 & g \cdot f \end{bmatrix}^{-1}$$

Alcuni valori notevoli di  $\mathbf{A}^{-1}$  per particolari valori degli angoli  $\phi_i$ .

$$\Phi_1 = 0 \cdot \text{deg}$$

$$\Phi_2 = 60 \cdot \text{deg}$$

$$\Phi_3 = 120 \cdot \text{deg}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0.667 & 0.667 \\ 0 & 1.155 & -1.155 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1 = 0 \cdot \text{deg}$$

$$\Phi_2 = 45 \cdot \text{deg}$$

$$\Phi_3 = 90 \cdot \text{deg}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1 = 0 \cdot \text{deg}$$

$$\Phi_2 = 120 \cdot \text{deg}$$

$$\Phi_3 = 240 \cdot \text{deg}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0.667 & 0.667 \\ 0 & -1.155 & 1.155 \end{pmatrix} \blacksquare$$

## LEGAME COSTITUTIVO LINEARE ELASTICO

Si considera un materiale omogeneo ed isotropo

E: modulo elastico

$\nu$  : modulo di Poisson

Legame costitutivo lineare elastico

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (\text{e analoghe})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (\text{e analoghe})$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz} \right] \quad (\text{e analoghe})$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E: modulo elastico;  $\nu$  coefficiente di Poisson, G: modulo elastico tangenziale;

$$\Theta_1 = \frac{1-2\nu}{E} I_1$$

$\Theta_1$  : Invariante primo dello stato di deformazione

$I_1$  : Invariante primo dello stato di tensione

Energia di deformazione per unità di volume

Sistema cartesiano xyz.

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz})$$

Tensioni principali

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \sqrt{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - 4(\sigma_{xx} \sigma_{yy} - \tau_{yy}^2)}}{2}$$

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \sqrt{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - 4(\sigma_{xx} \sigma_{yy} - \tau_{yy}^2)}}{2}$$

Tensione von Mises (stato piano di tensione)

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

Tensione von Mises (stato piano di deformazione)

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i,j} (\sigma_i - \sigma_j)^2} \quad i,j=1,2,3 \text{ con } i \neq j$$

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

## LEGAME COSTITUTIVO MONOASSIALE NON-LINEARE

Materiale Elastico-Perfettamente Plastico

$$\begin{cases} \sigma = E \varepsilon & \varepsilon \leq \frac{\sigma_y}{E} \\ \sigma = \sigma_y & \varepsilon > \frac{\sigma_y}{E} \end{cases}$$

E: modulo elastico;  $\sigma_y$  carico di snervamento

Materiale incrudimento: legge di Ramberg-Osgood

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{k} \right)^n$$

E: modulo elastico; k coefficiente di resistenza; n coefficiente di incrudimento

Energia di deformazione a rottura per unità di volume legge Ramberg-Osgood

$$W = \sigma_R \varepsilon_R - \left[ \frac{\sigma_R^2}{E} + \frac{n \sigma_R}{n+1} \left( \frac{\sigma_R}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \right]$$

$\sigma_R$ : carico di rottura;  $\varepsilon_R$ : deformazione di rottura;

# LEGAME COSTITUTIVO PLURIASSIALE NON LINEARE

Si considera un materiale omogeneo ed isotropo

Legame costitutivo di tipo non lineare: Equazioni di Prandtl-Reuss

$$d\epsilon_{xx} = d\epsilon_{xx}^e + d\epsilon_{xx}^p$$

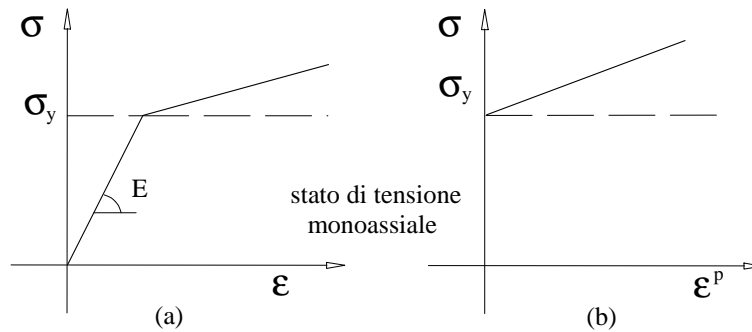
$d\epsilon_{xx}$  : incremento di deformazione plastica totale

$d\epsilon_{xx}^e$  : incremento di deformazione elastica

$d\epsilon_{xx}^p$  : incremento di deformazione plastica

$d\epsilon_{eq}^p$  : deformazione plastica totale equivalente

$\sigma_{eq}$  : tensione equivalente di Von Mises



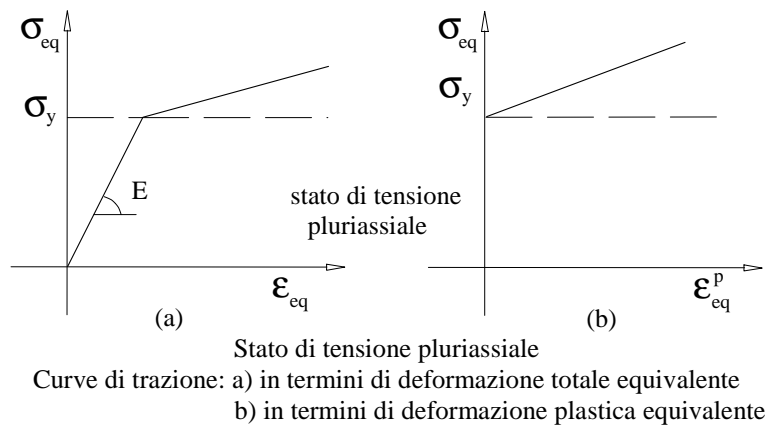
Stato di tensione monoassiale  
curve di trazione: a) in termini di deformazione totale  
b) in termini di deformazione plastica

$$d\epsilon_{xx} = \frac{d\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz}) + \frac{d\epsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \left( \sigma_{xx} - \frac{\sigma_{zz} + \sigma_{yy}}{2} \right) \quad (\text{e analoghe})$$

$$d\gamma_{xy} = \frac{d\tau_{xy}}{G} + 3 \frac{d\epsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \tau_{xy} \quad (\text{e analoghe})$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$





## Campi di tensione bidimensionali

Componenti cartesiane delle tensioni in un sistema di riferimento polare  $(r, \theta)$

### Equazioni di Irwin

Modo I

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \end{Bmatrix}$$

Modo II

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\vartheta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \right) \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \\ \cos \frac{\vartheta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) \end{Bmatrix}$$

$K_I$  e  $K_{II}$  Stress Intensity Factors di modo I e II

# TRAVI SOLLECITATE A FLESSIONE IN CAMPO ELASTICO

## Trazione

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{dove: } F = \text{forza; } A = \text{area della sezione}$$

## Flessione semplice

$$\sigma = \frac{M_f}{J_f} y \quad \sigma_{\max} = \frac{M_f}{W_f}$$

dove:  $M_f$  momento flettente,  $J_f$  momento di inerzia flessionale della sezione,  $y$  distanza dall'asse di inflessione,  $\sigma_{\max}$  tensione massima di flessione,  $W_f$  modulo di resistenza flessionale

sezione circolare (diametro d)	$J_f = \frac{\pi}{64} d^4$	$W_f = \frac{\pi}{32} d^3$
sezione rettangolare inflessa sull'altezza (altezza h e larghezza b)	$J_f = \frac{1}{12} b h^3$	$W_f = \frac{1}{6} b h^2$

## Torsione e rigidezza torsionale

### Sezione circolare

La sollecitazione di torsione in una sezione circolare piena sollecitata a torsione risulta:

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} r \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

dove:  $M_t$  momento torcente,  $J_p$  momento di inerzia polare della sezione,  $r$  distanza dall'asse di torsione,  $\tau_{\max}$  tensione massima di torsione,  $W_t$  modulo di resistenza torsionale

sezione circolare (diametro d)	$J_p = \frac{\pi}{32} d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} d^3$
--------------------------------	----------------------------	----------------------------

L'angolo di torsione  $\theta$  fra due sezioni di un albero circolare sollecitato a torsione vale:

$$\theta = \frac{M_t L}{G J_p}$$

G: Modulo di rigidezza torsionale;

$G = E / (2(1 + \nu))$  con  $\nu$  coeff. di Poisson ed E modulo elastico. Per acciaio:  $E = 206 \text{ GPa}$ ;  $\nu = 0.3$ .

L : distanza fra le sezioni

$J_p$  : momento di inerzia polare della sezione

### Sezione rettangolare

La tensione massima di taglio in una sezione rettangolare "bxt" con  $b \gg t$  vale:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_t} t$$

dove : b altezza sezione rettangolare, t spessore sezione rettangolare e  $J_t = \frac{1}{3} b t^3$

Angolo di torsione  $\theta$  fra due sezioni di una trave a sezione rettangolare sollecitata a torsione:

$$\theta = \frac{M_t L}{G J_t}$$

# TRAVE SOLLECITATA A FLESSIONE IN CAMPO PLASTICO

## Coefficiente di adattamento plastico

$$\Psi = \frac{M_{f,\max}^p}{M_{f,\max}^e}$$

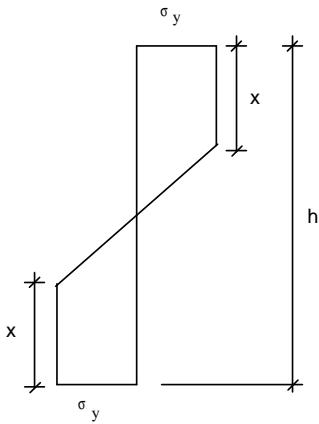
$M_{f,\max}^e$  momento flettente massimo per materiale lineare elastico,  $M_{f,\max}^p$  momento flettente massimo ottenibile con materiale elastico perfettamente-plastico

## Momento flettente massimo per sezione rettangolare con materiale elastico perfettamente-plastico

$$M_{f,\max}^p = \frac{bh^2}{4} \sigma_y$$

b: larghezza della sezione, h: altezza della sezione,  $\sigma_y$ : carico di snervamento

## Relazione fra zona-plastica e momento flettente nel caso di sezione rettangolare per materiale elastico-perfettamente plastico



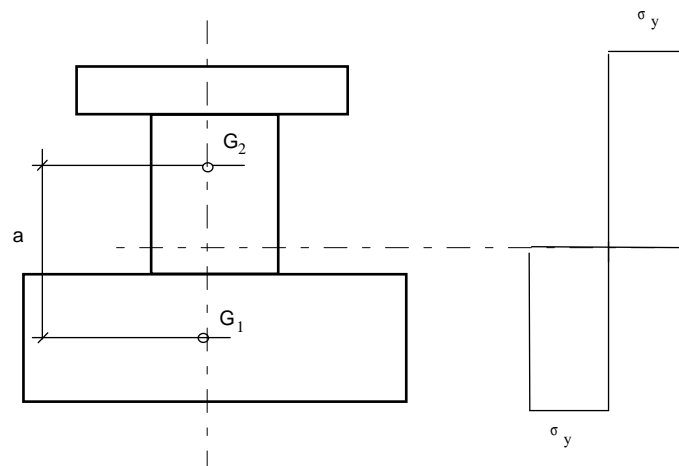
$$M_f^e = 2b \left[ \sigma_y \left( \frac{h-x}{2} \right) x + \frac{1}{3} \sigma_y \left( \frac{h-x}{2} \right)^2 \right]$$

$M_f^e$  : Momento flettente applicato; x: dimensione zona plastica  
h: altezza trave;  
b: larghezza trave  
 $\sigma_y$ : carico di snervamento

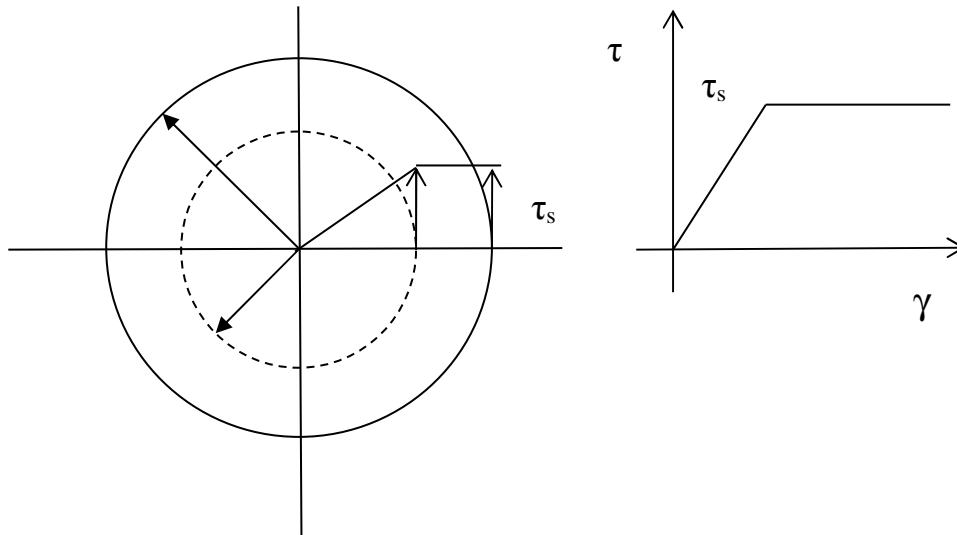
Momento flettente massimo nel caso di sezione semplicemente simmetrica per materiale elastico-perfettamente plastico

$$M_{f,\max}^p = \frac{A}{2} \sigma_y a$$

A: area della sezione;  $\sigma_y$ : carico di snervamento; a: distanza fra i due baricentri delle due aree di pari estensione



## TRAVE SOLLECITATA A TORSIONE IN CAMPO PLASTICO



R: raggio plastico

$R_e$  raggio esterno

$\tau_s$  : tensione di snervamento a taglio

$\gamma$ : scorrimento

### Angolo di torsione con ipotesi di comportamento lineare elastico

L'angolo di torsione  $\theta$  fra due sezioni di un albero circolare sollecitato a torsione vale:

$$\theta = \frac{M_t L}{G J_p}$$

G: Modulo di rigidezza torsionale;

$G = E / (2(1+\nu))$  con  $\nu$  coeff. di Poisson ed E modulo elastico.

L : distanza fra le sezioni

$J_p$  : momento di inerzia polare della sezione

### Angolo di torsione con ipotesi di materiale elastico perfettamente-plastico

L'angolo di torsione  $\theta$  fra due sezioni di un albero circolare sollecitato a torsione vale:

$$\theta = \frac{\tau_s L}{G R}$$

G: Modulo di rigidezza torsionale;

$G = E / (2(1 + \nu))$  con  $\nu$  coeff. di Poisson ed  $E$  modulo elastico.

$L$  : distanza fra le sezioni

$\tau_s$  : tensione di snervamento a taglio

Relazioni momento torcente-tensione di taglio per materiale elastico lineare

La sollecitazione di torsione in una sezione circolare piena sollecitata a torsione risulta:

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} r \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

dove:  $M_t$  momento torcente,  $J_p$  momento di inerzia polare della sezione,  $r$  distanza dall'asse di torsione,  $\tau_{\max}$  tensione massima di torsione,  $W_t$  modulo di resistenza torsionale

---

sezione circolare (diametro  $d$ )

$$J_p = \frac{\pi}{32} d^4$$

$$W_t = \frac{\pi}{16} d^3$$

---

Relazione momento torcente-tensione di taglio per materiale elastico perfettamente-plastico

$$M_t^p = \frac{2}{3} \pi \tau_s r_e^3 \left( 1 - \frac{R^3}{4 r_e^3} \right)$$

$M_{f,\max}^e$  momento flettente massimo per materiale lineare elastico,  $M_{f,\max}^p$  momento flettente massimo ottenibile con materiale elastico perfettamente-plastico

Momento torcente massimo con materiale elastico perfettamente-plastico

$$M_{t,\max}^p = \frac{2}{3} \pi \tau_s r_e^3$$

$r_e$ : raggio esterno;  $\tau_s$  : tensione di taglio di snervamento

## EFFETTO D'INTAGLIO IN CAMPO PLASTICO

S: tensione nominale

$K_t$  coefficiente di concentrazione delle tensioni elastico

$K_\sigma$  coefficiente di concentrazione delle tensioni in campo plastico

$K_\epsilon$  coefficiente di concentrazione delle deformazioni in campo plastico

$\sigma_{picco}$  tensione di picco all'apice dell'intaglio

### Regola del Neuber

$$K_\sigma \cdot K_\epsilon = K_t^2$$

### Regola di Neuber per materiale tipo Ramberg-Osgood

$$\frac{K_t^2 S^2}{E} = \frac{\sigma_{picco}^2}{E} + \sigma_{picco} \left( \frac{\sigma_{picco}}{k} \right)^{\frac{1}{n}}$$

### Costanza del $K_\epsilon$

$$K_\epsilon = K_t$$

### Regola della costanza del $K_\epsilon$ per materiale tipo Ramberg-Osgood

$$\frac{K_t S}{E} = \frac{\sigma_{picco}}{E} + \left( \frac{\sigma_{picco}}{k} \right)^{\frac{1}{n}}$$

## FATICA OLIGOCICLICA

### Curva monotona

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{k} \right)^{\frac{1}{n}}$$

E: modulo elastico; k coefficiente di resistenza; n coefficiente di incrudimento

### Curva ciclica stabilizzata

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{k'} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

E: modulo elastico; k' coefficiente di resistenza ciclico; n' coefficiente di incrudimento ciclico

### Ciclo di isteresi

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + 2 \left( \frac{\sigma}{2 k'} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

E: modulo elastico; k' coefficiente di resistenza ciclico; n' coefficiente di incrudimento ciclico

### Manson-Coffin

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} (2 N_f)^b + \varepsilon'_f (2 N_f)^c$$

$\varepsilon_a$ : ampiezza di deformazione totale

$N_f$  Numero di cicli a frattura

$\sigma'_f$  coefficiente di resistenza a fatica

b esponente di resistenza a fatica

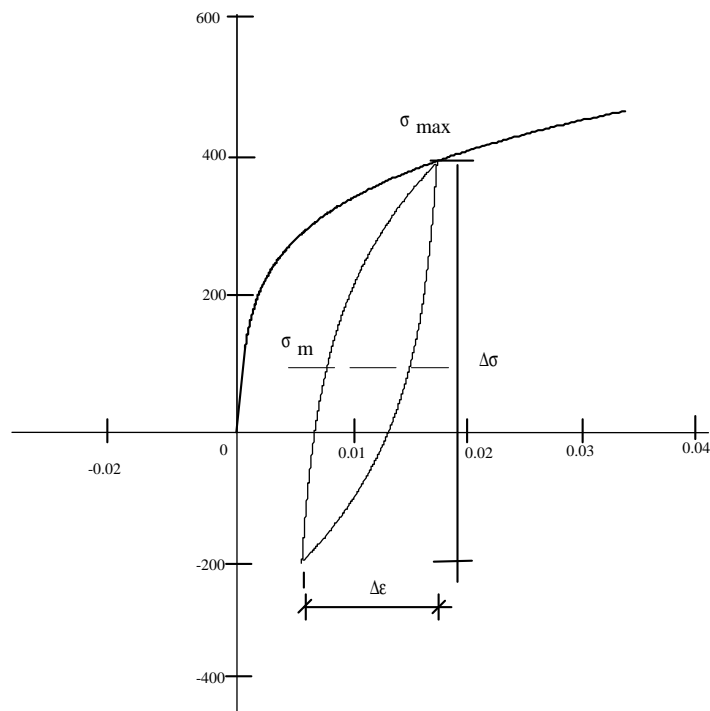
$\varepsilon'_f$  coefficiente di duttilità a fatica

c esponente di duttilità a fatica

### Correzione del valor medio di Topper (Topper modificata)

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} \right) (2 N_f)^b + \varepsilon'_f (2 N_f)^c$$

$\sigma_m$  tensione media





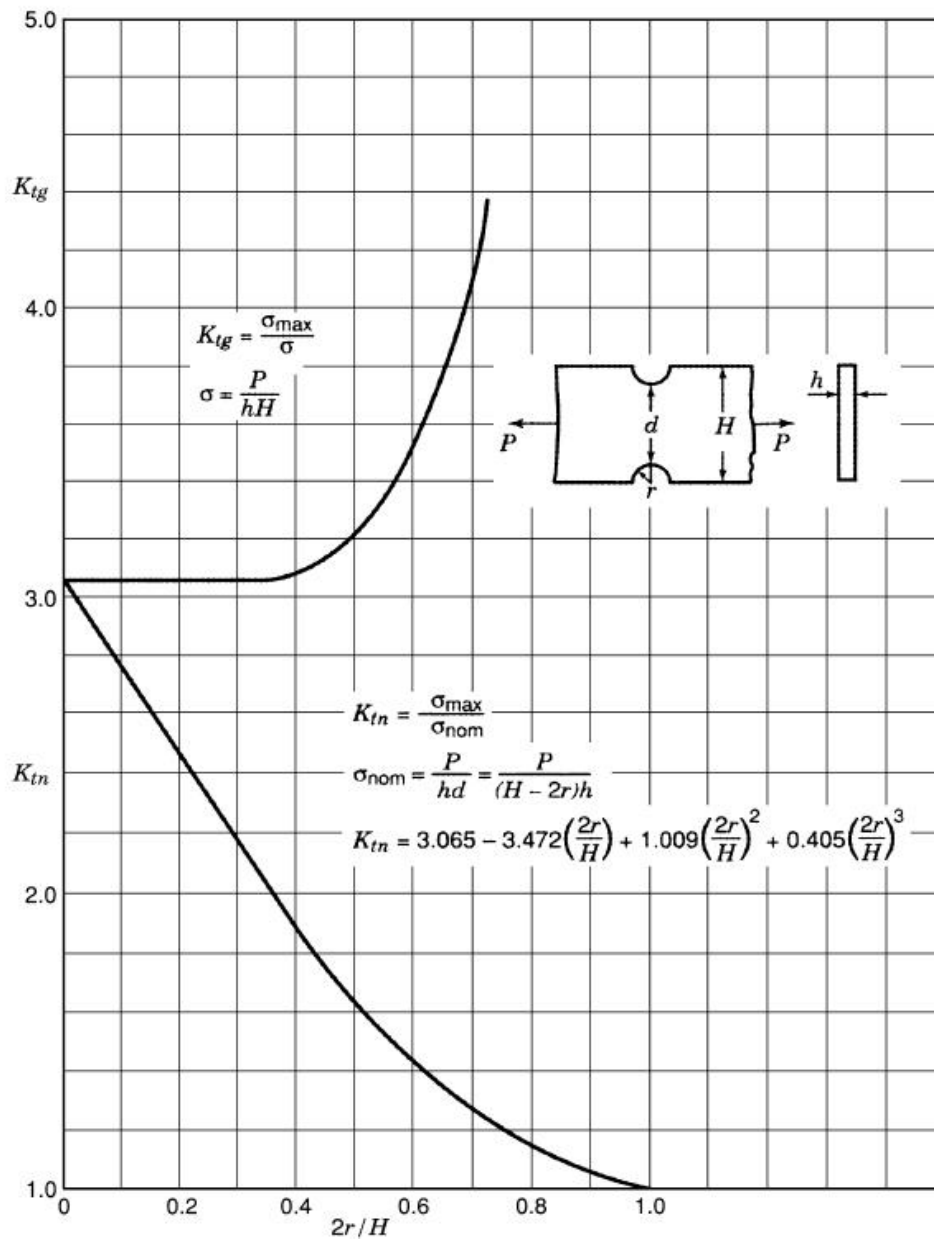
Regola di Miner

$$1 = \sum_i \frac{n_i}{N_f}$$

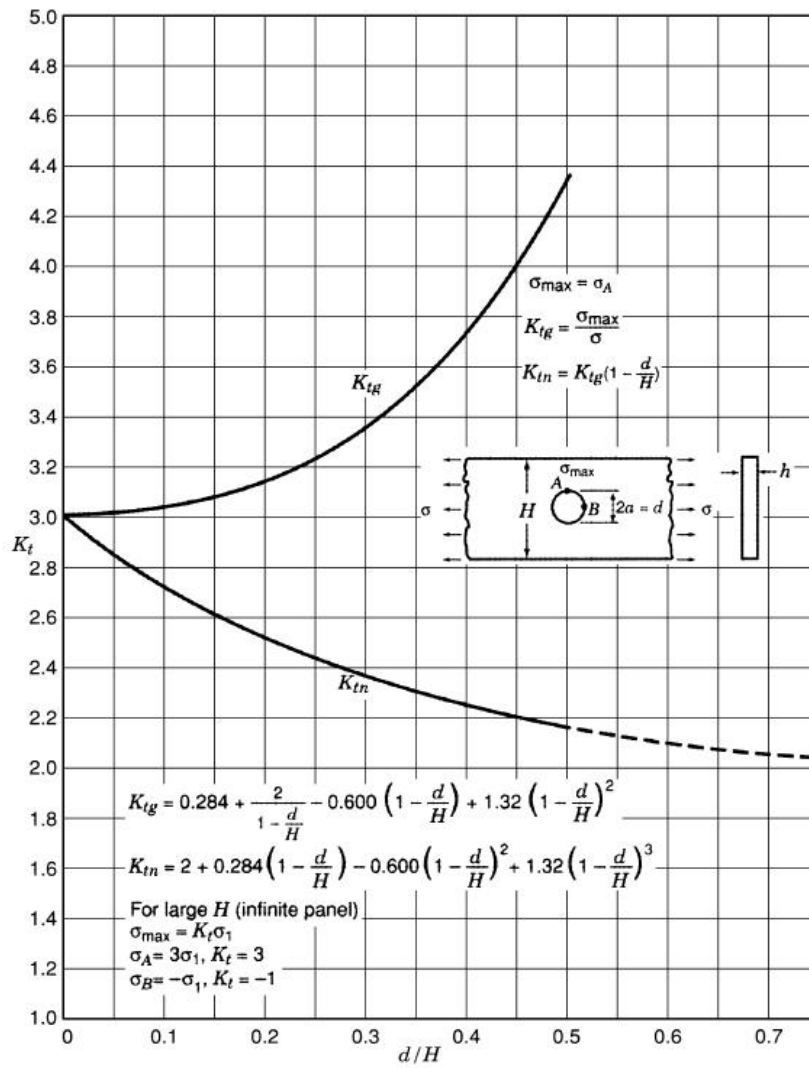
$n_i$  : numero di cicli eseguiti al livello costante di ampiezza  $\epsilon_{ai}$

$N_f$  : numero di cicli a rottura relativamente al livello  $\epsilon_{ai}$

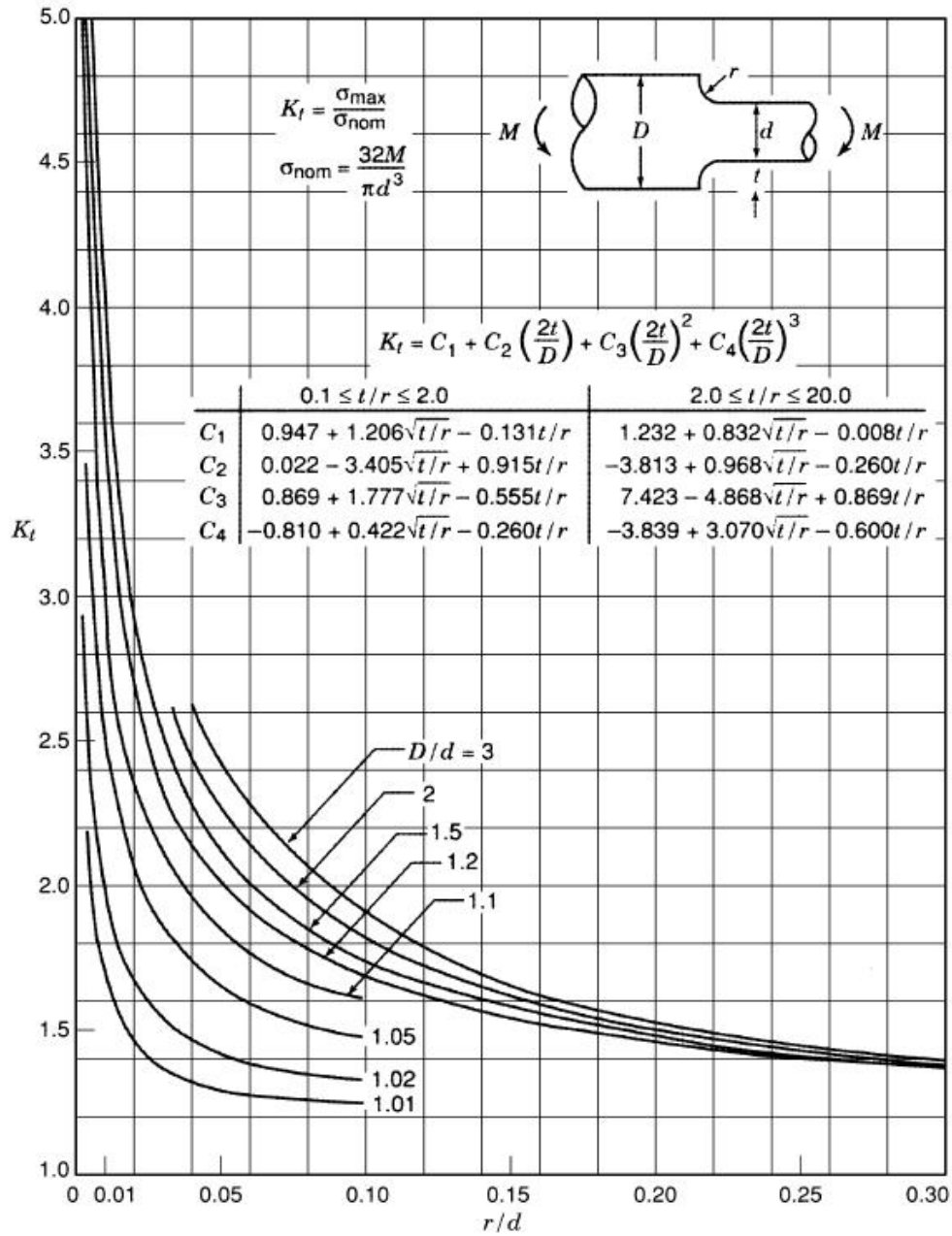
Concentrazione delle tensioni



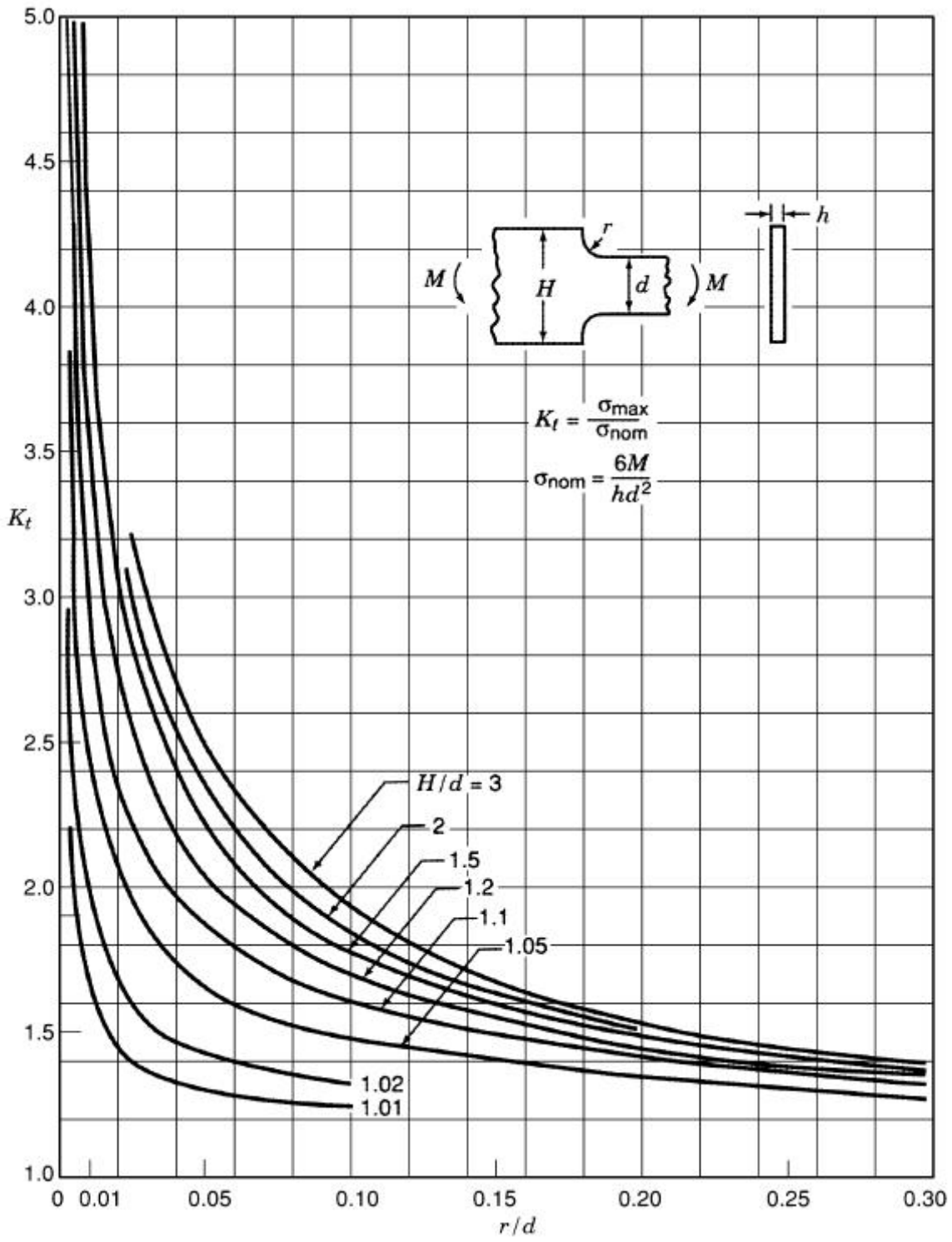
INTAGLIO SEMICIRCOLARE



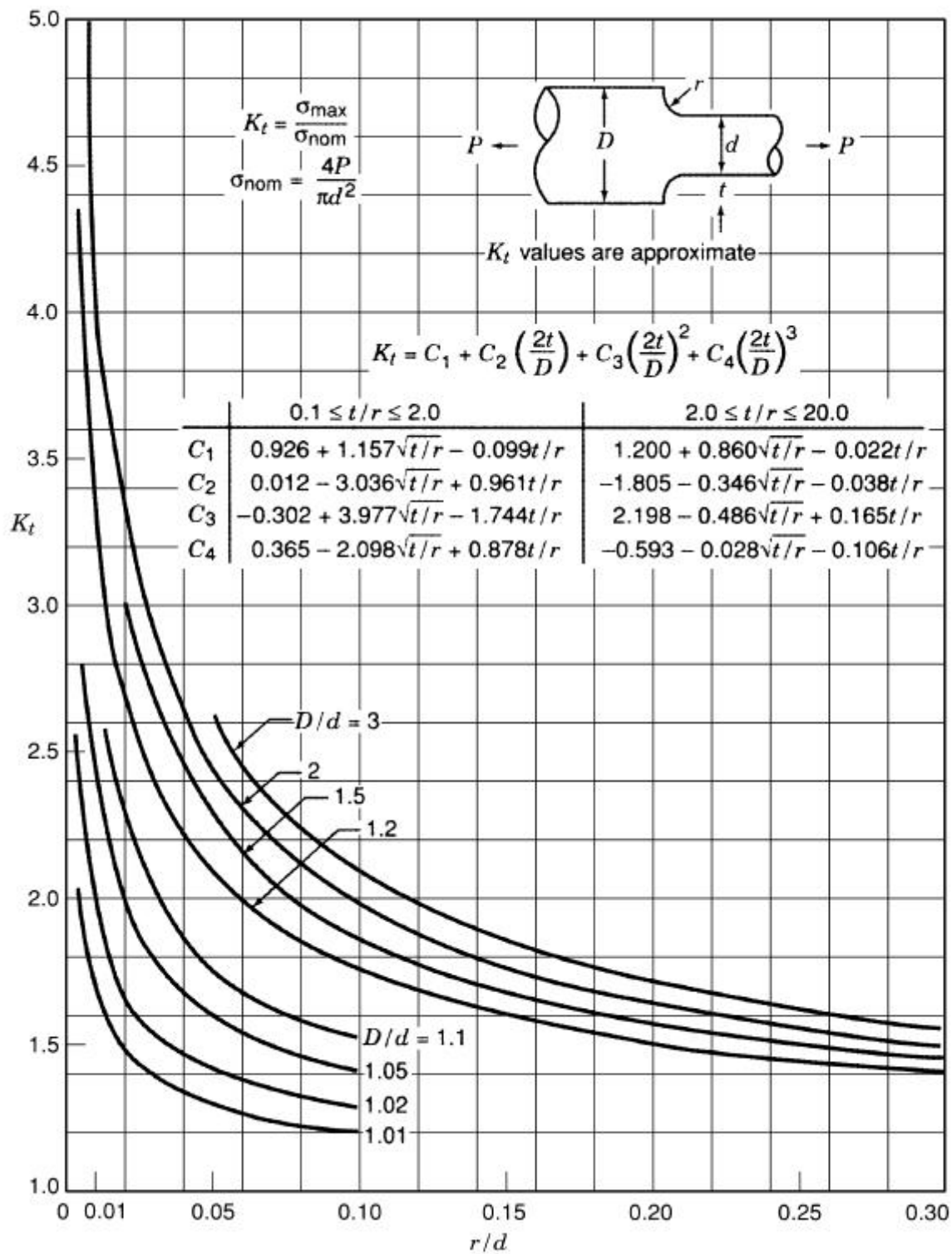
PIASTRA FORATA



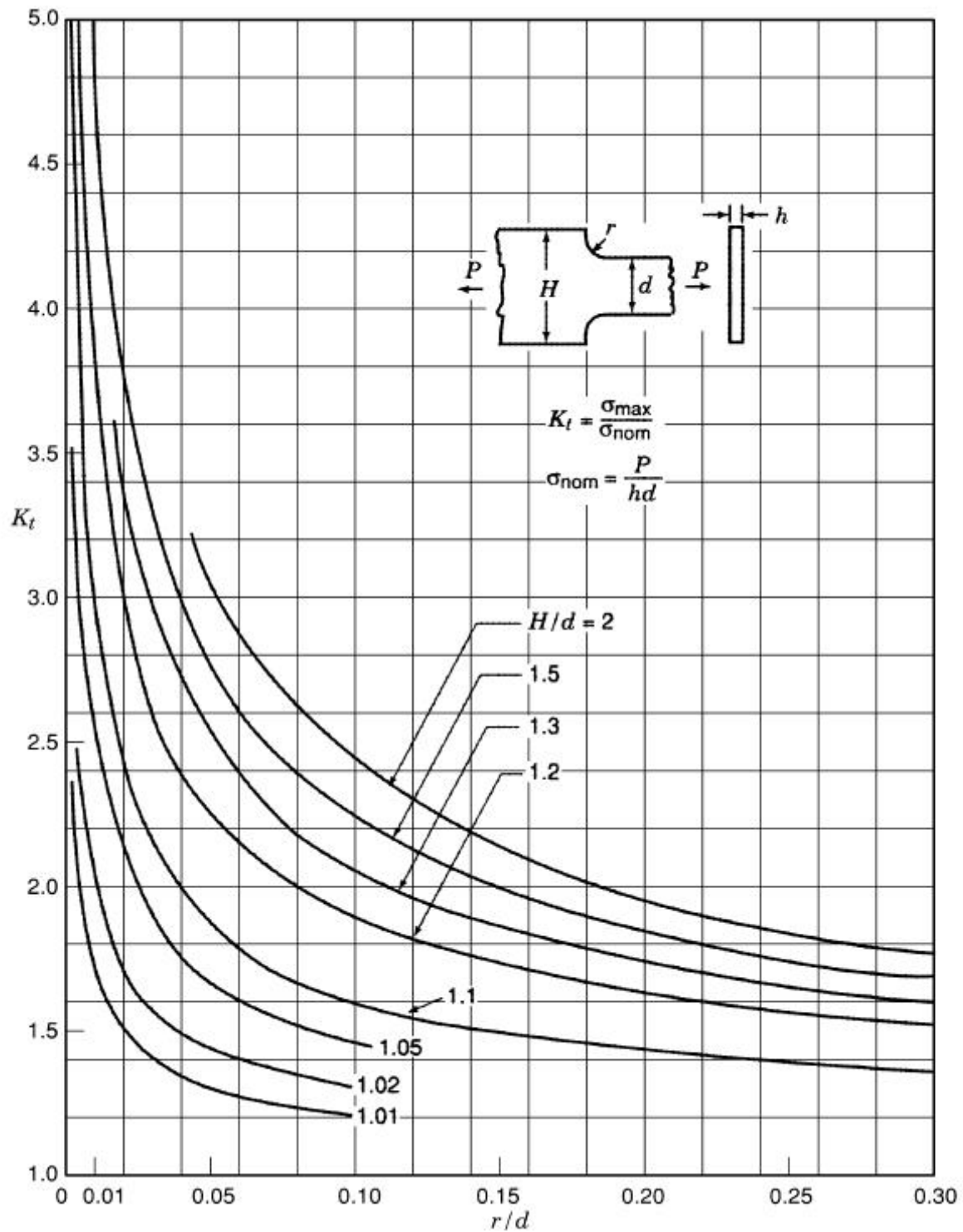
SPALLAMENTO SOLLECITATO A FLESSIONE



SEZIONE RETTANGOLARE SOLLECITATA A FLESSIONE



SEZIONE CIRCOLARE SOLLECITATA A TRAZIONE



SEZIONE RETTANGOLARE SOLLECITATA A FLESSIONE

## AUTOFRETTAGGIO

Le tensioni riportate di seguito fanno riferimento al caso di un recipiente cilindrico dotato di fondi di estremità realizzato in materiale a comportamento isotropo

$r_i$  : raggio interno

$r_e$  : raggio esterno

$R$  : raggio plastico

$\sigma_y$ : carico di snervamento

$\sigma_r$  : tensione radiale

$\sigma_\theta$  : tensione tangenziale

$\sigma_{eq}$  : tensione equivalente di Von Mises

$p$  : pressione interna

$p_{limite}$  : pressione di scoppio

Tensioni calcolate con ipotesi di comportamento lineari elastico del materiale su tutta la sezione

Tensione radiale, tangenziale e di Von Mises in un recipiente cilindrico dotato di fondi di estremità e sollecitato da una pressione interna  $p$  nell'ipotesi di materiale lineare elastico:

$$\sigma_\theta = \frac{p}{r_e^2 - r_i^2} \left( 1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right) ; \sigma_r = \frac{p}{r_e^2 - r_i^2} \left( 1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right) ; \sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) = \sqrt{3} \frac{p}{r_e^2 - r_i^2} \frac{1}{r^2}$$

Tensione radiale, tangenziale e di Von Mises in un recipiente cilindrico dotato di fondi di estremità e sollecitato da una pressione interna  $p$  nell'ipotesi di materiale elastico-perfettamente plastico:

Tensioni calcolate con ipotesi di comportamento lineare elastico del materiale all'interno della sola zona elastica

*zona elastica (  $r \geq R$  )*

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \frac{R^2}{r_e^2} \left( 1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right) ; \sigma_r = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \frac{R^2}{r_e^2} \left( 1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right) ; \sigma_{eq} = \sigma_y \frac{R^2}{r^2}$$

Tensioni calcolate con ipotesi di comportamento elastico perfettamente-plastico del materiale all'interno della sola zona plastica

*zona plastica (  $r < R$  )*

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left( \frac{R^2}{r_e^2} - 2 \ln \frac{R}{r} + 1 \right) ; \sigma_r = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left( \frac{R^2}{r_e^2} - 2 \ln \frac{R}{r} - 1 \right) ; \sigma_{eq} = \sigma_y$$

Raggio plastico per materiale a comportamento elastico perfettamente-plastico

$$p + \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left( \frac{R^2}{r_e^2} - 2 \ln \frac{R}{r_i} - 1 \right) = 0$$

Pressione di scoppio per materiale a comportamento elastico perfettamente-plastico

$$p_{\text{limite}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_y \ln \frac{r_e}{r_i}$$

## ORGANI DI COLLEGAMENTO FILETTATI

### Rigidità della vite

$$k_v = \frac{E A_v}{l_v} ;$$

$K_v$ : rigidità della vite;

$A_v$ : area della vite;

$E$ : modulo elastico

$l_v$ : lunghezza vite (ipotesi vite a diametro costante)

### Rigidità della piastra serrata dalla vite

$$k_{eq} = \frac{E A_{eq}}{L} ;$$

$k_{eq}$ : rigidità equivalente zona compressa

$L$ : lunghezza tratto compresso

$A_{eq}$ : Area equivalente zona compressa

$$A_{eq} = \frac{\pi}{4} (d_{eq}^2 - d_f^2) ;$$

$d_{eq}$ : diametro equivalente

$d_f$ : diametro foro

$D$ : diametro anello di appoggio (diametro sotto la testa della vite o sotto alla rosetta)

$$d_{eq} = 2 \left( \frac{D}{2} + \frac{L}{4} \right) ;$$

In alternativa

$$k_p = \frac{\pi E d \tan \alpha}{2 \ln \frac{(L \tan \alpha + D - d)(D + d)}{(L \tan \alpha + D + d)(D - d)}} ;$$

$k_p$ : rigidità zona compressa

$L$ : lunghezza tratto compresso

$\alpha$ : semiangolo di apertura cono equivalente

$D$ : diametro anello di appoggio (diametro sotto la testa della vite o sotto alla rosetta)

$d$ : diametro del foro



Diametro nominale maggiore $d$	Serie a passo grosso			Serie a passo fine		
	Passo $p$	Sezione- resistente Area $A_r$	Sezione minima Area $A_r$	Passo $p$	Sezione resistente Area $A_r$	Sezione minima Area $A_r$
1.6	0.35	1.27	1.07			
2	0.40	2.07	1.79			
2.5	0.45	3.39	2.98			
3	0.5	5.03	4.47			
3.5	0.6	6.78	6.00			
4	0.7	8.78	7.75			
5	0.8	14.2	12.7			
6	1	20.1	17.9			
8	1.25	36.6	32.8	1	39.2	36.0
10	1.5	58.0	52.3	1.25	61.2	56.3
12	1.75	84.3	76.3	1.25	92.1	86.0
14	2	115	104	1.5	125	116
16	2	157	144	1.5	167	157
20	2.5	245	225	1.5	272	259
24	3	353	324	2	384	365
30	3.5	561	519	2	621	596
36	4	817	759	2	915	884
42	4.5	1120	1050	2	1260	1230
48	5	1470	1380	2	1670	1630

### Sezione resistente della filettatura

#### Ripartizione del carico

$$\Delta F_v = \frac{k_v}{k_v + k_p} \Delta F_{est}; ; \quad F_s \geq \frac{k_p}{k_v + k_p} \Delta F_{est}$$

$F_s$ : Precarico nella vite

$\Delta F_v$ : variazione della forza che si scarica sulla vite;

$\Delta F_{est}$ : variazione della forza forza esterna;

#### Verifica dei bulloni a fatica

In ipotesi di forza esterna con rapporto di ciclo pari a zero, la sigma minima della sulla vite rimane costante:

$$S_{min} = \frac{F_s}{A}$$

$S_{min}$  : tensione minima sulla filettatura o sul gambo a seconda della sezione da verificare.

$$\sigma_a = \frac{\Delta F_v}{2A}$$

$\sigma_a$  : ampiezza di sollecitazione nel gambo della vite o nella sezione filettata

$\Delta F_v$ : variazione della forza che si scarica sulla vite;

A: area del gambo della vite o della sezione resistente della filettatura

Resistenza ad alto numero di cicli per sollecitazioni di trazione con rapporto di cicli R=-1:

$$S_e = k_a k_b k_c k_e S'_e$$

con:  $k_a$  fattori di influenza legato alla rugosità superficiale  
 $k_b$  fattore dimensionale  
 $k_c$  fattore legato al tipo di carico  
 $k_e$  fattore legato all'affidabilità

$S'_e$  resistenza del materiale base

$$\text{Coeff di sensibilità: } q = \frac{k_f - 1}{k_t - 1}; \begin{cases} \text{per } \rho > 2\text{mm} \rightarrow q \cong 1 \rightarrow k_t = k_f \\ \text{per } \rho < 2\text{mm} \end{cases}$$

$K_t$ : coefficiente di concentrazione delle tensioni

$$q = \frac{1}{1 + a/\rho} \quad \text{con } a \text{ [mm] funzione del carico di rottura } S_{ut} \text{ del materiale}$$

$S_{ut}$ [MPa]	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700
$a$ [mm]	0.42	0.33	0.265	0.212	0.175	0.145	0.117	0.094	0.077	0.065	0.057	0.05	0.043	0.038	0.034

$$S'_e = \begin{cases} 0,5 S_{ut} & \text{se } S_{ut} \leq 1400 \text{ MPa} \\ 700 \text{ MPa} & \text{se } S_{ut} > 1400 \text{ MPa} \end{cases}$$

Per trazione  $k_c = 0,85$

$$k_a = c S_{ut}^d$$

	c	d
Lucidatura o rettifica	1,58	-0,085
Lavorazioni con macchine utensile	4,51	-0,265
Laminazione a caldo	57,1	-0,718
Getti in sabbia o terra, grezzi	272	-0,995

Per trazione:  $k_b = 1$

Affidabilità	Ke
50	1
90	0.897
95	0.868
99	0.814
99.9	0.753
99.99	0.702
99.999	0.659
99.9999	0.620

Resistenza ad alto numero di cicli per sollecitazioni di trazione con sigma minima costante:

$$S_{e,nom} = \frac{S_e}{K_f}$$

$$S_{e,m,nom} = \frac{S_{e,nom} S_{ut} - S_{e,nom} S_{min}}{S_{e,nom} + S_{ut}}$$

$S_{min}$  : tensione minima sulla filettatura o sul gambo a seconda della sezione da verificare.

Coefficiente di sicurezza v vita infinita :

$$v = \frac{S_{e,m,nom}}{\sigma_a} ;$$

## ENERGIA DI DEFORMAZIONE

### Casi notevoli con materiale lineare elastico

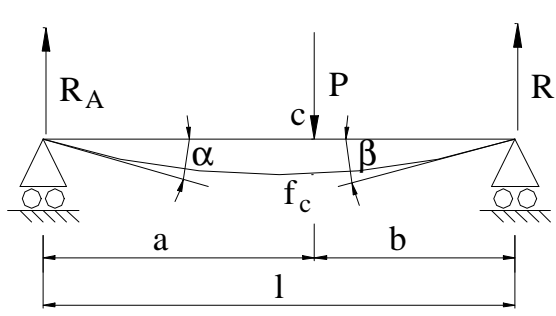
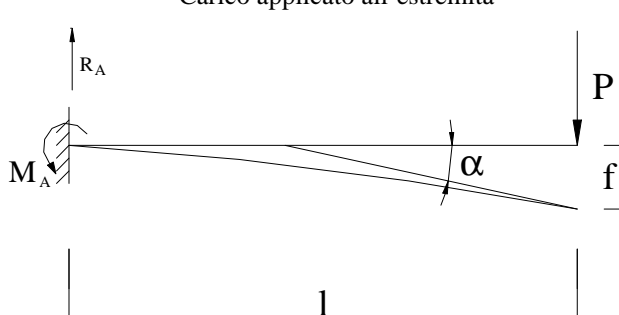
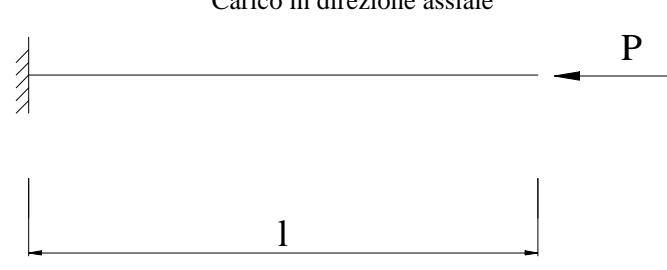
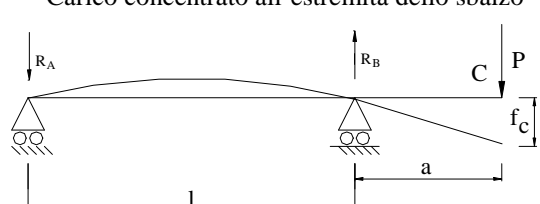
U: energia di deformazione per una trave a sezione costante in materiale lineare elastico

P: forza applicata all'estremità

E: modulo di elasticità

J: Momento di inerzia della sezione

A: Area sezione

<p>Carico concentrato in un punto intermedio C</p> 	$U = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJl}$
<p>Carico applicato all'estremità</p> 	$U = \frac{1}{6} \frac{P^2 l^3}{EJ}$
<p>Carico in direzione assiale</p> 	$U_c = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{EA}$
<p>Carico concentrato all'estremità dello sbalzo</p> 	$f_c = \frac{P}{EJ} \frac{(l+a)a^2}{3}$

### Calcolo della freccia massima dovuta alla forza P per materiale lineare elastico

$f_{\max}$ : freccia massima

$$U = \frac{1}{2} P f_{\max}$$

## VERIFICHE DI MASSIMA NELLE BIELLE

### Suddivisione delle masse

$m_{biella}$  : massa biella

$m_{alt}$  : masse alterne ridotte al piede di biella

$m_{rot}$  : masse ridotte alla testa di biella

$m_{pis}$  : masse pistone

$m_{spin}$  : masse spinotto

$m_{fel}$  : masse fasce elastiche

$$m_{PSF} = m_{pis} + m_{spin} + m_{fel}$$

$$Ipotesi 1) \quad m_{alt} = m_{rot} = \frac{m_{biella}}{2}$$

$$Ipotesi 2) \quad \begin{aligned} m_{alt} + m_{rot} &= m_{biella} \\ m_{alt} a &= m_{rot} b \end{aligned}$$

a: distanza del piede di biella dal baricentro della biella

b: distanza della testa di biella dal baricentro della biella

$$Ipotesi 3) \quad \text{si aggiunge all'ipotesi 2 la condizione: } m_{alt} a^2 + m_{rot} b^2 + J_0 = J_{biella}$$

Risolvendo le 3 ipotesi si ottiene:

$$m_{alt} = \frac{b}{l} m_{biella}$$

$$m_{rot} = \frac{a}{l} m_{biella}$$

$$J_0 = J_{biella} - m_{biella} a b$$

$J_0$ : momento d'inerzia puro baricentrico

$J_{biella}$  : momento d'inerzia della biella rispetto al proprio baricentro

l : lunghezza della biella (l=a+b)

### Forze della combustione

$$F_c = p A_i$$

$A_i$ : Area pistone

### Accelerazione ai punti morti in direzione assiale

$$a_{pm,sup} = r \omega^2 (1 + \lambda)$$

$$a_{pm,inf} = r \omega^2 (1 - \lambda)$$

$a_{pm,inf}$ : accelerazione al punto morto inferiore  
 $a_{pm,sup}$ : accelerazione al punto morto superiore  
 $\omega$ : velocità angolare della manovella  
 $r$ : raggio della manovella  
 $l$ : lunghezza della biella  
 $\lambda$ :  $r/l$

### Forze d'inerzia al piede in direzione assiale

$$F_a = -m a$$

$$\text{con } m = m_{PSF} + m_{alt}$$

$F_{ia}$ : forze d'inerzia al piede  
 $a$ : accelerazione del piede di biella

### Verifiche ad instabilità del fusto

#### *Relazione di Eulero*

$$P_{max} \leq \pi^2 \frac{EI}{L_e^2}$$

#### *Relazione di Johnson*

$$\sigma_{cr} \leq \sigma_y - \frac{\sigma_y^2}{4\pi^2 E} \left( \frac{L_e}{\rho} \right)^2$$

Nel piano che contiene la biella e la manovella (piano definito XY)

$$L_e = l$$

Nel piano ortogonale al piano che contiene la biella e la manovella (piano definito XZ)

$$L_e = (0.6 - 0.8) l$$

$$\lambda_{lim} \leq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$$

$\lambda \leq 10$  si considera critico lo snervamento;  $10 \leq \lambda \leq (1.5-2) \lambda_{min}$  si usa Johnson;  $\lambda > (1.5-2) \lambda_{min}$  si usa Eulero

$E$ : modulo di elasticità

$l$ : lunghezza della biella

$L_e$ : lunghezza libera di inflessione

$I$ : Momento di inerzia della sezione del fusto per una inflessione attorno ad una asse ortogonale al piano individuato dalla biella e dalla manovella

$J_y$ : Momento di inerzia della sezione del fusto per una inflessione attorno ad una asse contenuto nel piano individuato dalla biella e dalla manovella

$\rho$ : raggio d'inerzia della sezione

$\lambda_{min}$ : valore di  $\lambda$  al di sotto del quale non è limitante il carico di snervamento

$\sigma_y$ : carico di snervamento

### Verifiche statiche a flessione-trazione del piede di biella

$$\sigma = \frac{F_a}{2A} + 0.08 \frac{F_a r_m}{W_f}$$

$F_a$ : forza applicata al piede di biella

$A$ : area della sezione piede di biella

$r_m$ : raggio baricentrico della sezione

$W_f$ : modulo di resistenza flessionale della sezione

La verifica fa' riferimento a travi ad asse rettilineo mentre per elevati spessori la verifica andrebbe eseguita seguendo la teoria delle travi curve.

### Verifiche statiche a flessione-trazione della testa della biella

$$F = (m_{PSF} + m_{alt}) a_{pm,sup} + m_{rot} \omega^2 r$$

*Equazione semplificata forza*

$$F = (m_{PSF} + m_{biella}) [\omega^2 r (1 + \lambda^2)]$$

$F$ : carico massimo inerziale gravante sul fusto della biella

Si assume che i bulloni si comportino come cerniere

### *Verifica raccordo testa fusto*

$$N = \frac{F}{2} \sin \alpha; \quad M = \frac{F}{2} \left( \frac{D}{2} - \frac{d}{2} \sin \alpha \right)$$

$N$ : sforzo normale nella sezione;  $M$ : Momento flettente nella sezione

$D$ : interasse bulloni;  $d$ : diametro testa di biella

### *Verifica cappello di testa*

Si ipotizza una pressione uniforme

$$M = \frac{F}{2} \left( \frac{D}{2} - \frac{d}{4} \right)$$

$M$ : Momento flettente massimo